

Traian Valeriu Popescu

GEOMETRIE DESCRIPTIVA

TRAIAN VALERIU POPESCU

GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ

Editura Universitaria

Craiova, 2004

Referent științific: Prof.univ.dr.ing. Filip Ciolacu

Prof.univ.dr.ing. Gheorghe Gherghina

Copyright © 2004 Universitaria

Toate drepturile sunt rezervate Editurii Universitaria

Descrierea C.I.P. a Bibliotecii Naționale

POPESCU TRAIAN VALERIU

Geometrie descriptivă, Traian Valeriu Popescu

Editura Universitaria, Craiova, 2004

204 p. 21 cm

Bibliografie

ISBN: 973 – 8043 – 259 - 9

Redactor: Octavian Lohon

Tehnoredactor: dr.ing. Traian Valeriu Popescu

Copertă: dr.ing. Traian Valeriu Popescu

Bun de tipar: 10.10.2004

Apărut: 2004

Tipografia Universității din Craiova

Str. Brestei, nr.156A , Craiova, Dolj, România

Tel: +40 251 598054

Tipărit în ROMÂNIA

GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ

INTRODUCERE

Definiție. *Geometria descriptivă este știința care studiază metodele de reprezentare exacte ale corpurilor prin metoda proiecțiilor.*

Geometria descriptivă este, prin esență, o știință grafică. Construcția reprezentărilor grafice tratate de geometria descriptivă se bazează pe *metoda proiecțiilor* care derivă din mecanismul vederii umane. În 1799 francezul GASPARD MONGE, în lucrarea **GEOMETRIE DESCRIPTIVE** descrie *metoda dublei proiecții ortogonale* care constă în proiecția corpurilor din spațiu pe două plane principale de proiecție perpendiculare între ele, *planul orizontal* $[H]$ și *planul frontal* (vertical) $[V]$.

În cazul în care aceste două plane nu sunt suficiente pentru definirea corpului din spațiu atunci se folosește un al treilea plan perpendicular pe cele două plane $[H]$ și $[V]$ numit *plan de profil* (lateral) $[L]$. În acest fel se pot reprezenta corpurile din spațiu tridimensional în spațiul cu două dimensiuni (foaia de hârtie), reprezentare numită *epură* care apoi dă posibilitatea cunoașterii corpului cu ajutorul proiecțiilor deducându-se atât forma și dimensiunile, cât și poziționarea în spațiu.

1. SISTEME DE PROIECȚIE

1.1 Generalități

Sistemele de proiecție folosite de geometria descriptivă asociază elemente de bază ale vederii umane (teoremele privind fasciculele de lumină) cu elemente geometrice componente ale sistemului de proiecție respectiv.

Reprezentarea unui corp prin proiecție se obține ducând prin punctele aferente conturului raze vizuale (de proiecție) numite *proiectante*, adică linii drepte care, la intersecția lor cu *planul de proiecție* (planul pe care se face proiecția) dau pe acesta imaginea (*proiecția*) corpului.

Elementele de bază ale unei proiecții sunt (Fig.1.1) :

- punctul O (ochiul observatorului), numit centru de proiecție;
- suprafața P pe care se proiectează obiectul (dreapta AB), numit plan de proiecție;
- dreptele sau razele vizuale care trec prin punctele caracteristice (A și B) ale corpului și intersectează planul de proiecție $[P]$ în a și b , numite proiectante;
- punctele a și b obținute pe planul $[P]$, care constituie proiecția punctelor A și B .

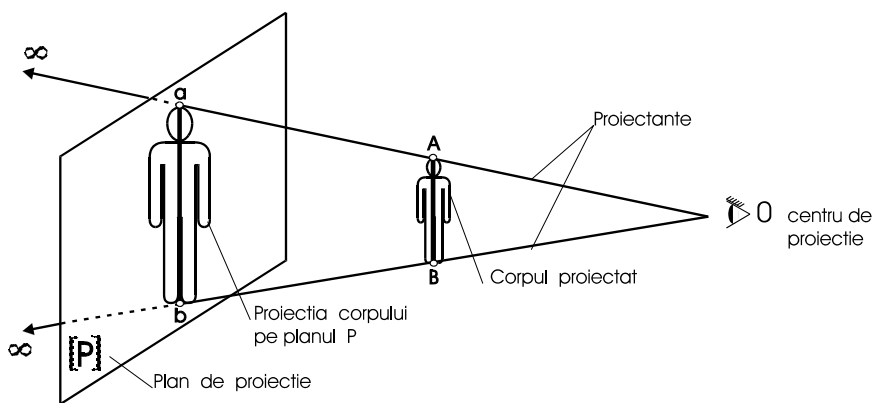


Fig. 1.1

La proiecția corpului AB pe planul de proiecție $[P]$ se duc din centrul O de proiecție proiectante prin punctele caracteristice A și B , acestea determină punctele a și b la intersecția lor cu planul de proiecție.

În raport de distanța centrului de proiecție față de corp, proiecția corpului din spațiu se realizează prin două metode:

- *proiecția centrală sau conică* (Fig.1.2a) când centrul de proiecție se află la o distanță finită față de corp;
- *proiecția paralelă sau cilindrică* (Fig.1.2 b,c) când centrul de proiecție se află la distanță infinită față de corp.

La rândul ei, proiecția paralelă este de două feluri:

- proiecția paralelă oblică (Fig.1.2b) când direcția de proiecție este înclinată față de planul de proiecție $[P]$;
- proiecția paralelă ortogonală (Fig.1.2c), când direcția de proiecție este perpendiculară pe planul de proiecție $[P]$.

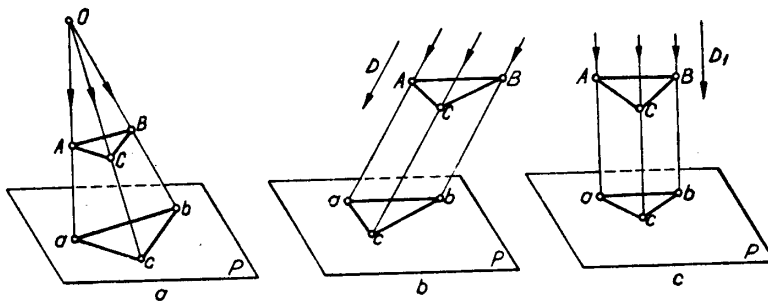


Fig. 1.2

Oricare ar fi sistemul de proiecție utilizat, corpurile din spațiu apar deformate în proiecția din planul de proiecție datorită mecanismului fasciculelor de lumină, deformări care se produc după anumite teoreme geometrice specifice fiecărui sistem în parte, care transformă corpul din spațiul tridimensional într-o imagine în spațiul bidimensional (foaia de hârtie).

Pentru reprezentarea corpurilor DESENUL TEHNIC utilizează metoda proiecției cilindrice ortogonale.

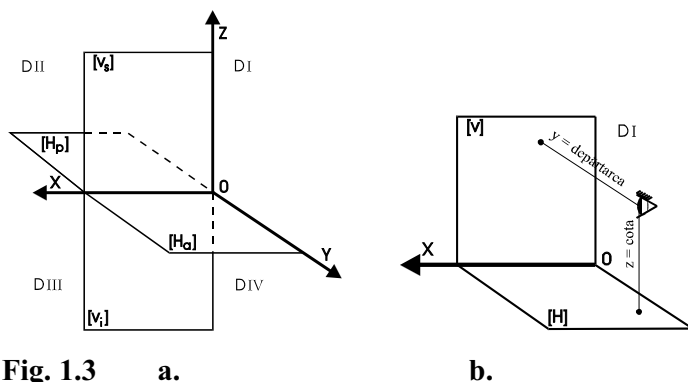
1.2 Sisteme de referință

Pentru a proiecta un corp oarecare din spațiu pe un plan de proiecție, trebuie să îl încadrăm într-un sistem de referință denumit sistem de proiecție.

Definiție. *Sistemul de proiecție reprezintă un ansamblu de elemente și metode care permit trecerea de la un spațiu cu un număr de dimensiuni la un alt spațiu cu un alt număr de dimensiuni.*

Gaspard Monge a definit sistemul de proiecție ortogonal format de două plane de proiecție perpendiculare între ele, planul de proiecție orizontal $[H]$ și planul de proiecție vertical $[V]$, care se intersectează după dreapta Ox (O în dreapta) numită *linie de pământ*. Având în vedere că spațiul este infinit și că planele sunt suprafețe infinite, împărțirea spațiului se consideră în 4 (patru) subspații, denumite diedre (Fig. 1.3), cel mai utilizat în tehnică fiind Diedrul I, unde toate coordonatele sunt pozitive (Tab. 1.1).

Definiție. *Diedrul este figura formată de două semiplane mărginite de dreapta lor de intersecție (porțiunea din spațiu cuprinsă între aceste semiplane).*



Tabelul 1.1

DIEDRUL / Coordonata	I	II	III	IV
Depărtarea	+	-	-	+
Cota	+	+	-	-

Nu tot timpul acest sistem de proiecție poate defini complet corpul din spațiul tridimensional; din această cauză, Gaspard Monge a introdus sistemului de proiecție anterior prezentat un al treilea plan de proiecție perpendicular pe planele $[H]$ și $[V]$ numit plan lateral $[L]$. Sistemul de plane $[H]$, $[V]$ și $[L]$ a căror intersecție două câte două formează sistemul de axe rectangulare $OXZY$ este cel mai utilizat sistem de referință fiind denumit *triedrul ortogonal de proiecție*, Fig.1.4.

linia de pământ $\overline{Ox} \Rightarrow [H] \cap [V]$;

axa secundară $\overline{Oy} \Rightarrow [H] \cap [L]$;

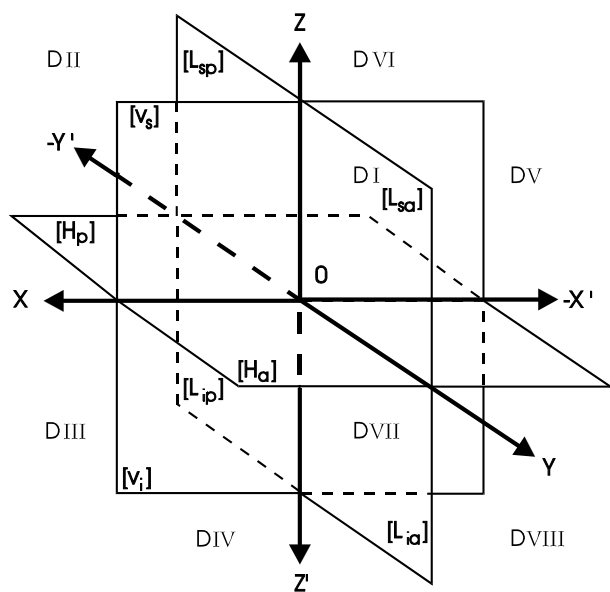
axa secundară $\overline{Oz} \Rightarrow [V] \cap [L]$;

originea axelor $O \Rightarrow [H] \cap [V] \cap [L]$

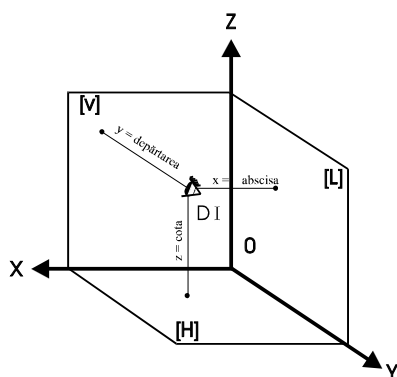
Având în vedere infinitatea spațiului și a suprafețelor împărțirea spațiului se consideră în 8 (opt) subspații denumite *triedre*, cel mai utilizat în tehnică fiind *triedrul I* unde coordonatele sunt pozitive (Tab. 1.2); pentru ușurința limbajului și a construcțiilor în literatura de specialitate se folosește denumirea de diedru și pentru triedre, notațiile consacrate fiind de cele opt diedre.

Tabelul 1.2

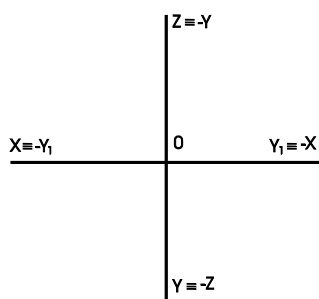
DIEDRUL / Coordonata	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Abscisa	+	+	+	+	-	-	-	-
Depărtarea	+	-	-	+	+	-	-	+
Cota	+	+	-	-	+	+	-	-



a.



b.



c.

Fig. 1.4

1.3 Sisteme de reprezentare

Sistemele cele mai utilizate în DESENUL TEHNIC sunt:

Perspectiva este sistemul de reprezentare care are la bază proiecția centrală pe un plan de proiecție $[P]$, așezat între corp și centrul de proiecție (ochiul observatorului), Fig.1.5. Este folosit cu precădere în arhitectură și construcții.

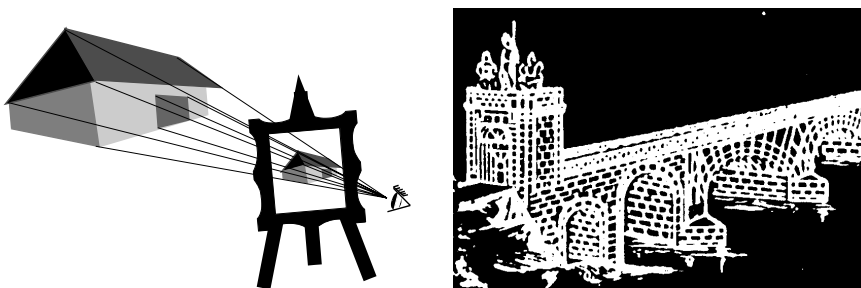


Fig. 1.5

a.

b.

Dubla proiecție ortogonală este sistemul de reprezentare cunoscut sub denumirea de **METODA MONGE** și are la bază proiecția paralel ortogonală pe două sau mai multe plane de proiecție perpendiculare între ele; planul orizontal $[H]$ și planele verticale de front $[V]$ și de profil $[L]$, Fig.1.6.

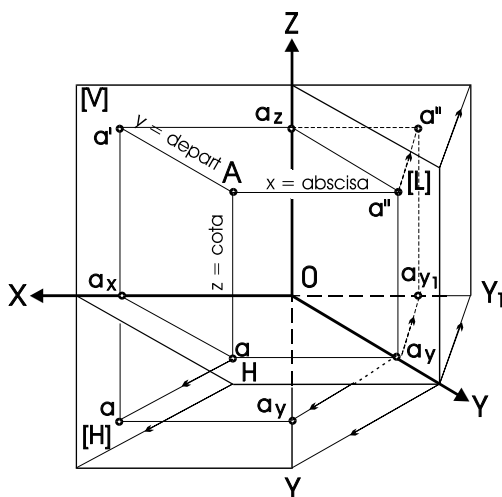


Fig. 1.6

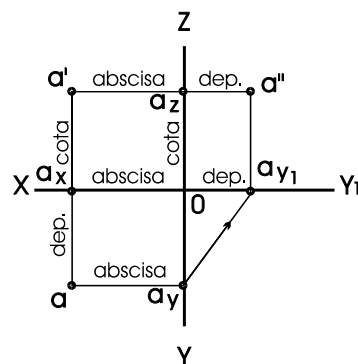


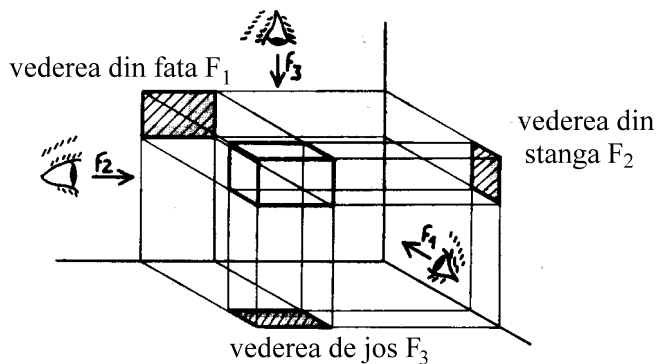
Fig. 1.7

Se alege în așa fel proiecția corpului astfel încât diversele fețe ale lui să fie paralele cu planele de proiecție, astfel încât fețele corpului să se proiecteze în “adevărata” lor mărime pe planele de proiecție. După proiecția corpului pe cele trei plane de proiecție ale sistemului de referință (triedrul ortogonal de proiecție $OXZY$) se procedează la

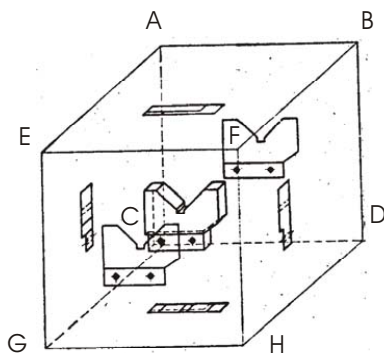
rabaterea planelor, planul orizontal $[H]$ înspre în jos iar planul de profil $[L]$ lateral spre spate, până când se suprapun pe extensia planului vertical (foaia de hârtie). Rabaterea se face în jurul axelor sistemului rectangular $OXZY$ cu 90^0 ; figura astfel obținută se numește epură, Fig.1.7.

Definiție. *Epura este desenul care conține rezolvarea grafică a unor probleme de geometrie în spațiu prin intermediul geometriei descriptive.*

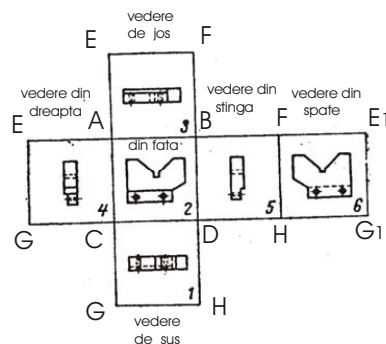
Un corp în spațiu (structură spațială) poate fi proiectat cu unghiuri drepte pe șase planuri care formează suprafața unui cub (Fig.1.8 a, b, c).



a.



b.



c.

Fig. 1.8

Această reprezentare cunoscută sub denumirea celor “6 proiecții principale” nu oferă tot timpul proiecția elementelor geometrice ale corpului în adevărata mărime pe planele de proiecție datorită deformărilor imaginilor din spațiul tridimensional în spațiul bidimensional.

Reprezentarea axonometrică este sistemul de reprezentare a corpurilor din spațiu pe un singur plan de proiecție $[P]$ numit plan axonometric prin proiecție paralelă, oblică sau ortogonală și prin care se urmărește ca imaginea obținută să sugereze spațial corpul. Metoda folosește raportarea prealabilă la triedrul ortogonal $OXYZ$, Fig.1.9.

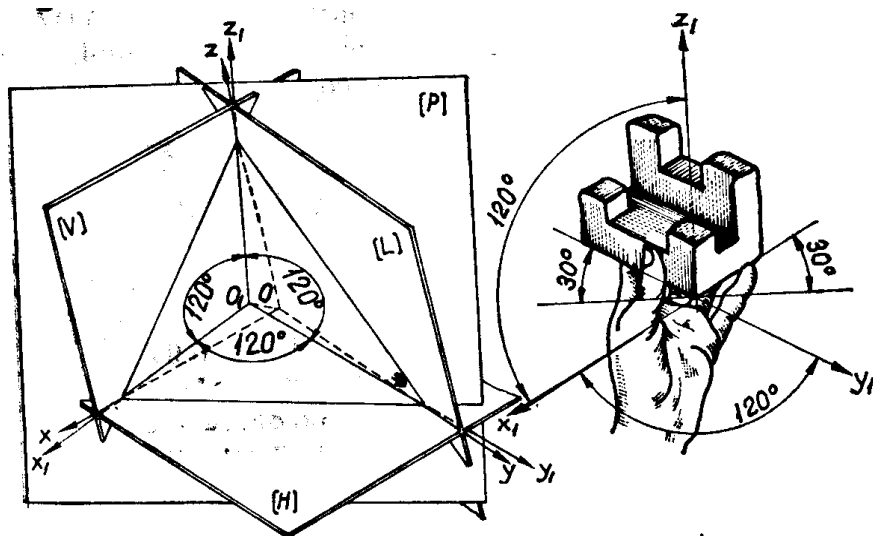


Fig. 1.9

Reprezentarea cotată este sistemul de reprezentare a suprafețelor și utilizează atât elemente geometrice (proiecția paralelă ortogonală pe planul de proiecție orizontal $[H]$) cât și elemente numerice ce definesc cotele (adâncimi sau înălțimi).

- *Curbele de nivel.* Urma din plan rezultată după intersecția unei forme de relief cu un plan $[P]$ paralel cu planul de proiecție orizontal $[H]$ de cotă zero (plan de comparație – nivelul constant al mării) se numește curbă de nivel (Fig.1.10, Fig.1.11) și se utilizează în topografie și cartografie.

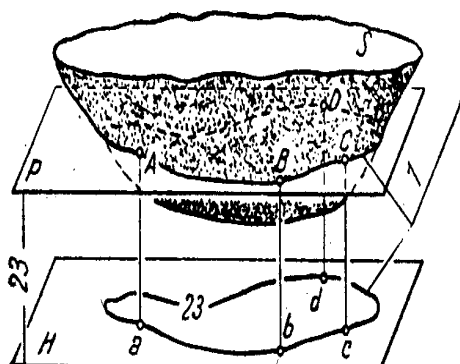


Fig. 1.10

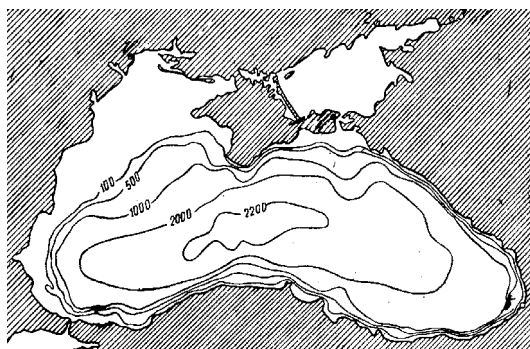


Fig. 1.11

- *Liniile de plutire* Carcasa unei nave are o formă destul de complicată. Pentru reprezentare se duc trei sisteme de plane verticale și se construiesc intersecțiile lor cu suprafața exterioară a carcasei, Fig.1.12.

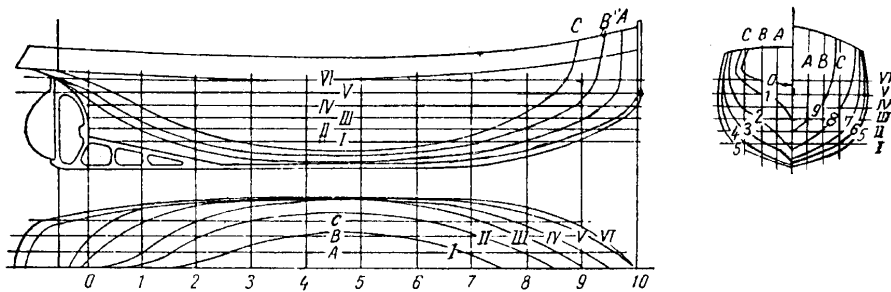


Fig. 1.12

Planele secante se duc:

- a. orizontal, curbele de intersecție $I \dots VI$ se numesc linii de plutire, fiind curbele pe care le trasează apa pe carcasa navei pe măsură ce aceasta se scufundă în funcție de greutatea încărcăturii. Pe vederea laterală a carcasei, precum și pe vederea de sus (dinspre proră) și din spate (dinspre pupă), liniile de plutire sunt reprezentate de drepte orizontale. Toate liniile de plutire se obțin în plan în mărime naturală.
- b. vertical, paralel cu axa longitudinală a navei, curbele de intersecție corespunzătoare A, B, C sunt reprezentate în plan și pe vederea din față (și din spate) prin linii drepte, iar în vederea laterală prin linii curbe.
- c. vertical, perpendicular pe axa longitudinală a navei, planele de coastă sunt planele perpendiculare pe axa longitudinală a navei. Curbele de intersecție $0, 1, 2, \dots 10$, sunt reprezentate în plan și pe vederea laterală prin linii drepte, iar pe vederea din față (și din spate) prin linii curbe.

2. PUNCTUL

2.1 Reprezentarea punctului în epură

Folosind cele două plane de proiecție perpendiculare ($[H]$ – orizontal și $[V]$ – vertical) care se intersectează după dreapta (OX) – *axă de proiecție sau linie de pământ*, un punct A din spațiu se va proiecta pe $[H]$ în a – proiecția orizontală a punctului și pe $[V]$ în a' – proiecția verticală a punctului. Distanța de la punctul A la $[H]$ se numește *cotă* și se notează cu z , iar distanța de la punctul A la $[V]$ se numește *depărtare* și se notează cu y , (Fig. 2.1).

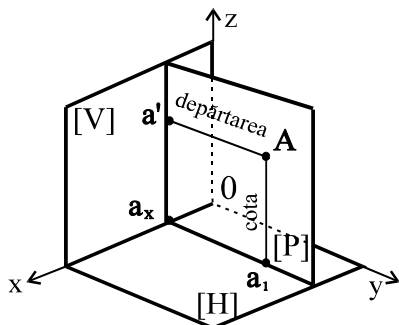


Fig. 2.1

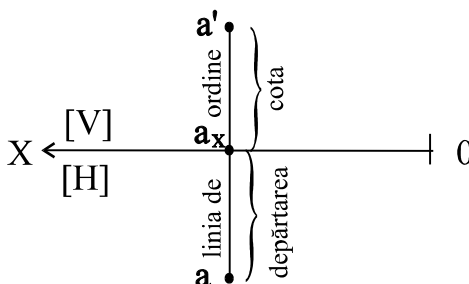


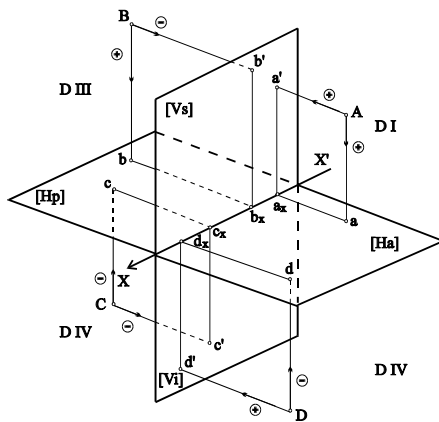
Fig. 2.2

Prin rotirea $[H]$ în sensul acelor de ceasornic până la suprapunerea peste $[V]$ se obține epura, (Fig. 2.2). **EPURA** este reprezentare plană convențională a corpurilor spațiale, proiectate ortogonal pe planele de proiecție, utilizând numai axele de proiecție. În proiecția dublu ortogonală (sistemul Monge), un punct A din spațiu este definit în epură de două proiecții a și a' , iar două proiecții aflate pe aceeași linie de ordine definesc un punct din spațiu.

2.2 Punctul în diedre

Diedrul – unghiul format între două plane care se intersectează. În cazul proiecției ortogonale, planele $[H]$ și $[V]$ împart spațiul în 4 diedre

(Fig.2.3), notate *I*, *II*, *III* și *IV*. În Fig. 2.4 sunt prezentate în epură puncte situate în cele 4 diedre. În funcție de diedrul în care sunt conținute, semnele lui *z* și *y* sunt pozitive sau negative, (Tab. 2.1).



Diedrul	I	II	III	IV
Coordonata				
Depărtarea	+	-	-	+
Cota	+	+	-	-

Fig. 2.3

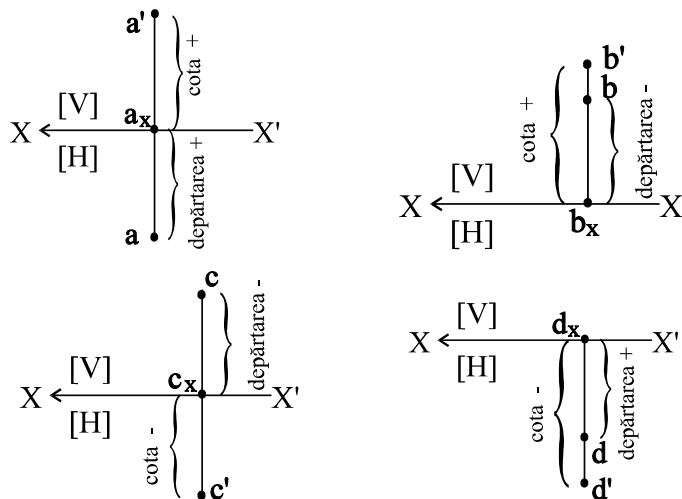


Fig. 2.4

2.3 Punctul în triedre

Unghiul format de 3 plane concurente se numește *unghi triedru*. În cazul folosirii celui de-al treilea plan de proiecție *[W]* – plan lateral de proiecție, care este perpendicular pe *[H]* și *[V]*, un punct *A* din spațiu (Fig.

2.5) va avea și o a treia proiecție a'' . Distanța de la punctul A la planul $[W]$ se numește **abscisă** și se notează cu x . Epura se obține prin rotirea planului $[H]$ în sensul acelor de ceasornic și prin rotirea planului $[W]$ în sens invers acelor de ceasornic, până se suprapun peste $[V]$ (Fig. 2.6). Proiecția a'' descrie în această rotație un arc de cerc de rază egală cu depărtarea. Planele $[H]$, $[V]$ și $[W]$ împart spațiul în 8 triedre, notate cu $I, II, III, \dots VIII$. Puncte situate în cele opt triedre sunt prezentate în epură în Fig. 2.7, iar în Tab. 2.2 este sistematizat semnul coordonatelor x, y și z în cele 8 triedre.

Tabelul 2.2

Triedrul	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Semnul x	+	+	+	+	−	−	−	−
Semnul y	+	−	−	+	+	−	−	+
Semnul z	+	+	−	−	+	+	−	−

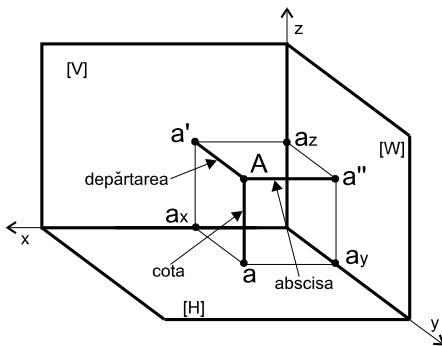


Fig. 2.5

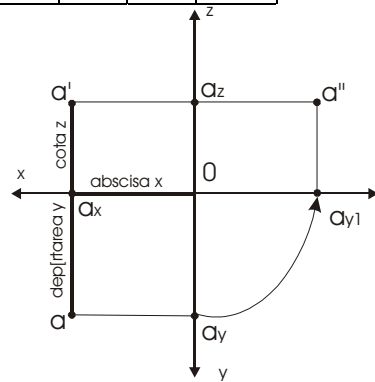
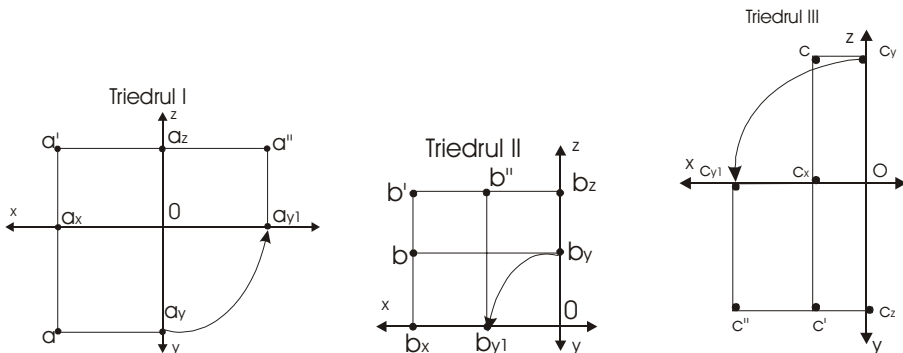


Fig. 2.6



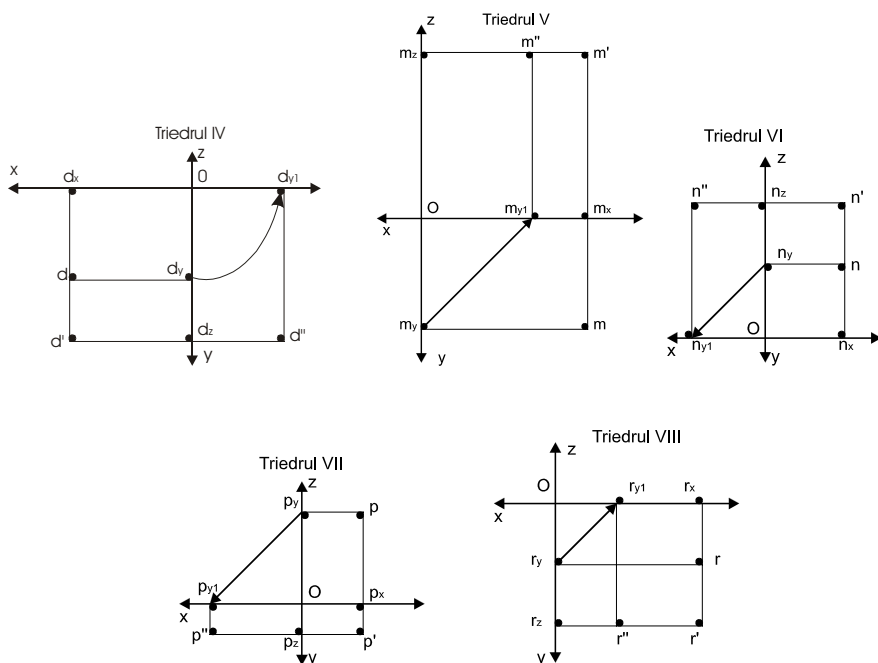


Fig. 2.7

2.4 Puncte situate în plane bisectoare

Aceste puncte au distanța egală cu cota.

Se cunosc două plane bisectoare: *planul bisector unu* care împarte diedrele unu și trei în așa fel încât toate punctele acestui plan au depărtarea egală cu cota și *planul bisector doi* care împarte diedrele doi și patru în așa fel încât toate punctele acestui plan au depărtarea egală cu cota. Convențional, aceste plane se notează $[B_1]$ și $[B_2]$, (Fig. 2.8).

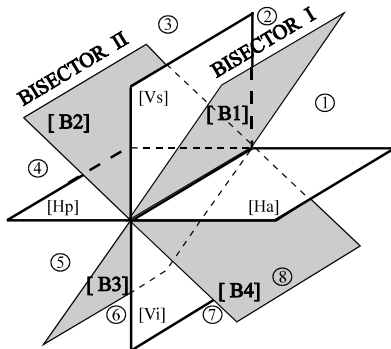


Fig. 2.8

Dacă $E (e, e') \in [B_1]$ și se găsește în *diedrul* I , atunci cota va fi egală cu depărtarea și ambele vor fi pozitive, (Fig. 2.9). Epura unui astfel de punct va arata ca în Fig. 2.9, proiecțiile e și e' fiind simetrice față de linia de pământ.

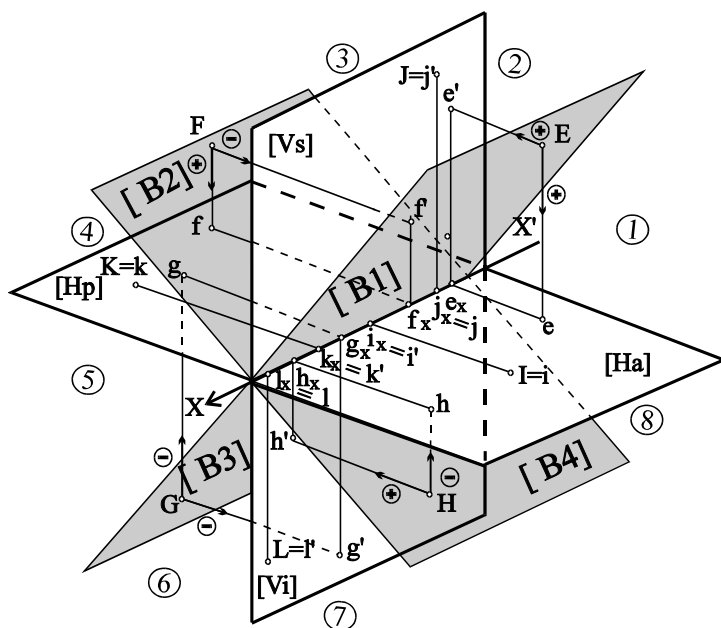


Fig. 2.9

Idem cu punctele $F (f, f') \in [B_2]$, $G (g, g') \in [B_1]$ și $H (e, e') \in [B_2]$.

2.5 Puncte situate pe linia de pământ

Sunt situate pe dreapta de intersecție dintre planele $[H]$ și $[V]$ - (OX) și aparțin concomitent ambelor planuri deci, aceste puncte au atât cotele cât și depărtările egale cu zero. În această situație, proiecțiile orizontale și verticale se vor confunda cu însăși punctul din spațiu.

2.6 Puncte situate în planele de proiecție

Caracteristica unor astfel de puncte este că una din coordonatele descriptive este egală cu zero și, prin urmare, una din proiecții se va

confunda cu însăși punctul din spațiu , în timp ce cealaltă proiecție se va găsi pe linia de pământ, (punctele I, J, K, L din Fig. 2.9).

Epurele tuturor punctelor prezentate la punctele: **2.2, 2.3, 2.4** și **2.5** sunt prezentate în Fig. 2.10.

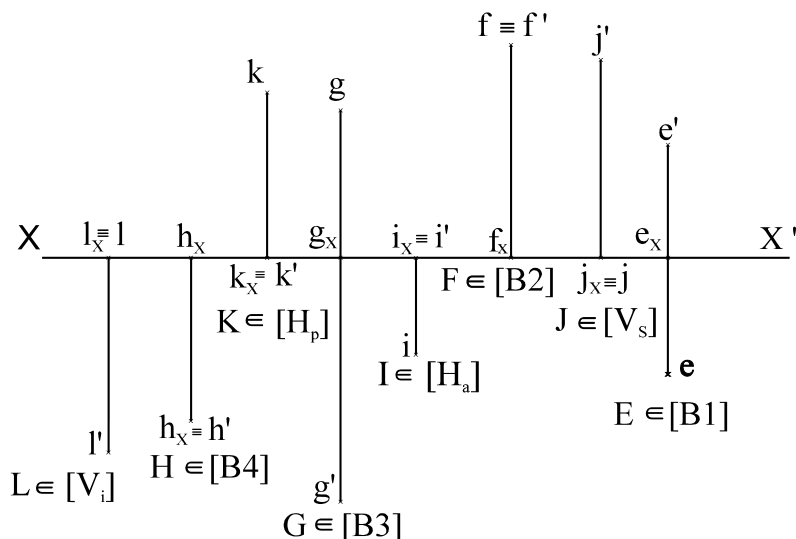


Fig. 2.10

2.7 Alfabetul punctului

Sintetizând cele expuse la reprezentarea punctului, se poate concluziona că: un punct poate ocupa 17 poziții în regiunile spațiului limitat la planele de proiecție și planele bisectoare (Fig. 2.11). Această succesiune de poziții se numește **alfabetul punctului**.

Comparând cele 17 poziții ale punctelor de la A la S din Fig. 2.11 și din epurele punctelor (Fig. 2.12), rezultă următoarele:

- $A (a, a') \in [H] \Rightarrow a' \equiv A \wedge a' \subset \overrightarrow{Ox}$;
- $B (b, b') -$ situat în *diedrul I*, sub $[B_1]$, deoarece are depărtarea mai mare decât cota, și ambele sunt pozitive;
- $C (c, c') \in [B_1] \Rightarrow \overrightarrow{Cc} \equiv \overrightarrow{Cc'}$;

- $D (d, d') -$ situat în *diedrul I*, deasupra lui $[B_1]$, deoarece are depărtarea mai mică decât cota, și ambele sunt pozitive;
- $E (e, e') \in [V_s] \Rightarrow e' \equiv E \wedge e \subset \overrightarrow{Ox}$;
- $F (f, f') -$ situat în *diedrul II*, deasupra lui $[B_2]$, deoarece are cota mai mare decât depărtarea în valoare absolută (cota este pozitivă iar depărtarea negativă);
- $G (g, g') \in [B_2] \Rightarrow |\overrightarrow{Gg}| \equiv |\overrightarrow{Gg'}| -$ ambele proiecții coincid, deci cota este egală cu depărtarea absolută și fiind situate ambele deasupra lui $\overrightarrow{Ox}$ rezultă că depărtarea este negativă și cota este pozitivă, semne caracteristice *diedrului II*;
- $I (i, i') -$ în *diedrul II*, sub $[B_2]$;
- $J (j, j') \in [H_p] \Rightarrow j \equiv J \wedge j' \subset \overrightarrow{Ox}$;
- $K (k, k') -$ în *diedrul III*, deasupra lui $[B_1]$;
- $L (l, l') \in [B_1] \Rightarrow |\overrightarrow{Ll}| \equiv |\overrightarrow{Ll'}| -$ cota egală cu depărtarea în valoare și ambele negative;
- $M (m, m') -$ în *diedrul III*, cota mai mare decât depărtarea în valoare și ambele negative;
- $N (n, n') \in [V_i] \Rightarrow n' \equiv N \wedge n \subset \overrightarrow{Ox} -$ depărtarea zero, cota negativă;
- $P (p, p') -$ în *diedrul IV*, sub $[B_2]$, depărtarea pozitivă iar cota negativă; în valoare absolută cota este mai mare decât depărtarea;
- $R (r, r') \in [B_2] \Rightarrow |\overrightarrow{Rr}| \equiv |\overrightarrow{Rr'}| -$ cota egală cu depărtarea în valoare absolută, în *diedrul IV*;
- $S (s, s') -$ deasupra lui $[B_1]$ în *diedrul IV*, depărtarea este pozitivă și cota negativă; în valoare absolută cota este mai mică decât depărtarea;
- $O (o, o') \subset \overrightarrow{Ox}$ cota și depărtarea egale cu zero.

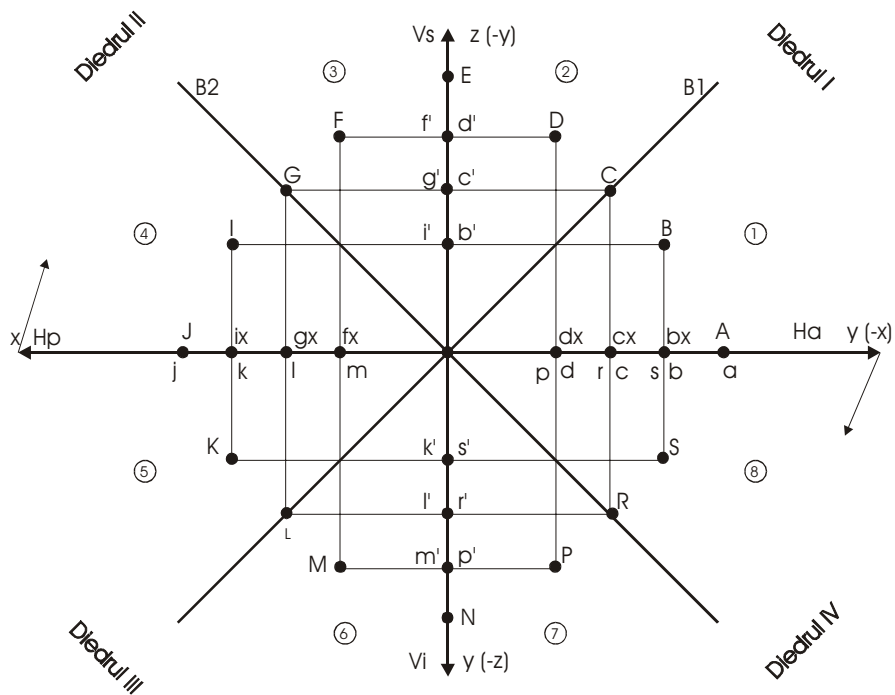


Fig. 2.11

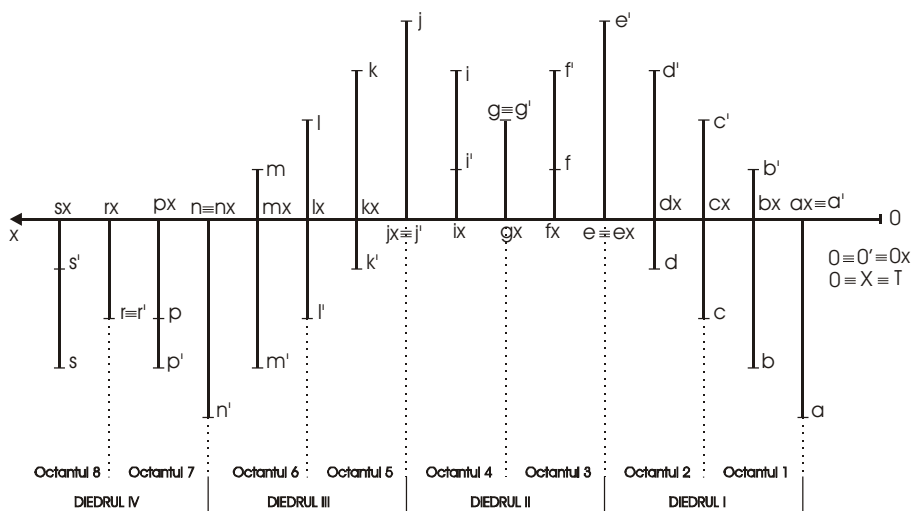


Fig. 2.12

3 DREAPTA

3.1 Urmele drepteii

Urmele drepteii: punctele în care dreapta din spațiu intersectează planele de proiecție. O dreaptă oarecare poate intersecta cele trei plane de proiecție, deci poate avea trei urme.

Punctul de intersecție dintre o dreaptă D și planul $[H]$ se numește **urmă orizontală**; se notează cu $H (h, h')$, $H \in [H]$, deci, $H (x, y, 0)$. Punctul de intersecție dintre o dreaptă D și planul $[V]$ se numește **urmă verticală**; se notează cu $V (v, v')$, $V \in [V]$, deci, $V (x, 0, z)$. Punctul de intersecție dintre o dreaptă D și planul $[W]$ se numește **urmă laterală**; se notează cu $W (w, w')$, $W \in [W]$, deci, $W (0, y, z)$.

În Fig. 3.1 sunt prezentate proiecțiile urmelor pe epura drepteii $D (d, d')$.

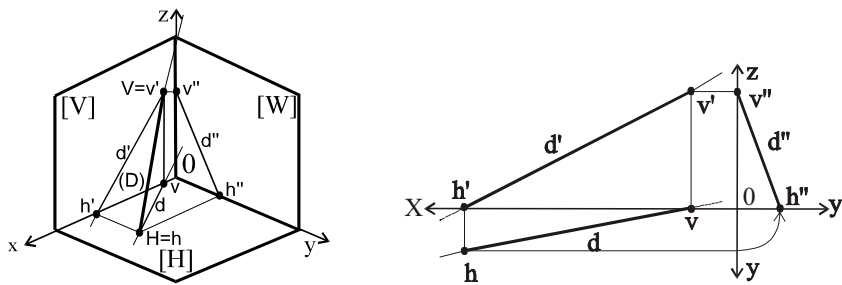


Fig. 3.1

3.2 Pozițiile remarcabile (particulare) ale unei drepte

3.2.1 Drepte paralele cu planele de proiecție:

Dreapta de nivel (orizontală) – dreapta paralelă cu $[H]$, deci toate punctele orizontalei au aceeași cotă. Punctele ce definesc o astfel de dreaptă se vor găsi la aceeași distanță față de $[H]$, proiecția verticală va fi paralelă cu linia de pământ $\overrightarrow{Ox}$, iar proiecția orizontală poate fi înclinată oricum față de $\overrightarrow{Ox}$, Fig. 3.2;

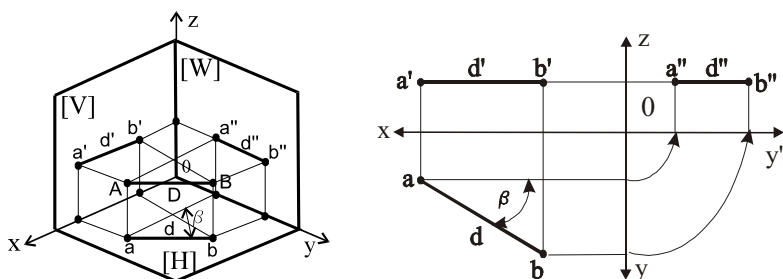


Fig. 3.2

Dreapta de front (frontala) – dreaptă paralelă cu $[V]$, deci toate punctele frontalei au aceeași depărtare. Punctele ce o definesc se vor găsi la aceeași distanță față de $[V]$, proiecția orizontală va fi paralelă cu $\overrightarrow{Ox}$ și cea verticală, înclinată față de $\overrightarrow{Ox}$, Fig. 3.3;

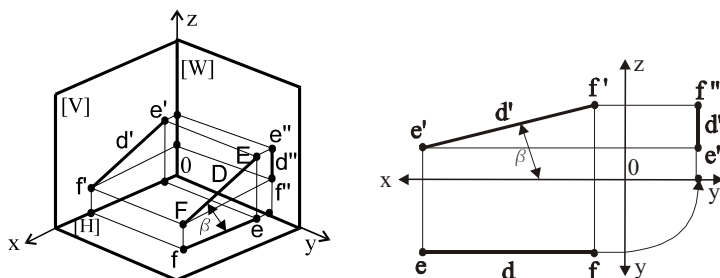


Fig. 3.3

Dreapta de profil – dreaptă paralelă cu $[W]$, deci toate punctele dreptei de profil au aceeași abscisă. Punctele ce o definesc se vor găsi la aceeași distanță față de $[W]$, iar proiecțiile orizontală și verticală sunt perpendiculare pe $\overrightarrow{Ox}$, Fig. 3.4.

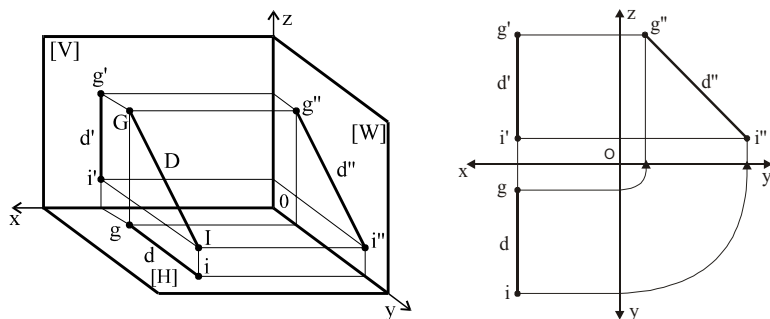


Fig. 3.4

3.2.2 Drepte perpendiculare pe plane de proiecție:

Dreapta verticală – dreaptă perpendiculară pe $[H]$ și simultan paralelă cu $[V]$ și $[W]$. Punctele ce o definesc au atât abscisele cât și depărtările egale. Proiecția orizontală se reduce la un punct iar proiecțiile verticală și laterală vor fi paralele cu axa secundară de proiecție $\overrightarrow{Oz}$, Fig. 3.5;

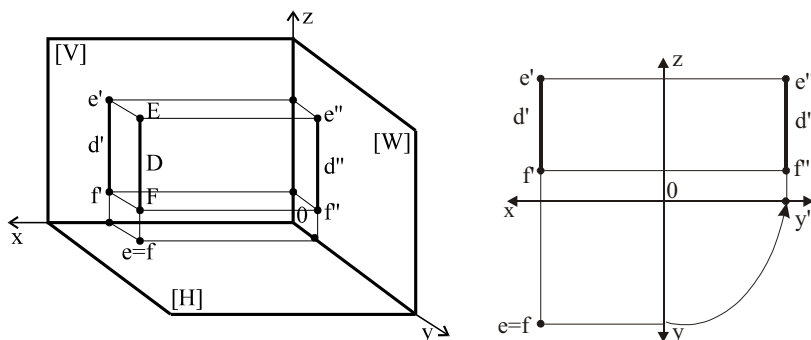


Fig. 3.5

Dreapta de capăt – dreapta perpendiculară pe $[V]$. Punctele ce o definesc au abscisele și cotele egale. Proiecția verticală se reduce la un punct iar proiecțiile orizontală și laterală sunt perpendiculare pe $\overrightarrow{Ox}$ și pe $\overrightarrow{Oz}$, Fig. 3.6;

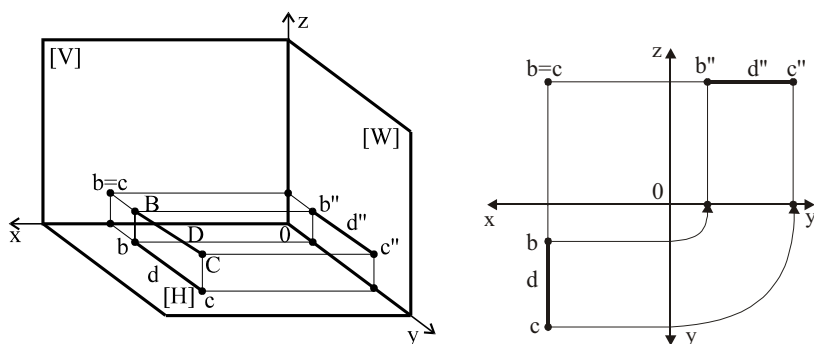


Fig. 3.6

Dreapta fronto-orizontală – dreapta perpendiculară pe $[W]$, dar și paralelă cu $[H]$ și $[V]$; este simultan o dreaptă de nivel și o dreaptă frontală. Punctele ce o definesc vor avea aceleași cote și depărtări.

Proiecția laterală se reduce la un punct, Fig. 3.7;

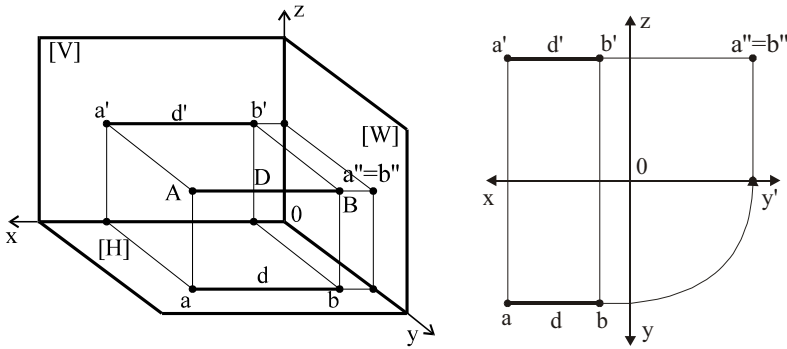


Fig. 3.7

3.2.3 Drepte conținute în planele de proiecție:

Dreapta conținută în planul orizontal $[H]$ – orizontala de cotă zero.

Proiecția orizontală se confundă cu însăși dreapta; proiecțiile verticală și laterală se suprapun pe axele de proiecție $\overrightarrow{Ox}$ și $\overrightarrow{Oy}$, Fig. 3.8;

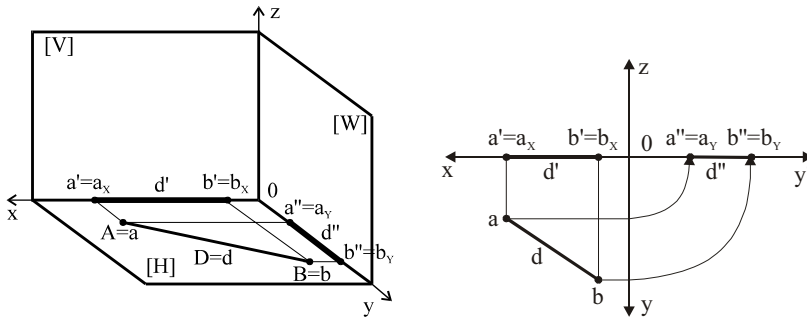


Fig. 3.8

Dreapta conținută în planul vertical $[V]$ – frontala de depărtare zero.

Proiecția verticală se confundă cu însăși dreapta; proiecțiile orizontală și laterală se suprapun pe axele de proiecție $\overrightarrow{Ox}$ și $\overrightarrow{Oz}$, Fig. 3.9;

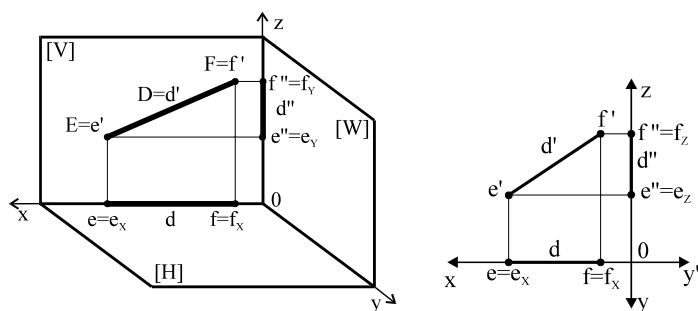


Fig. 3.9

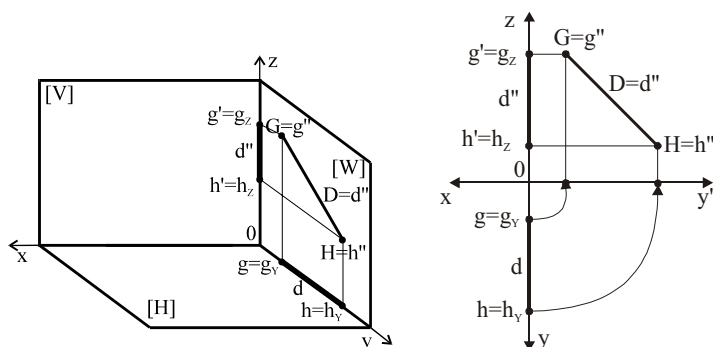


Fig. 3.10

Dreapta conținută în planul lateral [W] – dreapta de profil cu abscisele zero. Proiecția laterală se confundă cu dreapta iar proiecțiile orizontală și verticală se suprapun pe axele de proiecție $\overrightarrow{Oy}$ și $\overrightarrow{Oz}$, Fig. 3.10.

3.2.4 Drepte ce coincid cu una din axele de proiecție

O dreaptă ce coincide cu una din axele de proiecție va avea proiecțiile ei pe planele adiacente, confundate chiar cu axa respectivă, în timp ce proiecția pe cel de al treilea plan se va reduce la un punct ce se confundă cu originea axelor. Denumirile și proprietățile unor astfel de drepte sunt aceleași ca și pentru dreptele perpendiculare pe unul din planele de proiecție (verticala, fronto - orizontala și dreapta de capăt). Aceste drepte și epurele lor sunt prezentate în Fig. 3.11.

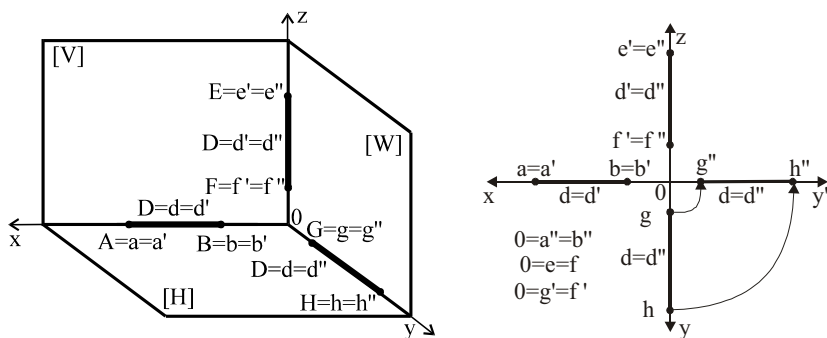


Fig. 3.11

3.3 Poziția relativă a două drepte

3.3.1 Drepte paralele

Două drepte paralele în spațiu vor avea proiecțiile de același nume paralele între ele. Reciproc: dacă proiecțiile de același nume a două drepte din spațiu pe fiecare din planele de proiecție sunt paralele între ele, rezultă că și dreptele din spațiu vor fi paralele între ele. Desenul și epura a două drepte paralele este prezentat în Fig. 3.12.

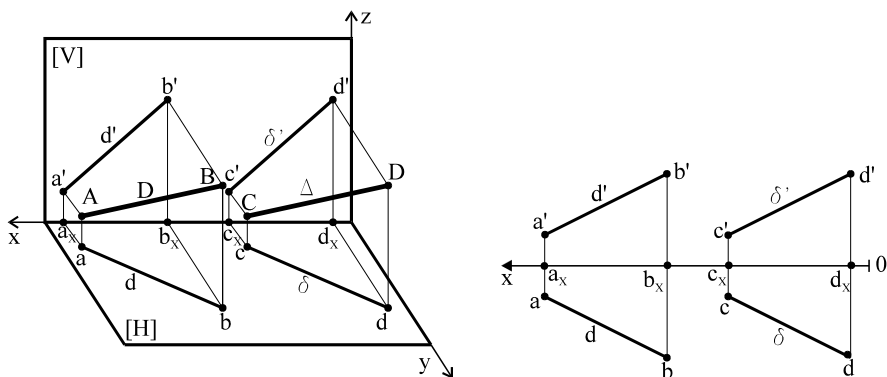


Fig. 3.12

3.3.2 Drepte concurente

Două drepte din spațiu vor fi concurente dacă proiecțiile lor de același nume se intersectează, iar proiecțiile punctului de concurență se vor

afla pe aceeași linie de ordine. Desenul și epura a două drepte concurente este prezentat în Fig. 3.13.

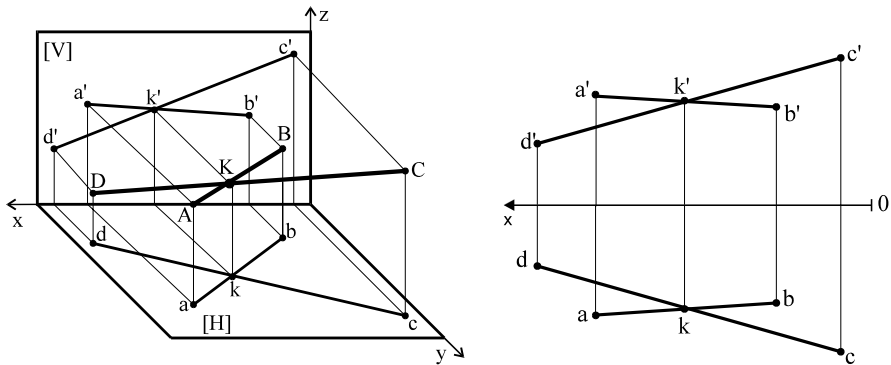


Fig. 3.13

3.3.3 Drepte disjuncte (necoplanare, oarecare)

Dacă într-o epură punctele de concurență a proiecțiilor de același nume a două drepte nu se găsesc pe aceeași linie de ordine, dreptele din spațiu nu sunt concurente și nici nu îndeplinesc condiții de neparalelism, înseamnă că ele sunt situate în plane diferite. Desenul și epura a două drepte oarecare este prezentat în Fig. 3.14.

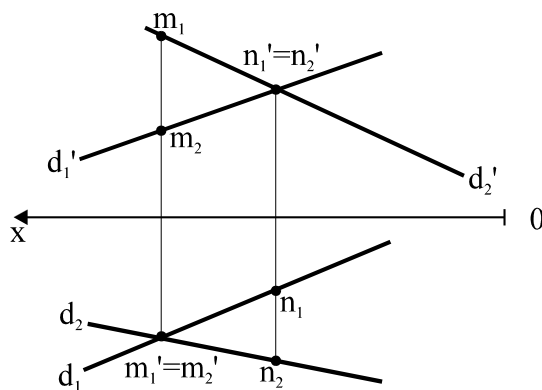


Fig. 3.14

4. PLANUL

4.1 Reprezentarea și urmele planului

Un plan poate fi determinat de:

- trei puncte necoliniare, Fig. 4.1;

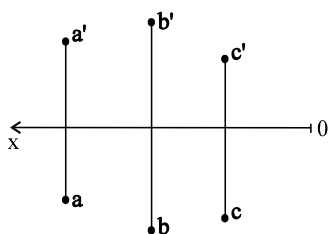


Fig. 4.1

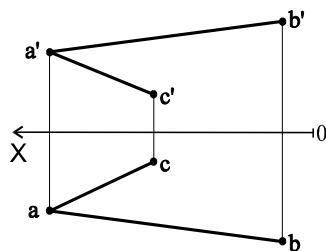


Fig. 4.2

- două drepte concurente, Fig. 4.2;
- două drepte paralele, Fig. 4.3;

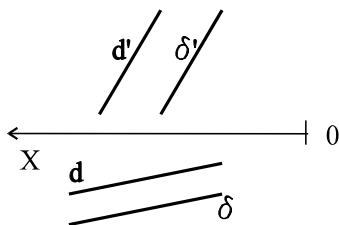


Fig. 4.3

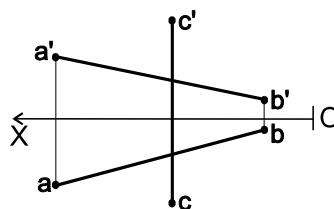


Fig. 4.4

- o dreaptă și un punct exterior dreptei, Fig. 4.4.

Urmele planului sunt dreptele de intersecție ale planului proiectat $[P]$ cu cele trei plane de proiecție $[H]$, $[V]$ și $[W]$.

- *urma orizontală* – se notează cu $P_h P_x$, este o dreaptă comună a planului $[P]$ și a planului orizontal de proiecție $[H]$;
- *urma verticală* – se notează cu $P_v P_x$, este o dreaptă comună planului $[P]$ și a planului vertical de proiecție $[V]$;
- *urma laterală* – se notează $P_w P_y$, este o dreaptă comună a planului $[P]$ și a planului lateral de proiecție $[W]$.

În Fig. 4.5 sunt reprezentate în desen și în epură cele trei urme ale planului proiectat [P].

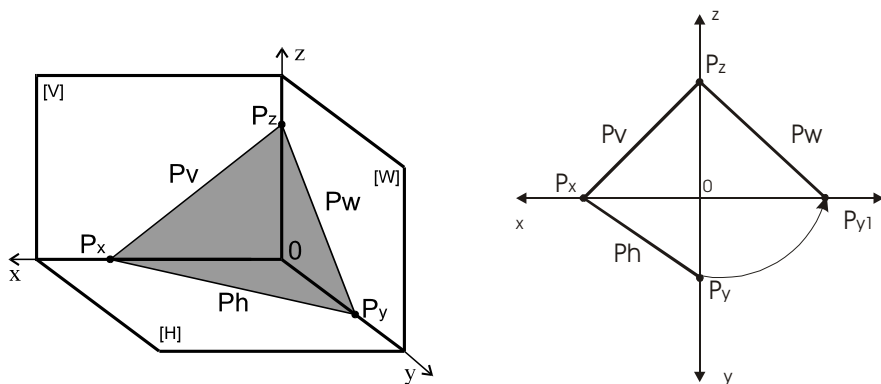


Fig. 4.5

4.2 Pozițiile planului în raport cu planele de proiecție

4.2.1 Plan de poziție generală

Acest plan se intersectează cu cele trei plane de proiecție și taie cele trei axe. Urmele unui astfel de plan pot forma cu axele de proiecție unghiuri ascuțite sau obtuze, Fig. 4.6.

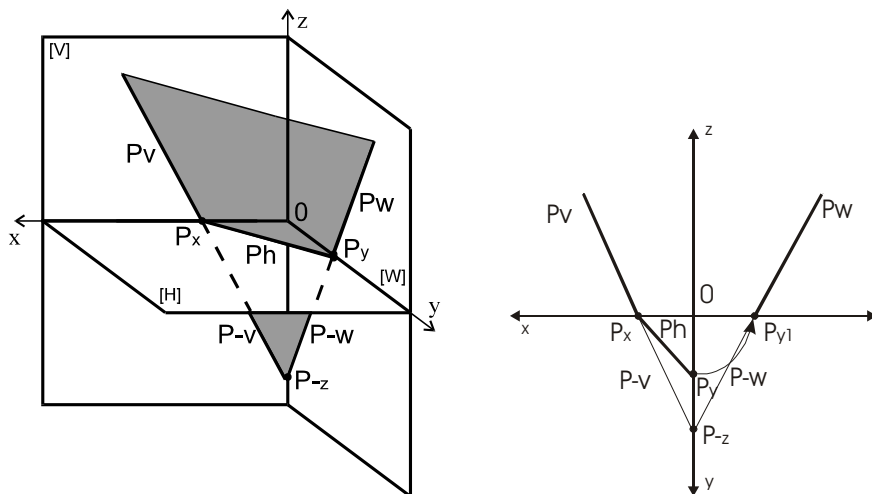


Fig. 4.6

4.2.2 Plane proiectante (perpendiculare) pe unul din planele de proiecție

- plan proiectant față de planul orizontal de proiecție $[H]$ – urma orizontală a planului $[P]$ este o dreaptă oarecare a planului orizontal de proiecție $[H]$, Fig. 4.7.

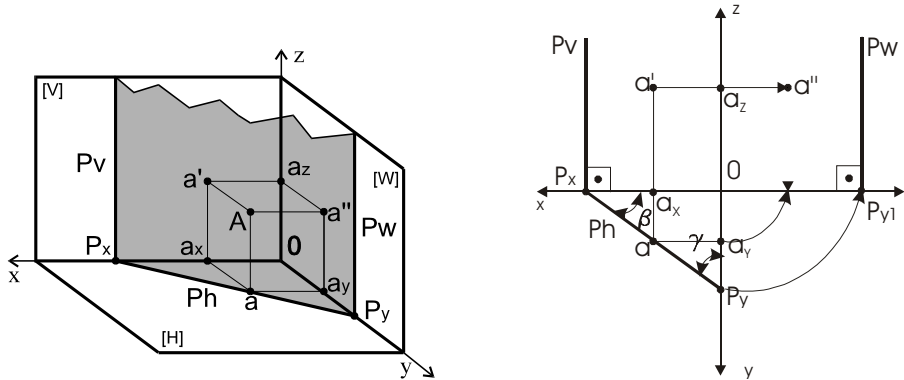


Fig. 4.7

- plan proiectant față de planul vertical de proiecție $[V]$ – urma verticală a planului $[Q]$ (perpendicular pe planul de proiecție $[V]$), poate fi în orice poziție, Fig. 4.8.

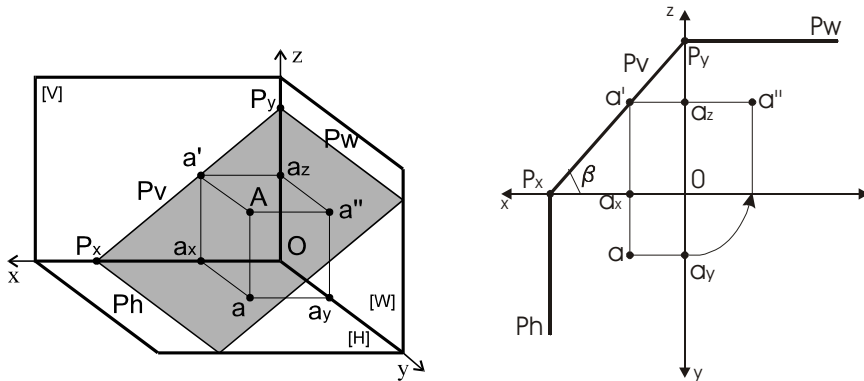


Fig. 4.8

- plan proiectant față de planul lateral de proiecție $[W]$ – Fig. 4.9.

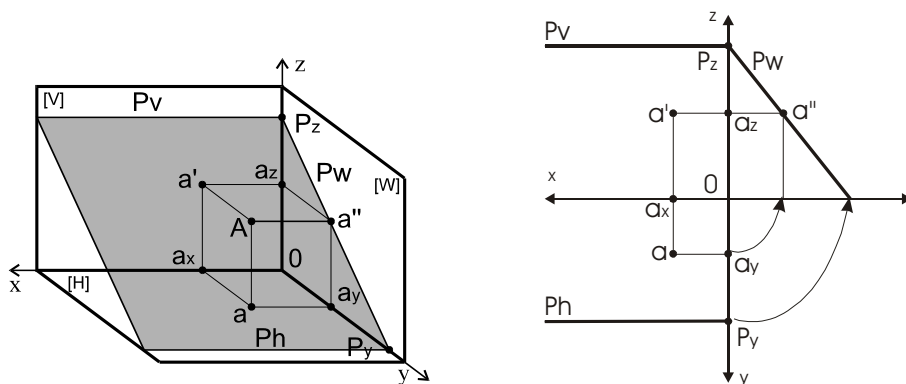


Fig. 4.9

4.2.3 Plane paralele cu un plan de proiecție și perpendiculare pe celelalte două

- *Planul de front* – paralel cu planul vertical de proiecție $[V]$, are urma orizontală paralelă cu Ox și cea laterală paralelă cu Oz . Depărtările tuturor punctelor planului sunt egale cu depărtarea tăieturii Fy de pe axa Oy , iar Fh este paralelă cu Ox și Fl paralelă cu Oz . Orice figură geometrică situată în acest plan se proiectează în adevărata formă și mărime pe planul vertical de proiecție $[V]$ și total deformată pe planele de proiecție orizontal $[H]$ și lateral $[W]$. În *epură* prezintă numai urmă orizontală, Fig. 4.10.

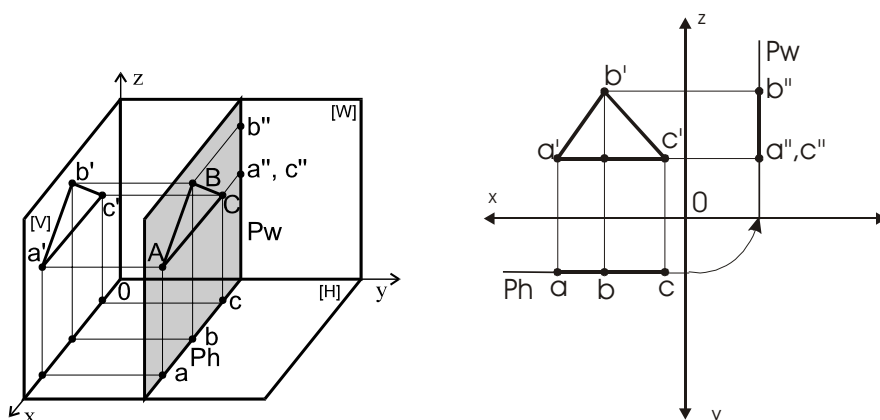


Fig. 4.10

- *Planul de nivel* – paralel cu planul orizontal de proiecție $[H]$, are urma verticală paralelă cu Ox și cea laterală paralelă cu Oy . Depărtările tuturor punctelor planului sunt egale cu depărtarea tăieturii Fz de pe axa Oz , iar Fv este paralelă cu Ox și Fl este paralelă cu Oy . Orice figură geometrică situată în acest plan se proiectează în adevărata formă și mărime pe planul orizontal de proiecție $[H]$ și total deformată pe planele de proiecție vertical $[V]$ și lateral $[W]$. În epură prezintă numai urmă verticală, Fig. 4.11.

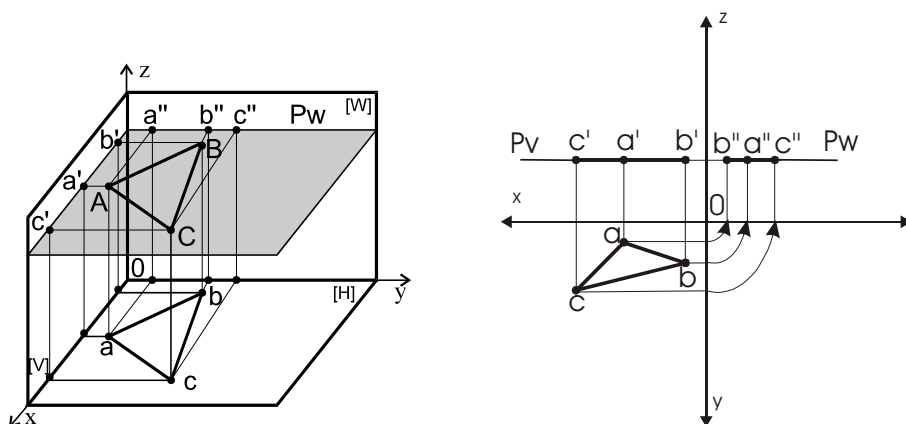


Fig. 4.11

- *Planul de profil* – paralel cu planul lateral de proiecție $[W]$, are urma orizontală paralelă cu Oy și urma verticală paralelă cu Oz . Depărtările tuturor punctelor planului sunt egale cu depărtarea tăieturii Fx de pe axa Ox , iar Fh este paralelă cu Oy și Fv este paralelă cu Oz . Orice figură geometrică situată în acest plan se proiectează în adevărata formă și mărime pe planul lateral de proiecție $[W]$ și total deformată pe planele de proiecție vertical $[V]$ și orizontal $[H]$. În epură prezintă numai urmă laterală, Fig.4.12.

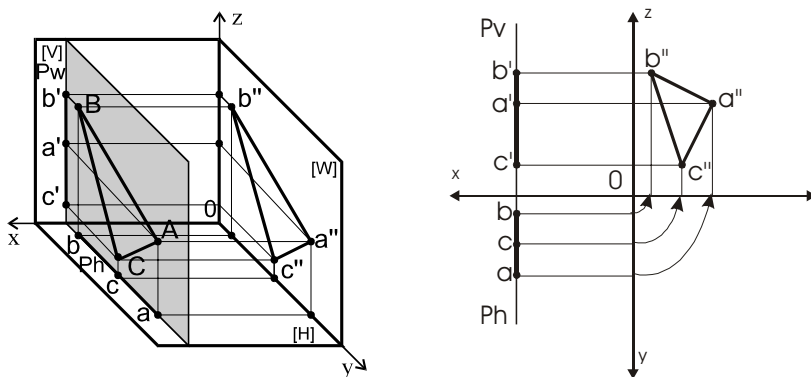


Fig. 4.12

4.3 Drepte particulare ale planului

4.3.1 Orizontala planului

Este o dreaptă conținută într-un plan oarecare $[P]$ și paralelă cu planul orizontal de proiecție $[H]$. Proiecția ei verticală este paralelă cu Ox și se sprijină pe urma verticală $P'P_x$. Proiecția orizontală este paralelă cu urma orizontală PP_x a planului. Toate orizontalele unui plan sunt paralele între ele, deci au proiecțiile de același nume paralele între ele. Desenul și epura sunt prezentate în Fig. 4.13.

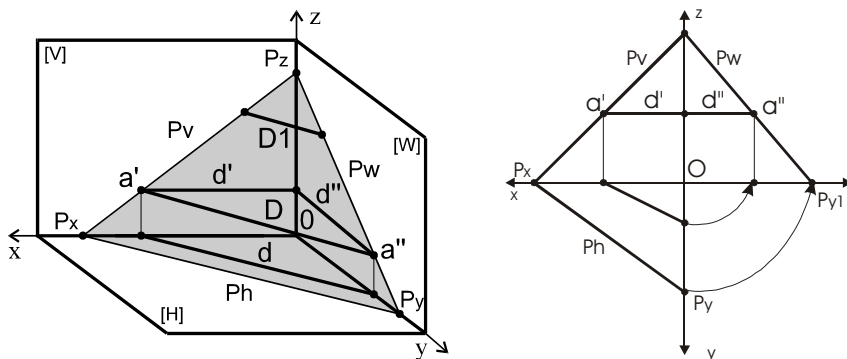


Fig. 4.13

4.3.2 Frontala planului

Este o dreaptă conținută într-un plan oarecare $[P]$ și paralelă cu planul vertical de proiecție $[V]$. Proiecția orizontală este paralelă cu axa Ox

și se sprijină pe urma orizontală PP_x , iar proiecția verticală a dreptei este paralelă cu urma verticală a planului $P'P_x$. Toate frontalele unui plan sunt paralele între ele, deci au proiecțiile de același nume paralele între ele. Desenul și epura sunt prezentate în Fig. 4.14.

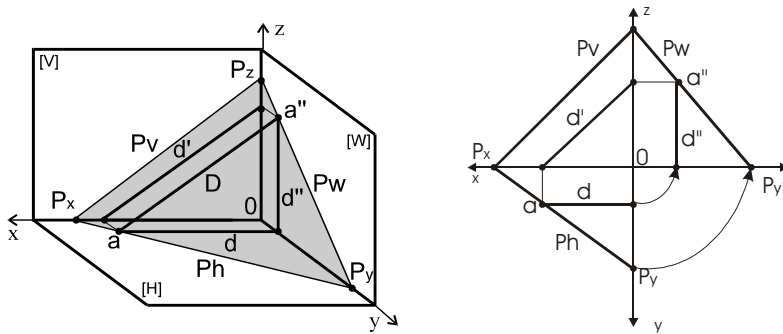


Fig. 4.14

4.3.3 Dreapta de profil a unui plan

Este o dreaptă a planului $[P]$ și paralelă cu planul lateral de proiecție $[W]$. Proiecția laterală este paralelă cu urma laterală a planului. Celelalte două proiecții (orizontală și verticală) sunt paralele cu axele secundare de proiecție Oz și Oy , Fig. 4.15.

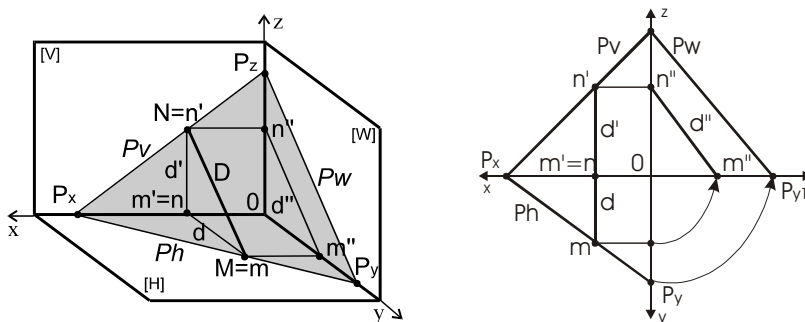


Fig. 4.15

4.3.4 Dreapta de cea mai mare pantă

Este o dreaptă a planului $[P]$, perpendiculară pe toate orizontalele acestuia, deci și pe urma lui orizontală. Proiecția ei orizontală vh este

perpendiculară pe urma orizontală a planului, iar proiecția verticală $v'h'$ apare ca în desen, Fig. 4.16. Fiind dată o dreaptă de cea mai mare pantă a unui plan, se pot determina urmele planului, conform epurei din Fig. 4.16.

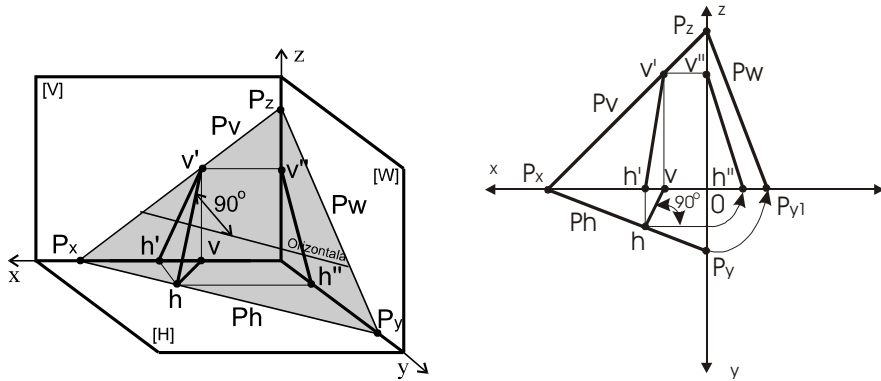


Fig. 4.16

4.3.5 Drepte de cea mai mare înclinație

Este o dreaptă a planului $[P]$, perpendiculară pe toate frontalele planului, deci și pe urma lui verticală. Ca urmare, proiecția verticală, $v'h'$, a dreptei de cea mai mare înclinație, este perpendiculară pe urma verticală, $P'P_x$ a planului, iar proiecția orizontală apare așa cum iese din Fig. 4.17.

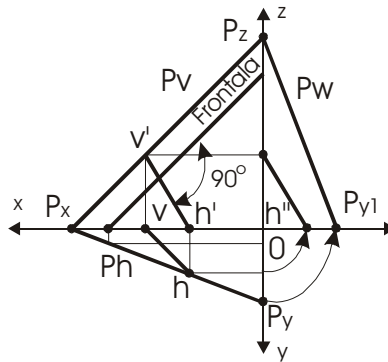


Fig. 4.17

4.4 Pozițiile relative a două plane

4.4.1 Plane concurente

Pentru a arăta că două plane sunt concurente trebuie aflată dreapta de intersecție a acestora pentru care este suficient să se găsească două

puncte care să aparțină celor două plane. Atunci când planele sunt date prin urme și urmele de același nume se intersectează în cadrul desenului, intersecția urmelor de același nume reprezintă chiar urmele dreptei de intersecție a planului, Fig. 4.18.

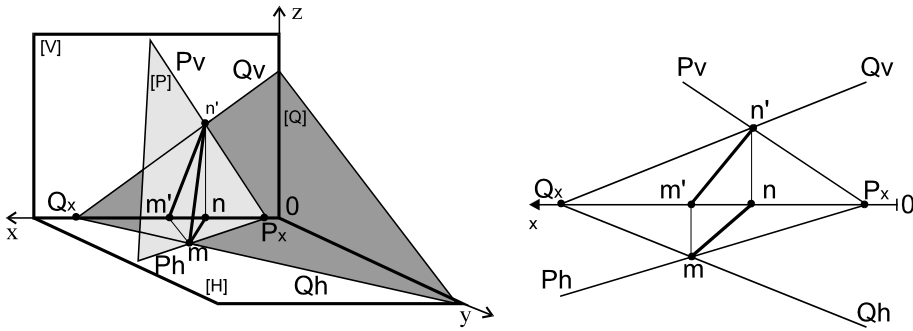


Fig. 4.18

4.4.2 Plane paralele

Pentru a arăta că cele două plane sunt paralele, trebuie verificat dacă unul dintre plane are două drepte paralele cu două drepte din celălalt plan. Dacă se consideră două plane paralele, cu orice plan ar fi tăiate acestea, dreptele de intersecție rezultate sunt tot paralele. În caz particular, tăiate cu plane de proiecție, urmele lor de același nume sunt paralele și viceversa. Dacă urmele de același nume a două plane sunt paralele, atunci și planele sunt paralele, Fig. 4.19.

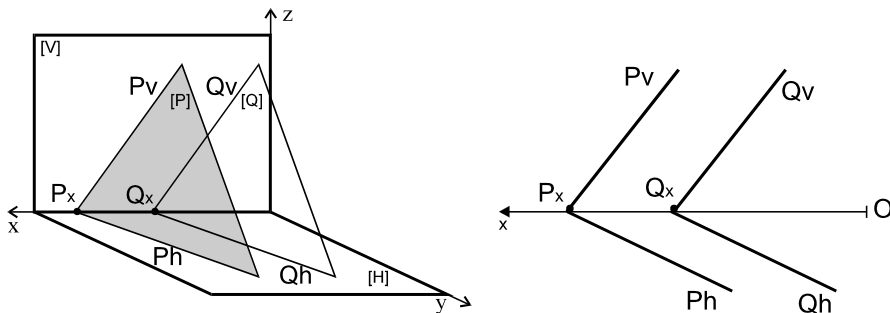


Fig. 4.19

5. INTERSECȚIA DE PLANE ȘI PLĂCI

5.1 Vizibilitate

În aplicațiile prezentate se consideră punctul, dreapta și planul ca fiind opace; se pune problema stabilirii în epură a elementelor vizibile și a celor invizibile, în cazul în care proiecțiile lor se suprapun.

Față de planul de proiecție $[H]$, dintre două puncte este întotdeauna vizibil cel care are cota mai mare (Fig. 5.1 a). Față de planul de proiecție $[V]$, dintre două puncte este întotdeauna vizibil cel care are depărtarea mai mare (Fig. 5.1 b). Față de planul de proiecție $[W]$, dintre două puncte este întotdeauna vizibil cel care are abscisa mai mare (Fig. 5.1 c).

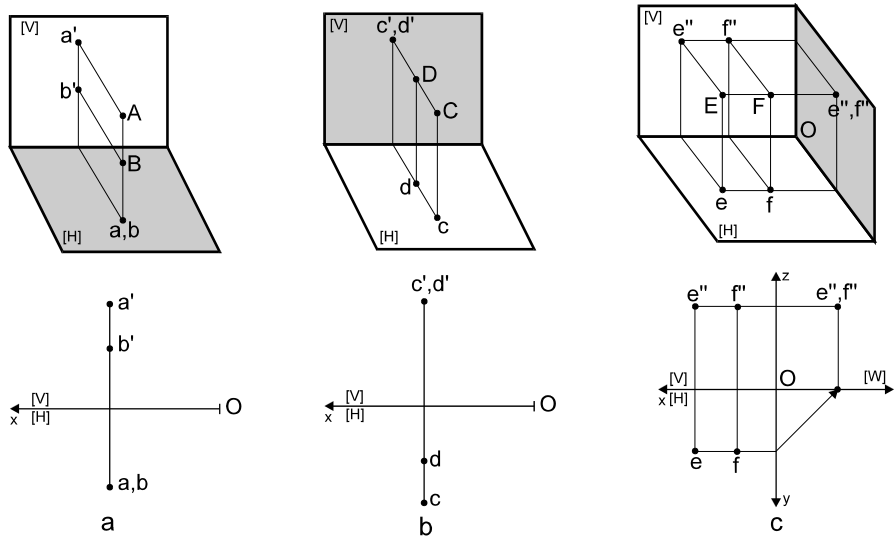


Fig. 5.1

5.2 Intersecția figurilor plane

În cazul intersecției a două figuri plane, pentru determinarea liniei lor de intersecție se pot utiliza două soluții:

- se consideră cele două figuri ca două plane ale căror urme nu se întâlnesc în cadrul epurei;

- se consideră laturile unei figuri (plăci) ca niște drepte ce intersectează cealaltă placă.

5.2.1 Intersecția unei drepte cu o placă triunghiulară

Se consideră placa triunghiulară ABC dată prin proiecția vârfurilor sale: $A(a, a')$, $B(b, b')$ și $C(c, c')$, precum și dreapta RS ($rs, r's'$) ce o intersectează. Pentru determinarea punctului unde dreapta RS intersectează placa ABC se va duce prin dreaptă un plan auxiliar, adică un plan proiectant (vertical $[Q]$ sau de capăt). Astfel $[Q] \equiv rs$ și $Qv \perp Qx$ în Qx . Planul vertical Q intersectează placa ABC după dreapta definită de punctele $(k, k') \in AC$ și $(l, l') \in CB$. Punctul $T(t, t')$ unde dreapta $(kl, k'l')$ intersectează dreapta RS reprezintă punctul de intersecție căutat. S-a determinat în primul rând proiecția verticală (t') a acestui punct și apoi prin linie de ordine corespunzătoare și proiecția sa orizontală $t \in RS \equiv QH$.

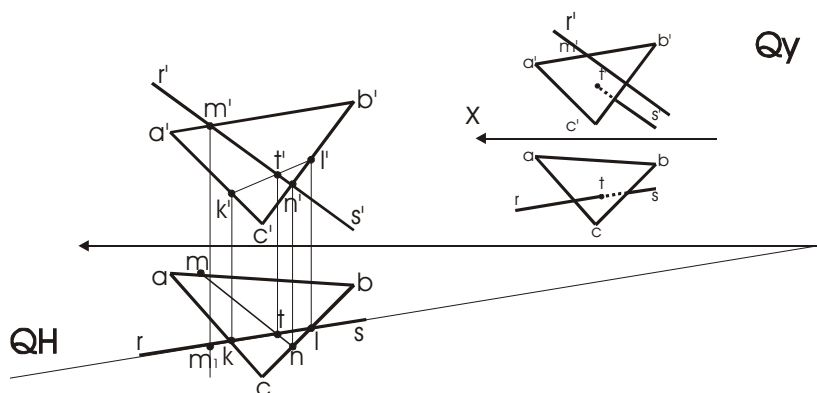


Fig. 5.2

5.2.2 Intersecția a două plane definite de urmele lor

Intersecția a două plane este o dreaptă. Este suficient să cunoaștem două puncte ale dreptei sau punctele de intersecție A și B ale celor două urme de același nume aparținând fiecărui plan.

În epură proiectăm pe Ox pe a' în a și pe b în b' ; rezultă că ab și $a'b'$ sunt proiecțiile intersecției a două plane, Fig. 5.3.

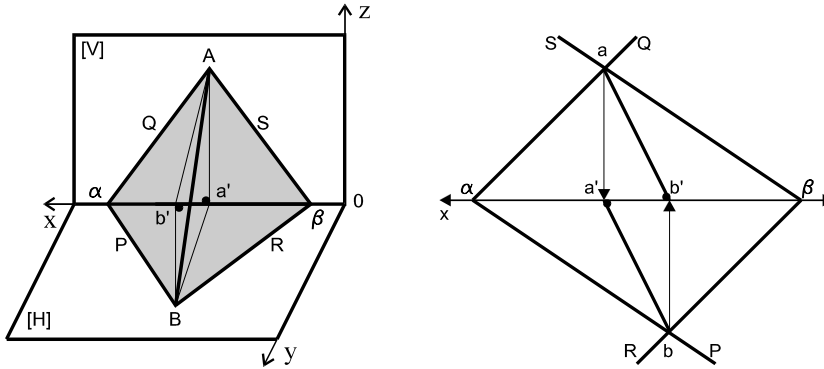


Fig. 5.3

5.3 Intersecția a două plăci

Intersecția a două plăci prezintă două variante: PĂTRUNDEREA și SMULGEREA.

5.3.1 Patrunderea – se întâlnește atunci când o placă intră complet în cealaltă.

Avem o placă triunghiulară ABC și o placă patrulateră $DEFG$, ambele date prin proiecțiile vârfurilor. Se cere să se stabilească proiecțiile liniei de intersecție dintre aceste două plăci și să se determine vizibilitatea.

Se consideră laturile unei plăci ca niște drepte ce intersectează cealaltă placă și, prin urmare, se va aplica metoda generală de determinare a punctului unde o dreaptă intersectează un plan. S-a dus prin latura AB ($ab, a'b'$) un plan proiectant (planul de capăt) $[P]$, care a determinat punctul (α, α'), iar planul de capăt $[R]$ dus prin latura AC , va determina punctul (β, β'). Unindu-se proiecțiile de același nume ale acestor două puncte astfel determinate, se vor obține cele două proiecții ale dreptei de intersecție, Fig.5.4.

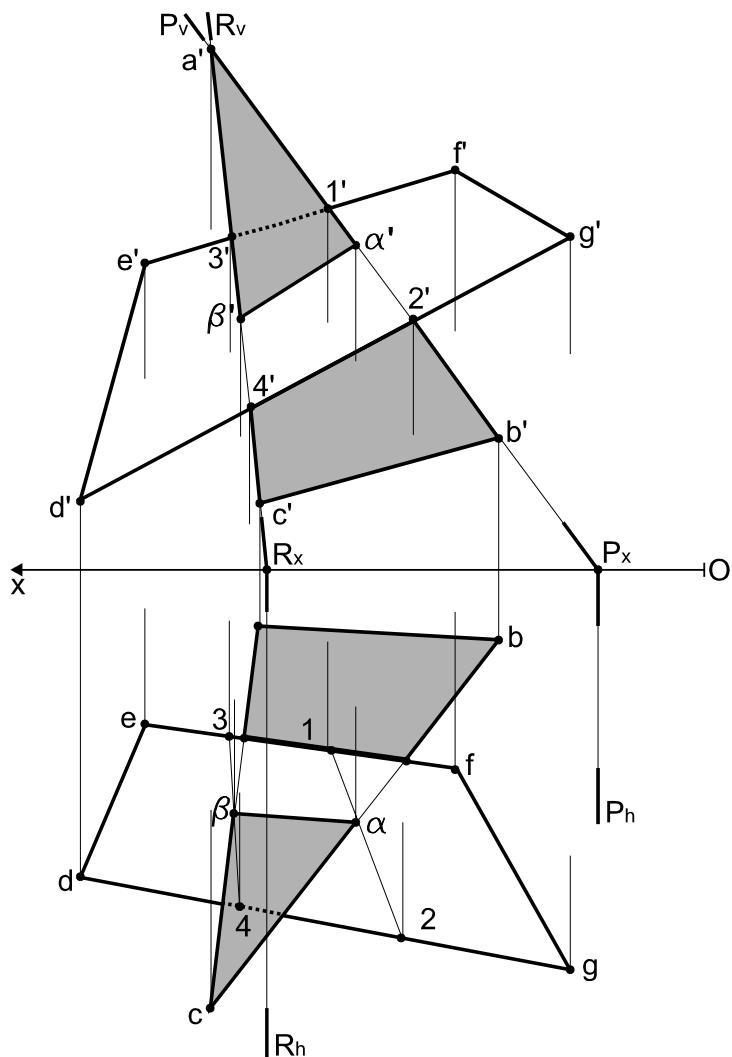


Fig. 5.4

5.3.2 Smulgerea (ruperea) – se întâlnește atunci când o placă pătrunde parțial în cealaltă placă.

Se consideră plăcile triunghiulare ABC și DEF date prin proiecțiile vârfurilor. Se utilizează planele proiectante (de capăt) $[P]$ și $[R]$ duse prin laturile DF și DE ale plăcii DEF . Din Fig. 5.5 se poate observa că placa DEF pătrunde parțial în placa ABC .

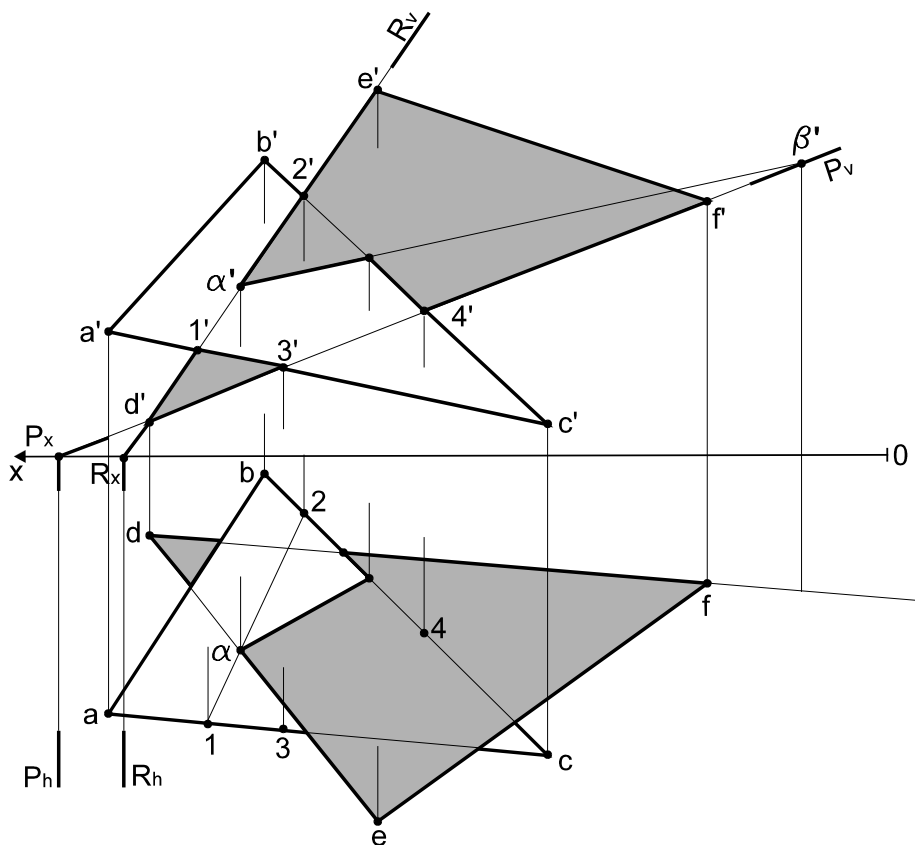


Fig. 5.5

5.3.3 Intersecția a două plăci triunghiulare

Deoarece două plane se intersectează după o dreaptă, linia de intersecție a două poligoane convexe limitate este un *segment* de dreaptă. Pentru aflarea acestui segment, este suficient să se găsească cele două capete ale sale, adică două puncte, fiecare dintre ele fiind punctul de intersecție al conturului unei figuri cu planul celeilalte figuri.

În problema intersecției a două plăci triunghiulare, putem deosebi trei cazuri principale:

- a) două laturi ale unei plăci intersectează cea de-a doua placă, Fig.5.6a;
- b) o latură a primei plăci intersectează cea de-a doua placă și o latură a celei de-a doua plăci intersectează prima placă, Fig. 5.6 b;
- c) nici o latură a unei plăci nu intersectează cealaltă placă, Fig. 5.6 c.

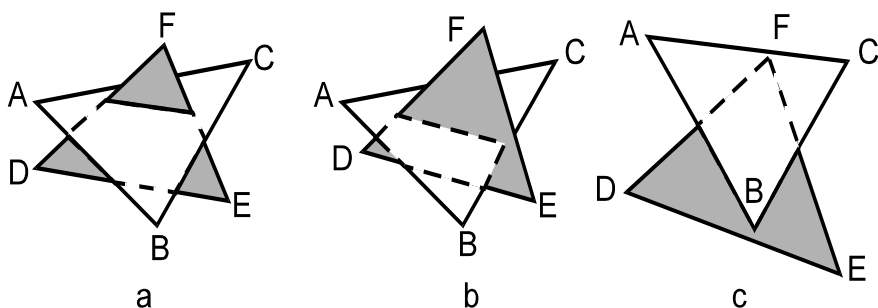


Fig. 5.6

În afara acestor cazuri principale, pot exista și următoarele cazuri speciale:

- a) vârful unei plăci se află în planul celei de-a doua plăci, Fig. 5.7 a;
- b) vârful unei plăci se află pe o latură a celei de-a doua plăci, Fig. 4.7b;
- c) latura unei plăci intersectează latura celeilalte plăci, Fig. 4.7 c.

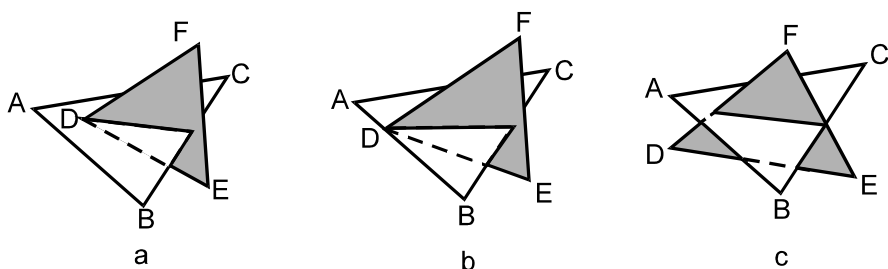


Fig. 5.7

6. METODELE GEOMETRIEI DESCRIPTIVE

Prin metodele Geometriei Descriptive se realizează transformarea proiecțiilor elementelor geometrice, din pozițiile inițiale date, în alte poziții mai avantajoase pentru rezolvarea unor probleme. Măsurarea unei distanțe, suprafețe sau a unui unghi se poate face pe o proiecție în care elementul ce trebuie măsurat se găsește în adevărata mărime. Dacă acestea sunt proiectate deformat este necesară aflarea mărimii lor reale. În general este necesară fie o modificare a sistemului de referință (plan de proiecție) fie o modificare a poziției din spațiu, a elementului geometric pentru a obține adevărata lui mărime de proiecție.

Metodele geometriei descriptive de transformare a proiecțiilor sunt:
metoda schimbării planelor de proiecție și metoda rotației, cu un caz particular al acesteia – **rabaterea**.

6.1 Metoda schimbării de plan

6.1.1 Generalități

Prin metoda schimbării de plan se aduce un plan de proiecție în poziție de paralelism sau perpendicularitate față de elementul geometric studiat, păstrând totodată și condiția de perpendicularitate față de unul dintre cele două plane de proiecție. Din tripletul imaginilor epurei, la schimbarea unui plan de proiecție rămâne neschimbată o singură proiecție.

6.1.2 Metoda schimbării de plan orizontal de proiecție

Transformarea proiecțiilor unui punct prin schimbare de $[H]$, Fig. 6.1.

Fie un punct $M(m, m')$; dacă se ia un nou plan de proiecție $[H_1] \perp [V]$, se obține noua axă de proiecție $(O_1X_1) \Rightarrow [H_1] \cap [V]$.

Linia de ordine dusă din M , perpendiculară pe $[H_1]$, determină noua proiecție orizontală a punctului, m_1 , depărtarea y rămânând aceeași ca valoare. În epură, față de noua axă de proiecție O_1x_1 , se determină noua proiecție orizontală m_1 , la aceeași depărtare y , pe linia de ordine dusă din $m'_1 \equiv m'$.

În schimbarea de plan orizontal de proiecție pentru un punct, proiecția verticală și depărtarea sunt elemente invariabile, proiecția orizontală și cota sunt elemente variabile.

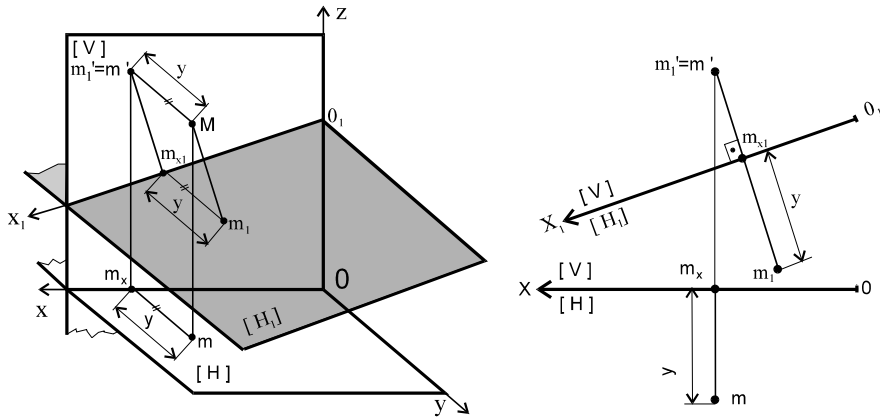


Fig. 6.1

Transformarea proiecțiilor unei drepte prin schimbare de $[H]$, Fig. 6.2.

Se efectuează prin transformarea proiecțiilor a două puncte conținute de dreaptă. Dreapta $D(d, d')$, în noul reper $[H_1, V]$, devine $D_1(d_1, d'_1)$ păstrându-se neschimbată proiecția verticală $d'_1 \equiv d'$. se face schimbarea de $[H]$ pentru două puncte conținute de dreaptă, $A(a, a') \wedge B(b, b') \subset D(d, d')$, care își păstrează depărtarea în noul reper.

Noua proiecție orizontală a dreptei se determină unind punctele a_1 și b_1 ;

$$d_1 \subset a_1 \wedge b_1$$

În schimbarea de plan vertical de proiecție pentru un punct, proiecția orizontală și cota sunt elemente invariabile, proiecția verticală și depărtarea sunt elemente variabile.

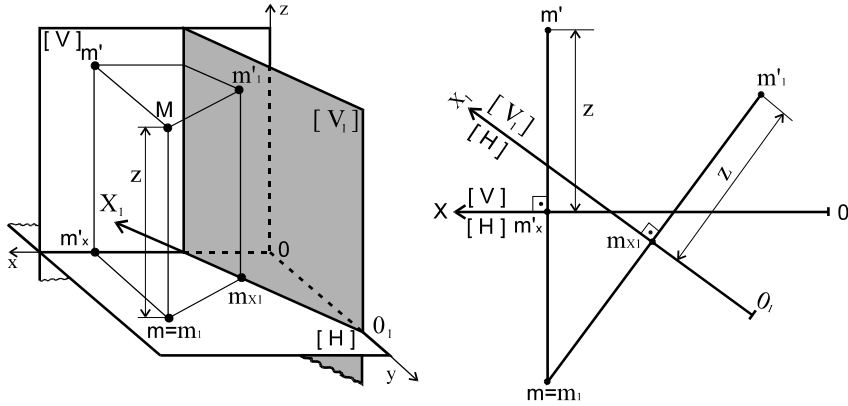


Fig. 6.4

Transformarea proiecțiilor unei drepte prin schimbare de $[V]$, Fig. 6.5.

Dreapta $D(d, d')$, din reperul $[H, V]$, devine $D_1(d_1, d'_1)$, $d_1 \equiv d$, în noul reper $[H, V_1]$. Pentru determinarea d'_1 se face schimbarea de $[V]$ pentru punctele $A(a, a') \wedge B(b, b') \in (D)$; $d'_1 \subset a'_1 \wedge b'_1$.

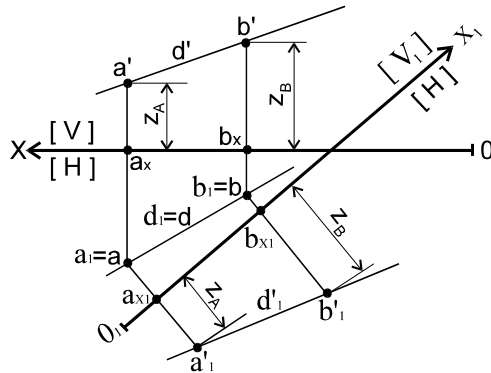


Fig. 6.5

Transformarea proiecțiilor unui plan $[P]$ prin schimbare de $[V]$, Fig. 6.6.

Are ca elemente invariabile urma orizontală $P_H \equiv P_{H1}$ și cota unui punct I conținut de $[P]$, $[V]$ și $[V_1]$; $i \equiv i_1$. Se schimbă urma verticală a planului, p'_V în p'_{V1} . În epură, $I(i, i') \Rightarrow Ox \cap O_{1x1}$; $p_{x1} \Rightarrow Ox_1 \cap P'_H \equiv P'_{H1}$.

Se duce o perpendiculară în i' pe noua axă O_1x_1 , pe care se determină i , menținând aceeași cotă. Se trasează $p'_{v1} \supset p_{x1} \wedge i_1$. În noul reper $[H, V_1]$, planul $[P]$ devine $[P_1]$ (p_{H1}, p'_{v1}).

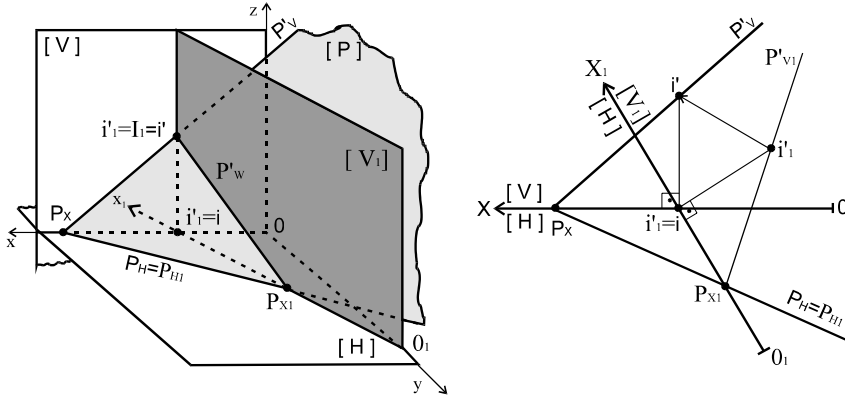


Fig. 6.6

6.2 Metoda rotației

6.2.1 Generalități

În metoda rotației planele de proiecție $[H]$ și $[V]$ rămân nemodificate, iar elementul geometric din spațiu își modifică poziția (prin rotire) până când ocupă o poziție particulară față de planele de proiecție, în general o poziție paralelă.

Rotația elementelor geometrice se face în jurul unei axe de rotație, care este o dreaptă perpendiculară pe unul din planele de proiecție. În cazul în care axa de rotație este o dreaptă oarecare, aceasta se duce, prin schimbare de plan, să fie perpendiculară pe unul din planele de proiecție.

Punctele se rotesc în plane perpendiculare pe axa de rotație. Dacă axa de rotație este o dreaptă verticală, deci perpendiculară pe $[H]$, punctele se rotesc în plane de nivel și rotația se numește: **rotație de nivel**.

Dacă axa de rotație este o dreaptă de capăt, deci perpendiculară pe $[V]$, punctele se rotesc în plane frontale și rotația se numește: **rotație de front**. Dacă axa de rotație este o dreaptă fronto-orizontală, deci

perpendiculară pe $[W]$, punctele se rotesc în plane de profil și rotația se numește: **rotație de profil**.

Fiecare punct în rotire se deplasează pe un cerc (Fig. 6.7) cu centrul în punctul de intersecție dintre axa de rotație și planul în care se rotește; s-a convenit ca să se noteze centrul de rotație cu $\Omega (\omega, \omega')$. Raza R a cercului este distanța de la axa de rotație la punctul rotit. Rotirea punctului se face într-un sens convenabil ales și de un unghi α dat.

6.2.2 Rotația de nivel

În rotația de nivel, axa $Z (z, z')$ este perpendiculară pe planul $[H]$, iar planul $[N]$ în care se rotește fiecare punct este plan de nivel. În consecință, pentru orice poziție a punctului A , giratorie în jurul axei $Z (z, z')$, **cota** punctului rămâne aceeași, deci: $z = \text{constant}$.

Rotația de nivel pentru un punct

Fie un punct $A (a, a')$, dat prin proiecții, care trebuie rotit de un unghi α . În Fig. 6.7 este reprezentată în spațiu și în epură rotația punctului $A (a, a')$, axa de rotație fiind dreapta $Z \perp [H]$ (dreaptă verticală). Planul în care se face rotația este $[N] \perp [Z]$, având cota egală cu cota punctului A .

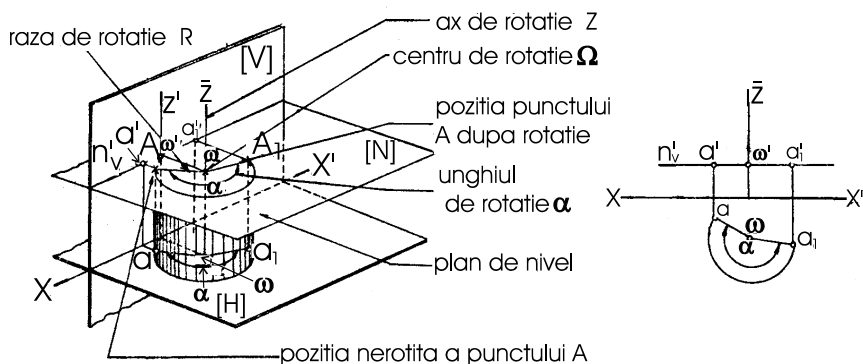


Fig. 6.7

Raza de rotație R este distanța de la $A(a, a')$ la $Z(z, z')$, $R = \Omega A$.
 Unghiul de rotație α este măsurat în sens trigonometric.

Rotația de nivel pentru o dreaptă și pentru un plan sunt prezentate în Fig.6.8 și Fig.6.9.

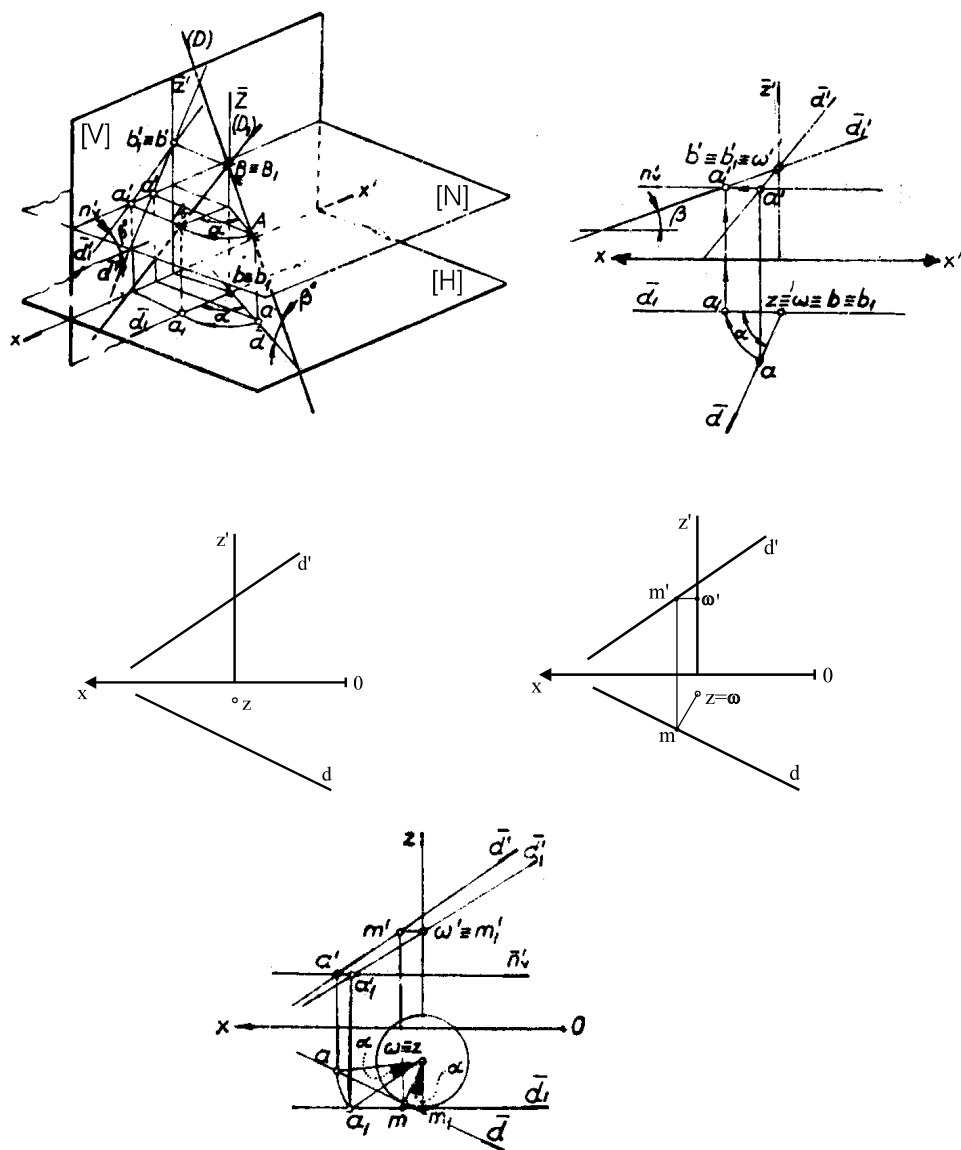


Fig. 6.8

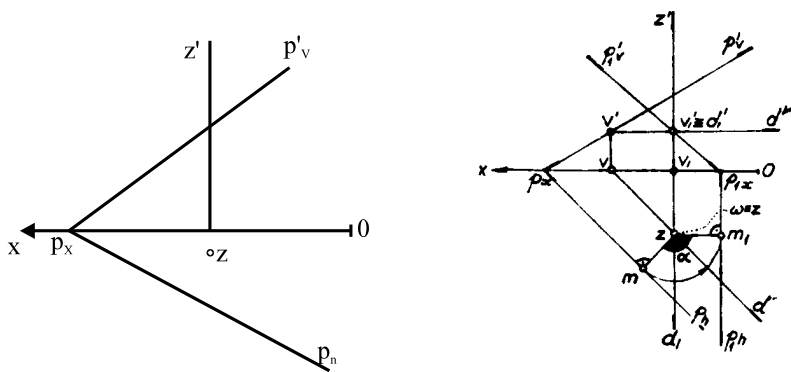


Fig. 6.9

6.2.3 Rotația de front

În rotația de front, axa Z (z, z') este perpendiculară pe planul $[V]$. Planul în care se rotește fiecare punct este perpendicular pe axa de rotație, deci, plan de front. Pentru oricare dintre pozițiile ocupate de un punct în rotirea lui în jurul axei, depărtarea rămâne aceeași, deci $z = \text{constant}$.

Rotația de front pentru un punct

Fie un punct A (a, a') dat prin proiecții, care trebuie rotit de un unghi α . În Fig. 6.10 este reprezentată în spațiu și în epură rotația de front pentru punctul A (a, a').

Axa de rotație Z (z, z') $\perp [V]$ este o dreaptă de capăt. Planul pe care se face rotația este $[F] \perp [Z]$, plan frontal.

Centrul de rotație Ω (ω, ω') = $(Z) \cap [F]$. Raza de rotație R este distanța de la A (a, a') la Z (z, z'), deci $R = \omega' a'$. Unghiul de rotație α se măsoară în sensul arătat în Fig. 6.10. Axa de rotație Z (z, z') intersectează planul $[F]$ în punctul Ω (ω, ω') care este și centru de rotație; proiecția $\omega' \equiv z'$.

Cercul situat în planul $[F]$, pe care se deplasează punctul A (a, a'), se proiectează în mărime reală pe planul $[V]$, deci unghiul $a' \omega' a_1'$ notat cu α_1 , se măsoară în planul $[V]$.

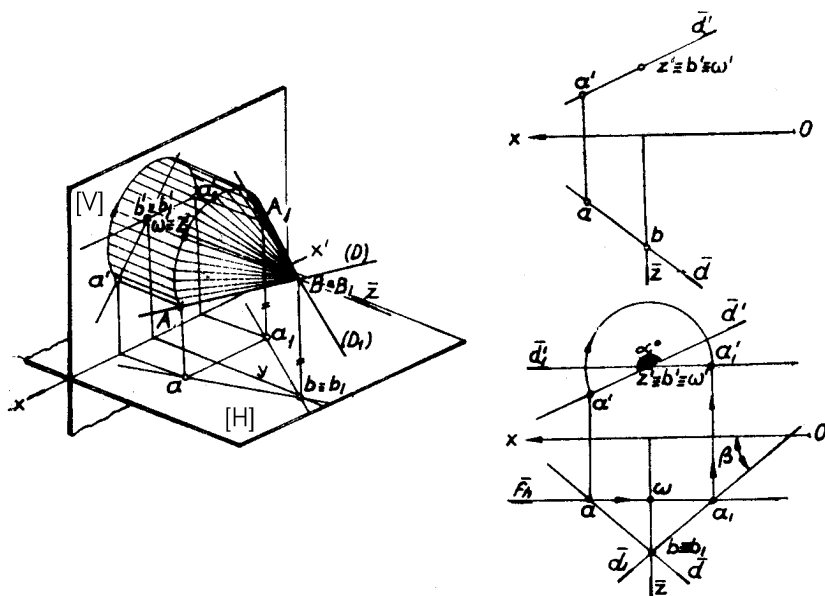


Fig. 6.11

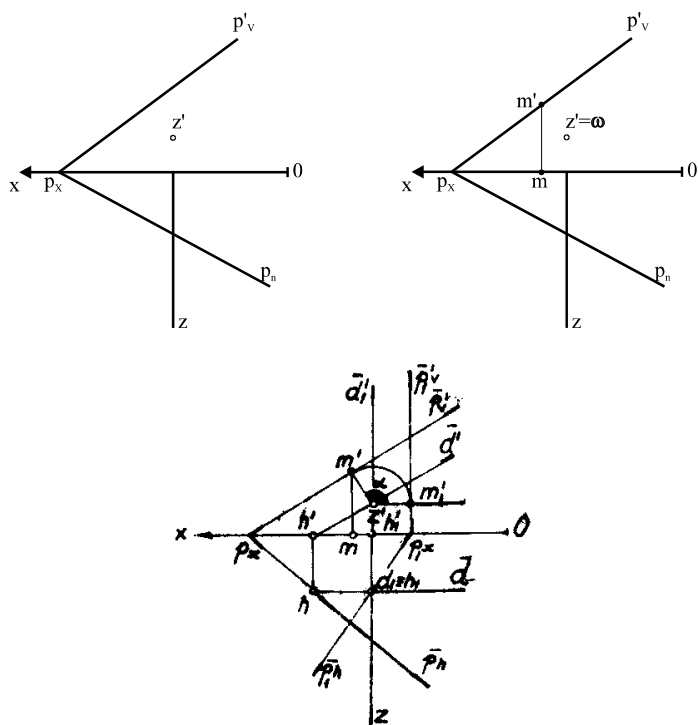


Fig. 6.12

6.2.4 Adeverata mărime a unei figuri plane prin metoda rotației

Se consideră placa triunghiulară ABC determinată prin proiecția vârfurilor sale: $A(a, a')$, $B(b, b')$ și $C(c, c')$. Se cere să se găsească, prin metoda rotației, adevărata mărime a plăcii ABC , Fig. 6.13.

Pentru ca placa triunghiulară ABC ($abc, a'b'c'$) să se proiecteze în adevărata mărime a plăcii pe unul din planele de proiecție, trebuie ca planul plăcii să devină paralel cu unul din planele de proiecție, adică să devină fie un plan de front, fie un plan de nivel.

S-a dus planul plăcii triunghiulare ABC astfel încât acesta să fie paralel cu planul orizontal de proiecție $[H]$, adică să devină un plan de nivel. Pentru aceasta va trebui să se facă două rotații.

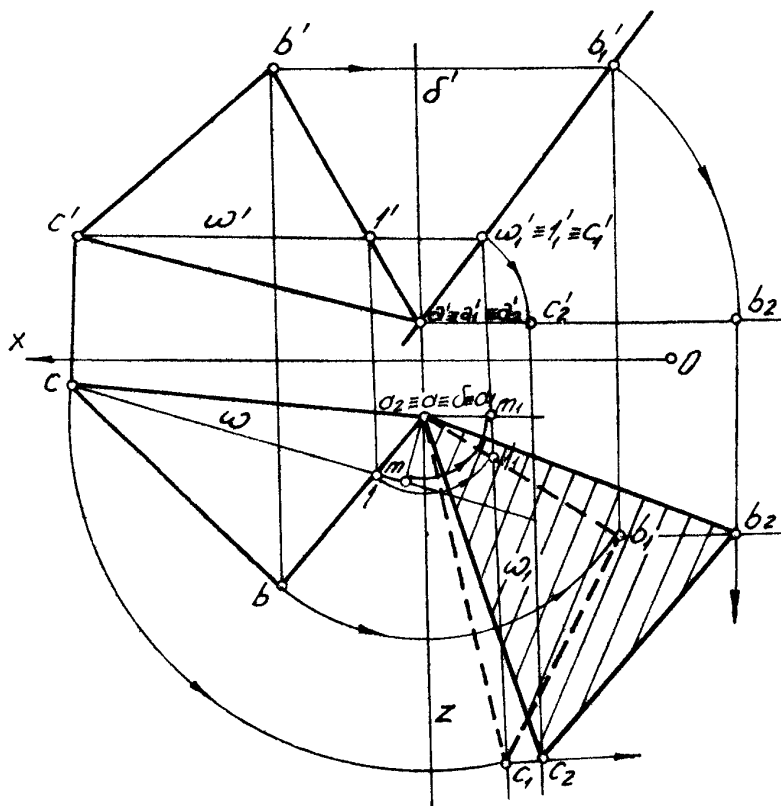


Fig. 6.13

Prima rotație. Se face o rotație de nivel în jurul verticalei $\Delta (\delta, \delta')$, aducându-se planul triunghiului în poziția plan de capăt.

Pentru simplificarea construcțiilor grafice, axul de rotație (δ, δ') a fost luat în așa fel încât să treacă printr-unul din vârfurile plăcii, de exemplu prin punctul $A (a, a')$ și în acest caz, acest punct va rămâne propriul său rotit.

Deci: $a_l \equiv a \wedge a'_l \equiv a'$.

Apoi, se duce în planul plăcii o orizontală $\Omega (\omega, \omega')$ care, tot pentru simplificarea construcțiilor grafice, s-a luat să treacă printr-unul din vârfurile plăcii, și anume prin $C (c, c')$. Deci, $\omega // Ox$ și va trece prin c' determinându-se astfel punctul $l' \subset ab$, dar și $l \subset ab$.

Se rotește această orizontală în jurul verticalei $\Delta (\delta, \delta')$ până ce devine perpendiculară pe Ox , adică dreapta de capăt $\Omega_l (\omega_l, \omega'_l)$. Rotația s-a făcut cu ajutorul perpendicularei comune δm . Apoi, s-au determinat punctele (l_l, l'_l) , respectiv (c_l, c'_l) . Se unește $a_l \equiv a$ cu c_l și l_l , rotindu-se apoi proiecția orizontală b a punctului B , până ce ajunge în $b_l \subset a_l l_l$. Unindu-se a_l cu b_l și cu c_l se va obține proiecția orizontală a plăcii triunghiulare ABC după rotire. Imediat se determină și proiecțiile lui verticale a'_l, b'_l și c'_l ; observându-se că ele sunt coliniare, fiind duse pe planul plăcii ABC ca să devină un plan de capăt (proiecția verticală a plăcii s-a redus la o dreaptă care se confundă cu urma verticală a planului de capăt care conține dreapta placa triunghiulară).

A doua rotație. Se face în jurul axului de capăt $Z (z, z')$ – deci o rotație de front – dus tot prin punctul (a, a') și se va aduce în planul triunghiului, din poziția plan de capăt, să devină plan de nivel (urma verticală să fie paralelă cu linia de pământ Ox și să treacă prin $a'_2 \equiv a'_l$).

Se vor afla imediat proiecțiile verticale ale punctelor A_2 , B_2 și C_2 : a_2'' , b_2'' și c_2'' (se determină ducând din $a_2' \equiv a_1'$ câte un arc de cerc de rază $R = a_1'b_1'$) după care, prin linii de ordine corespunzătoare se vor determina și proiecțiile lor horizontale: $a_2 \equiv a_1$, iar b_2 și c_2 la intersecția acestor linii de ordine cu paralelele duse la linia de pământ Ox prin b_1 și c_1 .

Unindu-se aceste puncte astfel determinate, a_2 cu b_2 și cu c_2 , se va determina triunghiul $a_2b_2c_2$ care reprezintă adevărata mărime a triunghiului ABC din spațiu; deci, $\Delta a_2b_2c_2 \equiv \Delta ABC$.

6.3. Metoda rabaterii

6.3.1 Generalități

Rabaterea este un caz particular al rotației. Prin rabatere se înțelege rotirea unui plan oarecare $[P]$ în jurul uneia din urmele sale, până când planul $[P]$ se suprapune unuia din planele de proiecție, Fig.6.14. Axa de rabatere (rotație) este urma planului $[P]$ pe planul de proiecție pe care se face rabaterea. Rabaterea planului $[P]$ se poate face și pe un plan paralel cu unul din planele de proiecție. În acest caz axa de rabatere este urma planului $[P]$ pe planul paralel cu planul de proiecție.

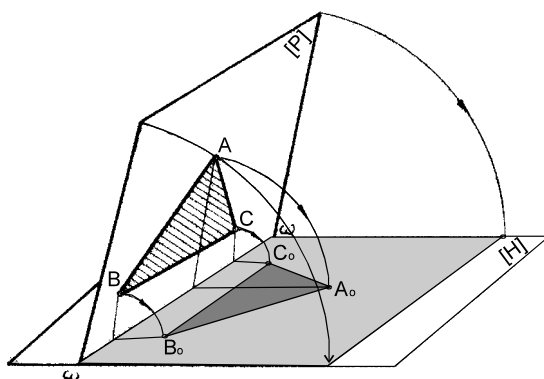


Fig. 6.14

Deoarece urma planului $[P]$ a fost definită ca dreaptă de intersecție dintre planul $[P]$ și planul de proiecție, atunci axa de rabatere poate fi definită ca dreaptă de intersecție dintre planul care se rabate și planul pe care se face rabaterea. Spre deosebire de rotație, unde axa de rotație se alege cât mai convenabil, în rabatere, axa de rabatere rezultă.

Toate elementele constructive utilizate în metoda rotației sunt valabile și la rabatere precum: axa de rabatere, centrul de rabatere, raza de rabatere, unghiul de rabatere și sensul de rabatere. Dacă un punct este situat pe axa de rabatere, el este în același timp și propriul său răbatut.

6.3.2 Rabaterea unui plan pe planul orizontal de proiecție

Se consideră planul oarecare $[P]$ limitat de planele de proiecție $[H]$ și $[V]$ (Fig. 6.15) și se cere să se rabată acest plan $[P]$ până când se așterne pe planul orizontal de proiecție $[H]$. Rabaterea se va face în jurul dreptei de intersecție dintre planele $[P]$ și $[H]$, după urma orizontală a planului $[P]$ - P_H .

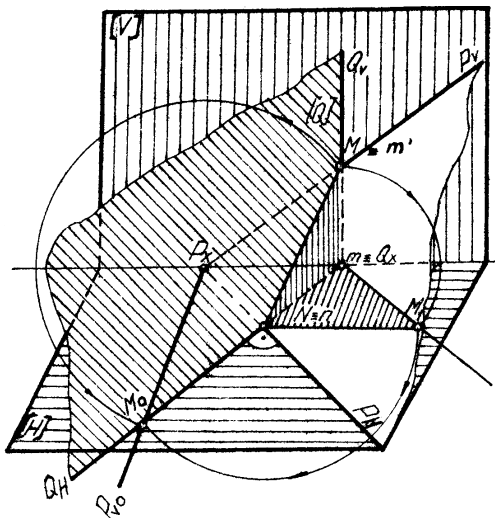


Fig. 6.15

Urma orizontală P_H a planului $[P]$, fiind aleasă drept axă de rabatere nu-și va modifica poziția, în timp ce urma verticală P_V se va roti în jurul lui P_H păstrând punctul P_x (comun celor două urme) fix. Deci, mai este necesar un punct pentru a determina poziția rebătută a urmei verticale P_V . Pentru aceasta se va considera un punct oarecare $M \subset P_V$, deci un punct comun atât al planului $[P]$ cât și planului vertical de proiecție $[V]$, care se află pe dreapta lor de intersecție. Proiecția verticală a punctului se va confunda cu însăși punctul din spațiu ($m' \equiv M$), în timp ce proiecția orizontală se va găsi pe linia de pământ Ox ($m \subset Ox$). Acest punct, în timpul rabaterii, se va roti într-un plan $[Q] \perp P_H$; rezultă că planul $[Q]$ va fi un plan vertical. Urmele acestui plan sunt: Q_H – trece prin m (proiecția orizontală a punctului M), este perpendiculară pe P_H ; Q_V – va trece prin m' (proiecția verticală a punctului M), este perpendiculară pe Ox . În timpul rabaterii, punctul M descrie în planul $[Q]$ un arc de cerc cu centrul în N – punctul de intersecție dintre Q_H și P_H și de rază $R = NM$ (ipotenuza triunghiului dreptunghic NmM). Acest triunghi dreptunghic se poate construi ușor în planul orizontal de proiecție $[H]$, deoarece i se cunosc două catete: NM – distanța de la proiecția orizontală a punctului la axa de rabatere și mM_I – cota punctului considerat. Prin unirea lui M_I cu N se obține triunghiul dreptunghic $NmM_I \equiv NmM$. Ipotenuza măsoară în adevărată mărime raza de rabatere $R = NM$. Deci, cu centrul în N și cu raza $R = NM_I = NM$, se descrie un arc de cerc ce va intersecta urma orizontală Q_H a planului $[Q]$ în M_O (poziția rabătută a punctului M pe planul orizontal de proiecție $[H]$).

Unindu-se punctul M_O astfel determinat cu P_x (rămas fix) se va obține P_{Vo} (poziția rabătută a urmei verticale P_V a planului $[P]$ pe planul orizontal de proiecție $[H]$).

Triunghiul dreptunghic NmM_l (cu ajutorul căruia s-a determinat adevărata mărime a axei de rabatere) se numește **triunghiul de poziție al punctului M** . Pe baza celor stabilite mai sus, se poate trece la determinarea în epură a poziției rabătute a planului $[P]$, așa cum apare în Fig. 6.16.

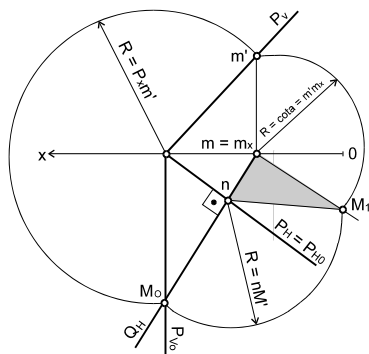


Fig. 6.16

6.3.3 Rabaterea unui plan pe planul vertical de proiecție

Prin analogie cu cele expuse la rabaterea planului $[P]$ pe planul orizontal de proiecție $[H]$ (Subcap. 6.3.2) construcția rabaterii unui plan oarecare $[P]$ până ce se așterne pe planul vertical de proiecție $[V]$, apare ca în epura din Fig. 6.17.

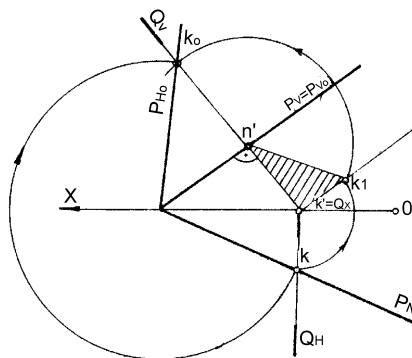


Fig. 6.17

6.3.4 Adevărata mărime a unei figuri plane prin metoda rabaterii

Se consideră placa triunghiulară ABC determinată prin proiecția vârfurilor sale: $A(a, a')$, $B(b, b')$ și $C(c, c')$. Se cere să se găsească, prin metoda rabaterii, adevărata mărime a plăcii ABC , Fig. 6.18.

Adevărata mărime a acestui triunghi se poate obține rabatându-se planul triunghiului ABC pe un plan paralel cu planul orizontal de proiecție $[H]$ și anume planul de nivel $[N]$, care se duce prin vârful $A (a, a')$ – pentru simplificarea construcțiilor grafice.

Intersecția dintre planul de nivel $[N]$ și planul plăcii va fi dreapta de nivel $\Omega (\omega, \omega')$, care se alege drept axă de rabatere. Se rabate punctul $B (b, b')$, cu ajutorul triunghiului de poziție $\omega b B_1$, determinându-se astfel punctul B_0 , care, unit cu $A_0 \equiv a$ și cu m să determine punctul C_0 la intersecția dreptei B_0m cu perpendiculara dusă din c (proiecția orizontală a vârfului C pe axa de rabatere ω).

S-au determinat astfel punctele A_0, B_0, C_0 – vârfurile triunghiului ABC rabătute pe planul de nivel $[N]$. Unindu-se cele trei puncte, se determină triunghiul $A_0B_0C_0$ ce reprezintă adevărata mărime a triunghiului ABC din spațiu.

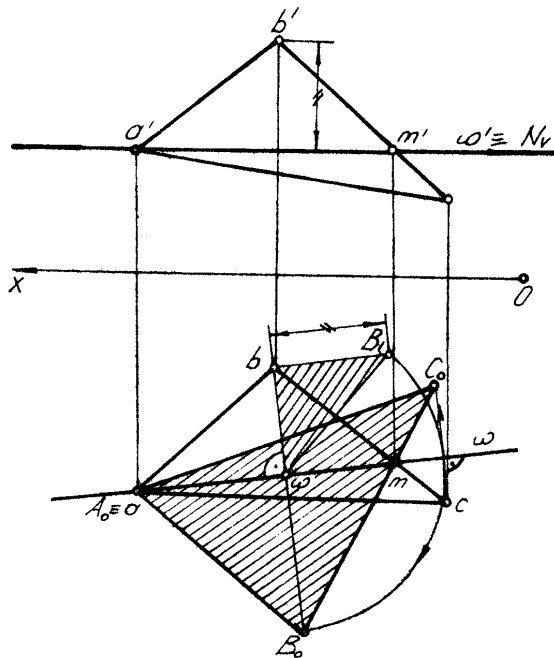


Fig. 6.18

7. POLIEDRE

7.1 Reprezentare

Poliedrele sunt corpuri mărginite numai de suprafețe plane. Aceste plane se numesc *fețele poliedrului*; intersecția a două fețe determină o *muchie*, iar punctele de întâlnire ale muchiilor se numesc *vârfuri*.

Din punct de vedere constructiv se cunosc poliedre cu o singură bază plană precum piramidele, Fig. 7.1.h,j ,și cu două baze (de obicei paralele între ele) precum prisma Fig. 7.1 a ... g , paralelipipedul dreptunghic Fig. 7.1.c,d , trunchiul de piramidă Fig. 7.1.i,k.

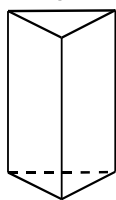
Din punct de vedere al formei poligonale a fețelor se cunosc: *poliedre regulate* Fig. 7.1.l,m,n,o,p, unde fețele poliedrului sunt poligoane regulate și *poliedre neregulate*, unde fețele poliedrului sunt poligoane neregulate.

De asemenea se cunosc poliedre convexe sau concave după cum planele fețelor intersectează sau nu poliedrul.

Poliedrele trunchiate sau retezate se obțin prin înlăturarea dintr-un poliedru regulat a unor vârfuri în așa fel încât să rezulte secțiuni plane congruente; poliedrul rămas va fi tot un poliedru regulat sau semiregulat (arhimedic) după cum poliedrul retezat are toate fețele congruente sau în fiecare vârf se unesc poligoane regulate diferite, Fig. 7.1.r,s .

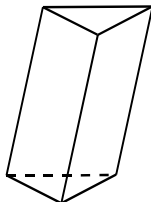
- **POLIEDRE REGULATE** – fețele poliedrului sunt poligoane regulate, care pot fi inscriptibile și circumscriptibile sferei;
- TETRAEDRUL – poliedrul mărginit de patru fețe, triunghiuri echilaterale, Fig. 7.1.l;
- HEXAEDRUL sau CUBUL – poliedrul mărginit de șase fețe pătrate, Fig.7.1.m;

Prismă triunghiulară
dreaptă



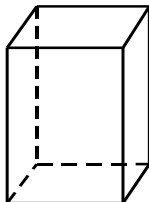
a.

Prismă triunghiulară
oblică



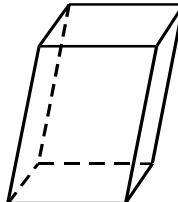
b.

Paralelipiped
dreptunghic drept



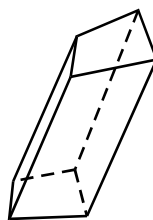
c.

Paralelipiped
oblic



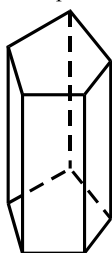
d.

Prismă înclinată



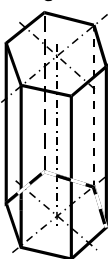
e.

Prismă
dreaptă



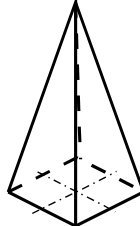
f.

Prismă
hexagonală



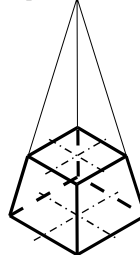
g.

Piramida
patrulateră
dreaptă

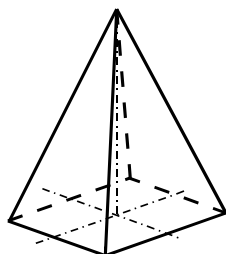


h.

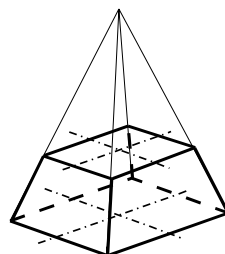
Trunchi de
piramidă



i.

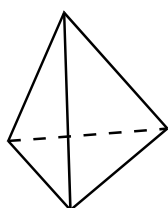


j.



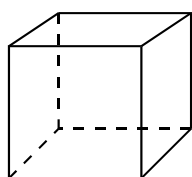
k.

Tetraedrul



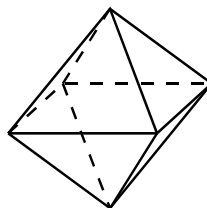
l.

Cubul



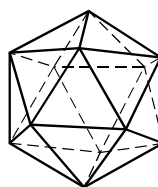
m.

Octaedrul



n.

Icosaedrul



o.

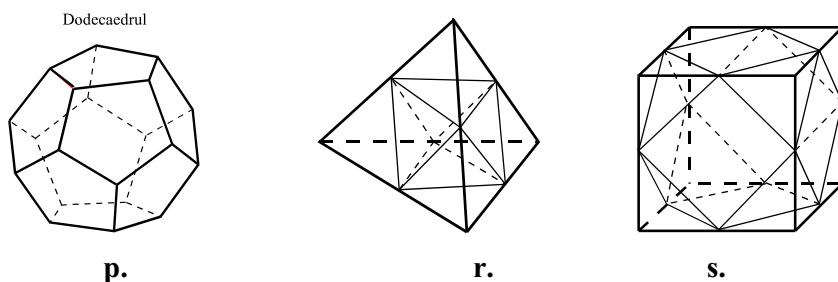


Fig. 7.1

- OCTAEDRUL – poliedrul mărginit de opt fețe triunghiuri echilaterale, Fig. 7.1.n;
- ICOSAEDRUL – poliedrul mărginit de douăzeci de fețe triunghiuri echilaterale, Fig. 7.1.o;
- DODECAEDRUL – poliedrul mărginit de douăsprezece fețe pentagoane regulate, Fig. 7.1.p.

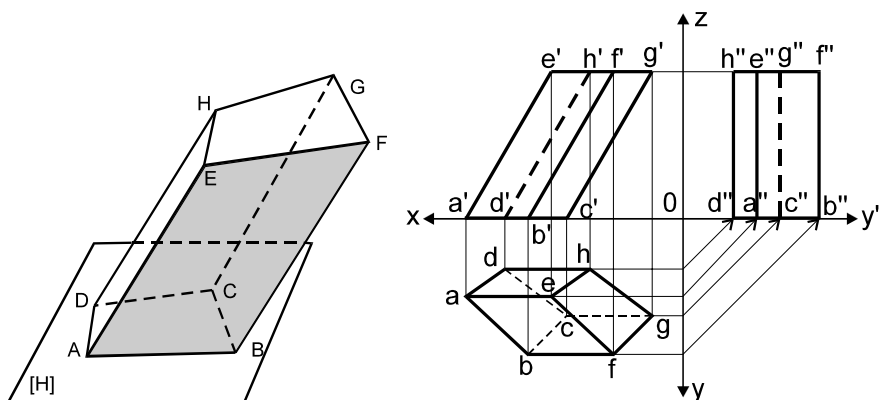
• **POLIEDRE NEREGULATE** – fețele poliedrului sunt poligoane neregulate.

- PRISMA – este solidul mărginit de fețe plane, dintre care două, poligonale, egale și paralele, formează bazele, iar celelalte, în formă de paralelograme, paralele cu o direcție dată, formează fețele laterale.

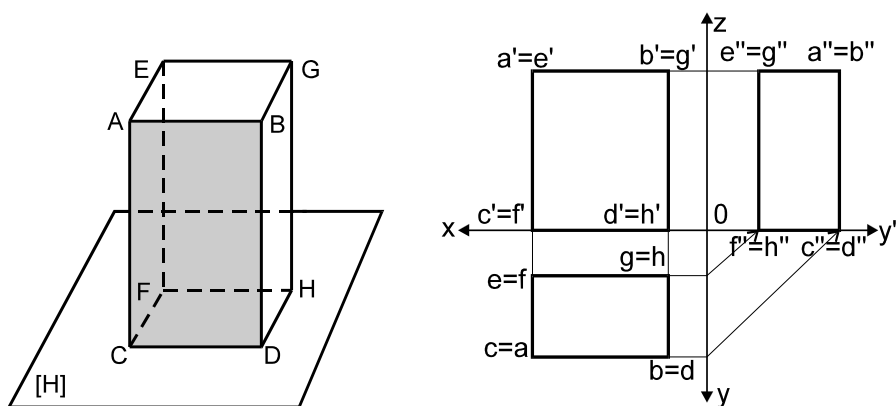
Dacă cele două baze nu sunt paralele, prisma este TRUNCHIATĂ.

Dacă muchiile prisme sunt oblice față de bază, prisma va fi OBLICĂ Fig. 7.1.b,e, iar dacă muchiile sunt perpendiculare pe cele două baze, prisma va fi DREAPTĂ Fig. 7.1 a,f,g. Prisma se numește după forma poligonului de bază (triunghiulară, patrulateră, pentagonală, hexagonală, etc.).

În Fig. 7.2.a se prezintă spațial și în epură prisma neregulată și înclinată, așezată în planul orizontal, iar în Fig. 7.2.b se prezintă spațial și în epură un paralelipiped dreptunghic drept așezat în același plan orizontal.



a



b

Fig. 7.2

- PIRAMIDA – poliedru neregulat ale cărui muchii sunt concurente într-un punct numit vârf și limitate de o bază plană. Piramida se denumește după poligonul de bază.

În Fig. 7.3.a se prezintă spațial și în epură piramida pentagonală așezată în planul orizontal, iar în Fig. 7.3.b, se prezintă spațial și în epură piramida dreptunghiulară așezată în planul orizontal.

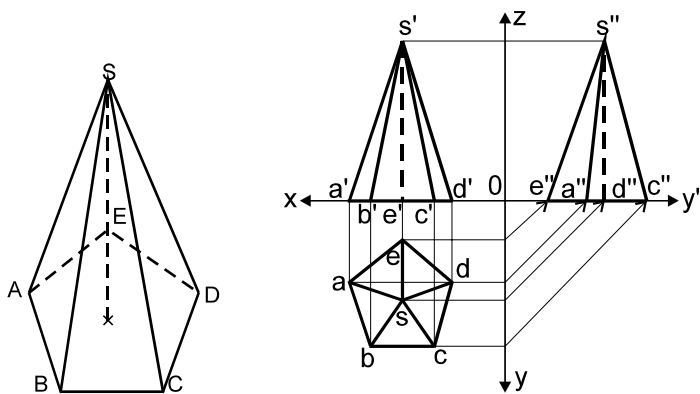


Fig. 7.3.a

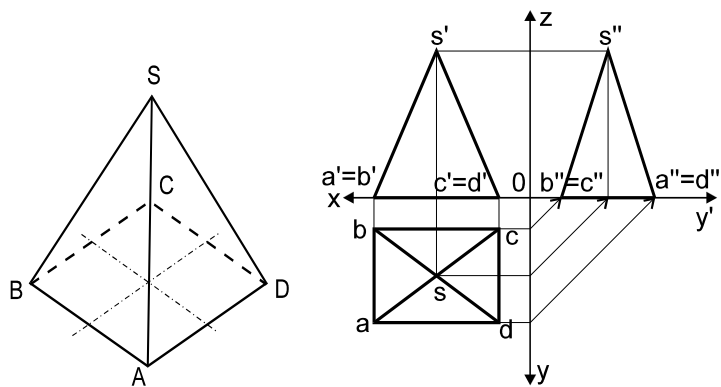


Fig. 7.3.b

- TRUNCHIUL DE PIRAMIDĂ – piramidă patrulateră așezată în planul orizontal și secționată de un plan paralel cu baza. Fig. 7.4 – reprezentare spațială și în epură;

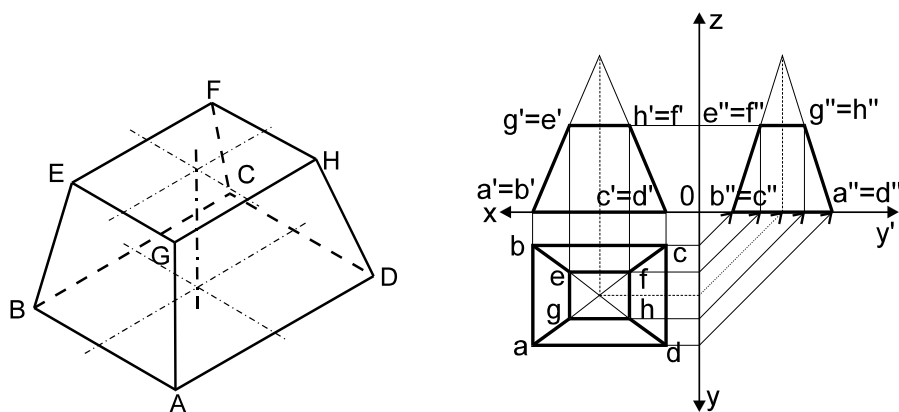


Fig. 7.4

În Fig. 7.5 se prezintă spațial și în epură un icosaedru, iar în Fig. 7.6 un dodecaedru.

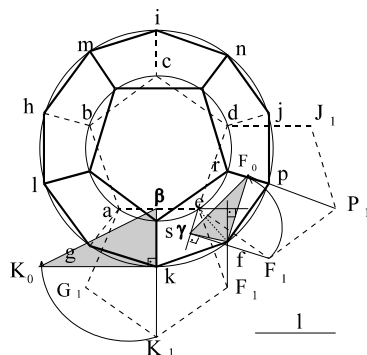
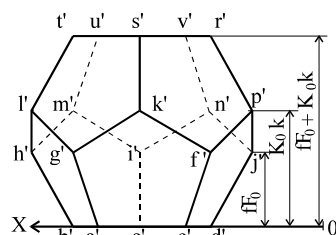
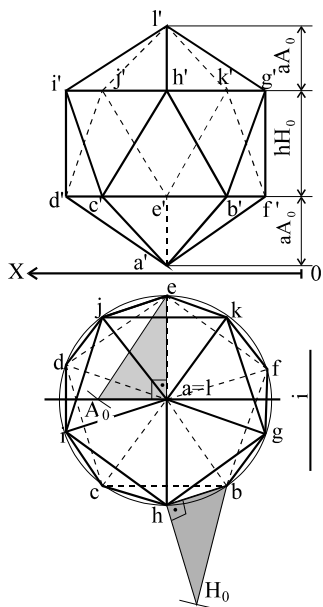
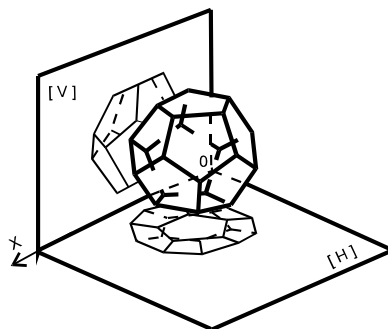
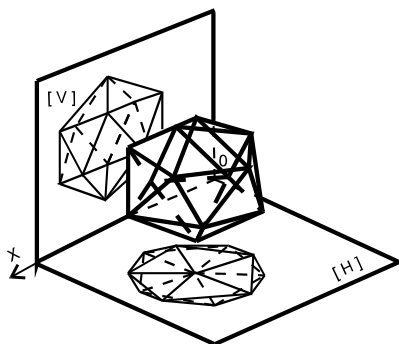


Fig. 7.5

Fig. 7.6

7.2 Secțiuni plane în poliedre

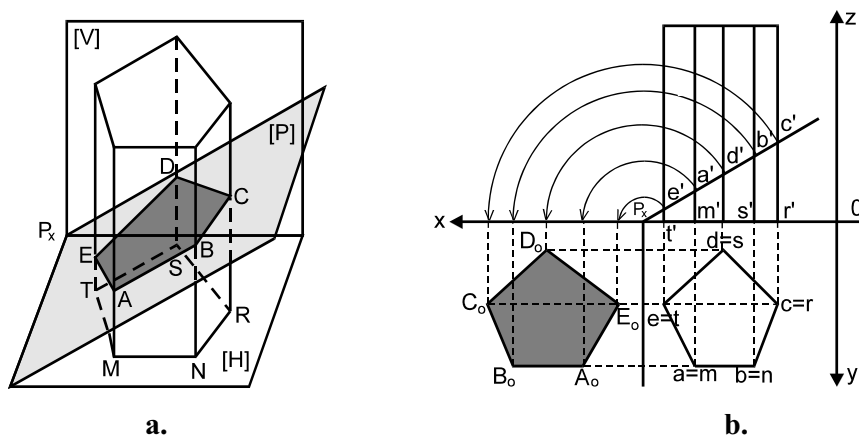
Secțiunea într-un poliedru este, de fapt, intersecția dintre un plan de secțiune și fețele sau muchiile poliedrului. Suprafața obținută prin unirea punctelor de intersecție formează poligonul de intersecție.

7.2.1 Intersecția unui plan cu o prismă

Se consideră prisma dreaptă, $MNRST$, cu baza în planul orizontal de proiecție și un plan de capăt $[P]$, Fig. 7.7.a.

Deoarece planul de capăt este perpendicular pe planul $[V]$, proiecțiile verticale ale punctelor de intersecție se determină cu ușurință, ele găsindu-se la intersecția dintre urma verticală și proiecțiile verticale ale muchiilor (Fig. 7.7.b); se vor nota cu a' , b' , c' , d' , e' . Proiecțiile lor orizontale se găsesc în vârfurile poligonului de bază, deoarece muchiile prisme sunt perpendiculare pe $[H]$: $a \equiv m$, $b \equiv n$, $c \equiv r$, $d \equiv s$, $e \equiv t$.

Pentru determinarea adevăratei mărimi a poligonului de intersecție, se folosește metoda rotirii planului de secțiune în jurul urmei lui orizontale până la suprapunerea lui pe planul $[H]$. Operațiunea se numește rabaterea planului de secțiune peste planul orizontal de proiecție $[H]$. În timpul rabaterii, proiecțiile verticale a' , b' , c' , d' , e' descriu arce de cerc cu centrul în P_x , până intersectează axa Ox ; în același timp, proiecțiile orizontale execută o mișcare de translație paralelă cu axa Ox . Punctele de întâlnire, A_0 , B_0 , C_0 , D_0 , E_0 , determină adevărata mărime a poligonului de intersecție.



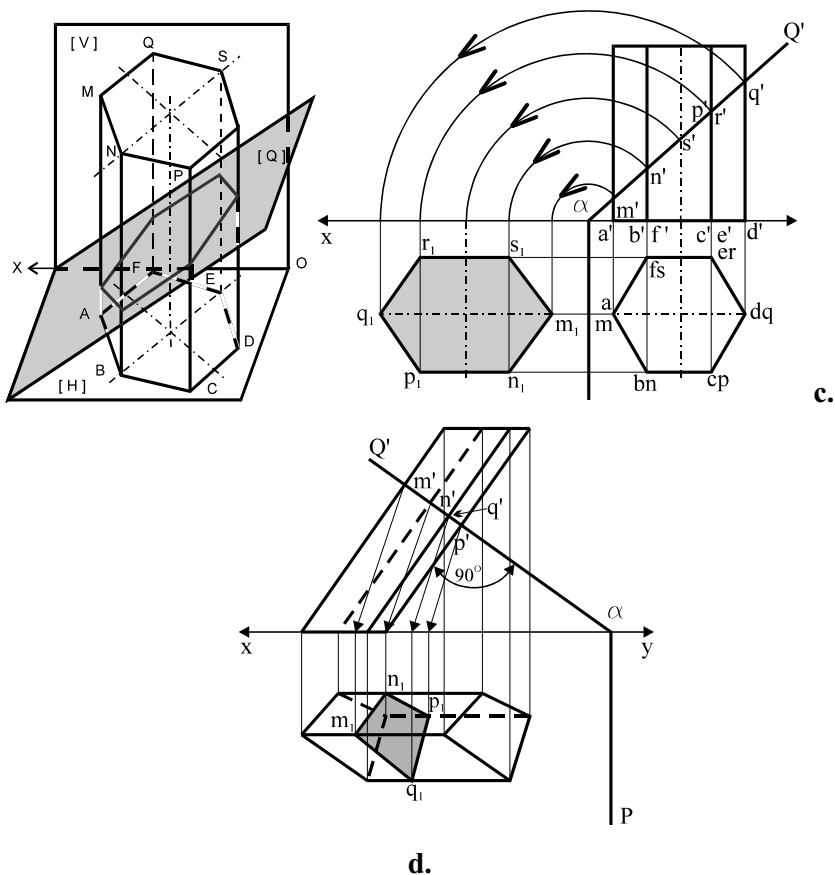


Fig. 7.7

În epura din Fig. 7.7.c este prezentată o prismă hexagonală regulată situată în planul orizontal de proiecție $[H]$, care este secționată de un plan de capăt $[Q]$.

Proiecțiile verticale ale punctelor de intersecție se determină cu ușurință, ele găsindu-se la intersecția dintre urma verticală și proiecțiile verticale ale muchiilor; se vor nota cu m', n', s', p', r', q' . Proiecțiile lor orizontale se găsesc în vârfurile hexagonului de bază, deoarece muchiile prisme sunt perpendiculare pe planul orizontal de proiecție $[H]$: $a \equiv m, b \equiv n, c \equiv p, d \equiv q, e \equiv t$.

Pentru determinarea adevăratei mărimi a hexagonului de intersecție, se folosește metoda rotirii planului de secțiune în jurul urmei lui orizontale până la suprapunerea lui pe planul $[H]$. Operațiunea se numește rabaterea planului de secțiune peste planul orizontal de proiecție $[H]$. În timpul rabaterii, proiecțiile verticale m', n', s', p', r', q' descriu arce de cerc cu centrul în $P\alpha$, până intersectează axa Ox . Punctele de întâlnire, $M_I, N_I, S_I, P_I, R_I, Q_I$ determină adevărata mărime a hexagonului de intersecție.

În epura din Fig. 7.7.d este prezentată o prismă tetragonală înclinată, cu baza situată în planul orizontal de proiecție $[H]$. Este secționată de planul de capăt $[Q]$, plan ce este perpendicular pe muchiile prisme.

Proiecțiile verticale ale punctelor de intersecție se determină cu ușurință, ele găsindu-se la intersecția dintre urma verticală și proiecțiile verticale ale muchiilor; se vor nota cu m', n', p', q' . Proiecțiile lor pe planul orizontal de proiecție $[H]$ se găsesc prin proiectarea vârfurilor tetragonului de bază și a celui superior.

Pentru determinarea adevăratei mărimi a tetragonului de intersecție, se folosește metoda rotirii planului de secțiune în jurul urmei lui orizontale până la suprapunerea lui pe planul $[H]$. Operațiunea se numește rabaterea planului de secțiune peste planul orizontal de proiecție $[H]$. În timpul rabaterii, proiecțiile verticale m', n', p', q' descriu arce de cerc cu centrul în $P\alpha$, până intersectează axa Ox . Punctele de întâlnire, M_I, N_I, P_I, Q_I , determină adevărata mărime a tetragonului de intersecție.

7.2.2 Intersecția unui plan cu o piramidă

Fie piramida pentagonală oarecare $SJKLMN$, cu baza în planul orizontal de proiecție (Fig. 7.8.a). Planul de secțiune este planul de capăt $[P]$. Determinarea poligonului de secțiune se face la fel ca la paragraful anterior.

În epură, (Fig. 7.8.b) s-a prezentat piramida în epură cu proiecțiile orizontală ($abcde$) și verticală ($a'b'c'd'e'$) ale poligonului de intersecție.

Determinarea adevăratei mărimi și a forme reale ale acestui poligon ($A_0B_0C_0D_0E_0$) se va face la fel ca în metoda expusă la intersecția unui plan cu o prismă (prin rabatare).

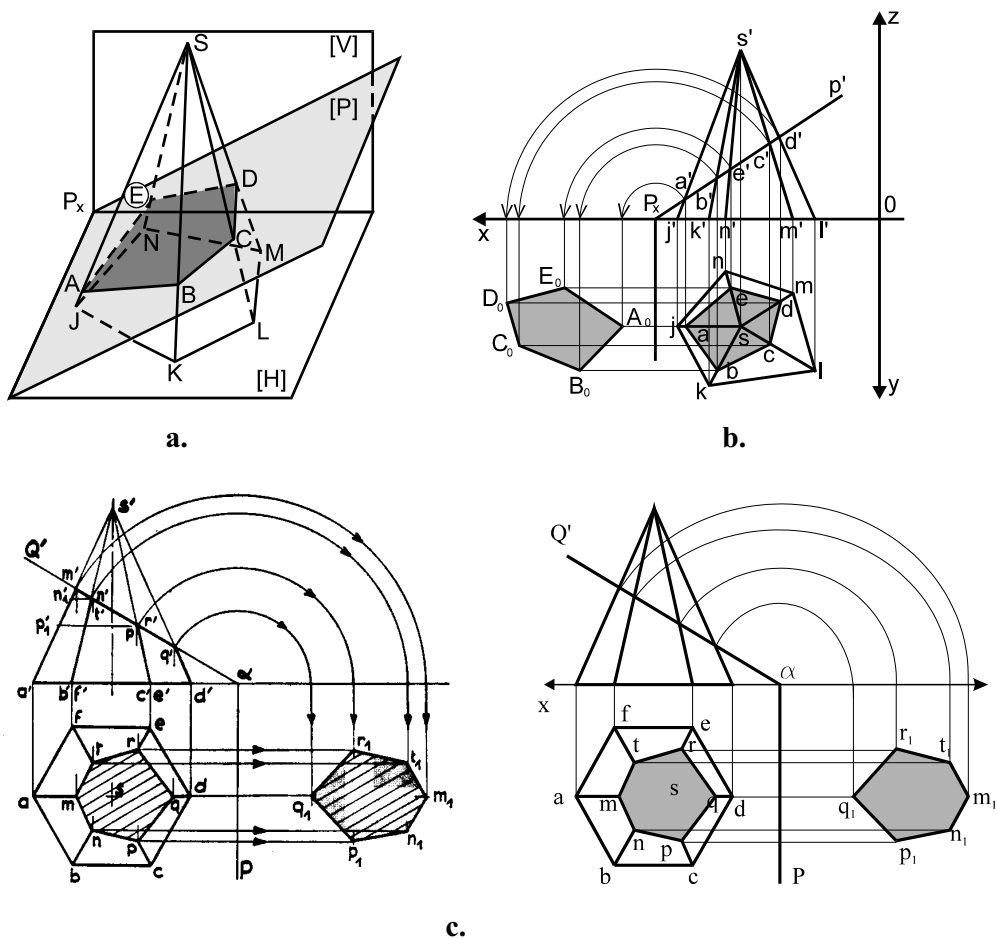


Fig. 7.8

În Fig. 7.8.c este prezentată epura unei piramide regulate hexagonale, cu baza situată în planul orizontal de proiecție $[H]$. Este secționată de planul de capăt $[Q]$.

Proiecțiile verticale sunt: $s', a', b' \equiv f', c' \equiv e', d', m', n' \equiv t', p' \equiv r'$ și q' ; cele orizontale fiind: $s, a, b, c, d, e, f, m, n, p, q, r, t$.

Pentru aflarea adevăratei mărimi a hexagonului se folosește metoda rotirii planului de secțiune în jurul urmei lui orizontale până la suprapunerea lui pe planul orizontal $[H]$. Operațiunea se numește rabaterea planului de secțiune peste planul orizontal de proiecție $[H]$. În timpul rabaterii, proiecțiile verticale m', n', t', p, r', q' descriu arce de cerc cu centrul în $P\alpha$, până intersectează axa Ox . Punctele de întâlnire, $M_l, N_l, T_l, P_l, R_l, Q_l$, determină adevărata mărime a hexagonului de intersecție.

7.3 Desfășuratele unor poliedre mai importante

Reprezentarea în care se aduc toate fețele unui poliedru pe un singur plan se numește **desfășurarea** poliedrului. Figura poligonală plană astfel obținută se numește **desfășurată** sau **transformată prin desfășurare** a poliedrului. Prin desfășurarea unui poliedru se regăsește forma reală a fiecărei fețe, adică a poligoanelor care limitează fețele.

Lungimile laturilor și unghiurile dintre laturile unei fețe apar în desfășurată în adevărată mărime. Pentru a trasa desfășurata unui poliedru este necesar să se determine adevăratele mărimi ale muchiilor și adevărata mărime a distanțelor dintre ele.

Desfășurarea suprafeței unui poliedru (suprafață poliedrală) constă în aducerea fețelor acestuia în același plan, respectând succesiunea din spațiu. Planul de desfășurare poate fi un plan oarecare sau planul uneia dintre fețe. În operația de desfășurare nu se admit suprapuneri, totale sau parțiale, ale fețelor.

Desfășurarea suprafețelor poliedrelor regulate constă în alăturarea în plan a unui număr de poligoane regulate, corespunzător fețelor poliedrului. De exemplu, desfășurarea unui cub se face în 6 pătrate, a unui octaedru regulat – în 8 triunghiuri echilaterale, a unui dodecaedru regulat – în 12 pentagoane regulate, etc.

- Desfășurata tetraedrului, Fig.7.9.

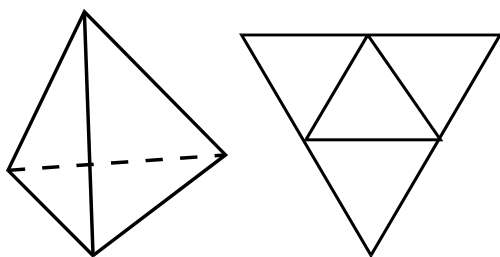


Fig. 7.9

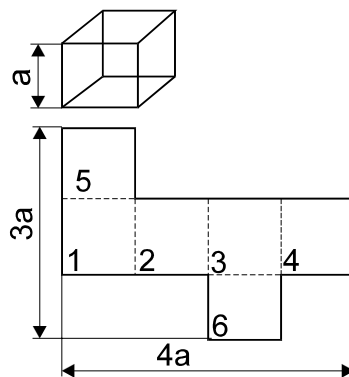


Fig.7.10

- Desfășurata cubului, Fig.7.10.
- Desfășurata octaedrului, Fig.7.11.

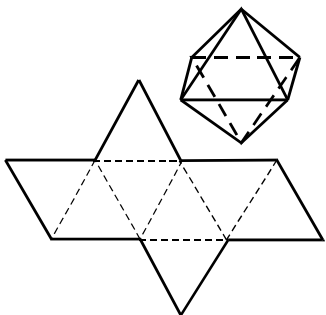


Fig. 7.11

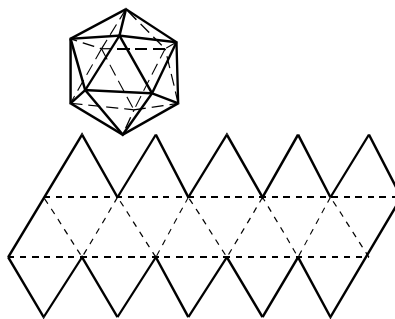


Fig. 7.12

- Desfășurata icosaedrului, Fig. 7.12.
- Desfășurata dodecaedrului, Fig. 7.13.

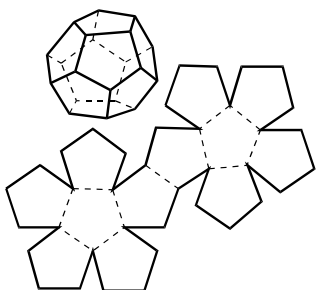


Fig. 7.13

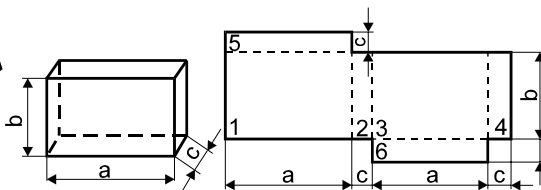


Fig. 7.14

- Desfășurata paralelipipedului, Fig. 7.14.
- Desfășurata prisme hexagonale drepte, Fig. 7.15.

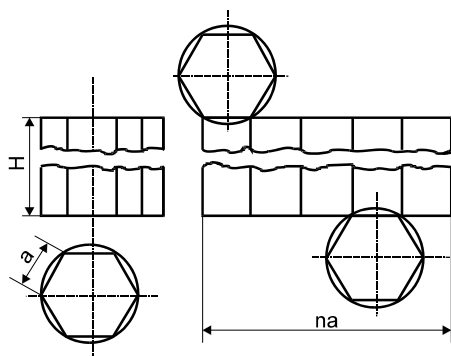


Fig. 7.15

- Desfășurata unei piramide hexagonale regulate (zona hașurată reprezintă desfășurarea piramidei după intersecția cu un plan, Fig.7.8.c), Fig.7.16.

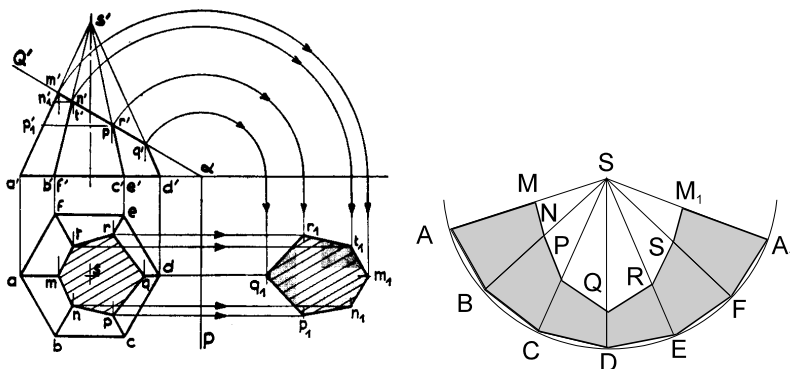


Fig. 7.16

- Desfășurata unei prisme drepte intersectată de un plan sub unghiul α ,
Fig.7.17.

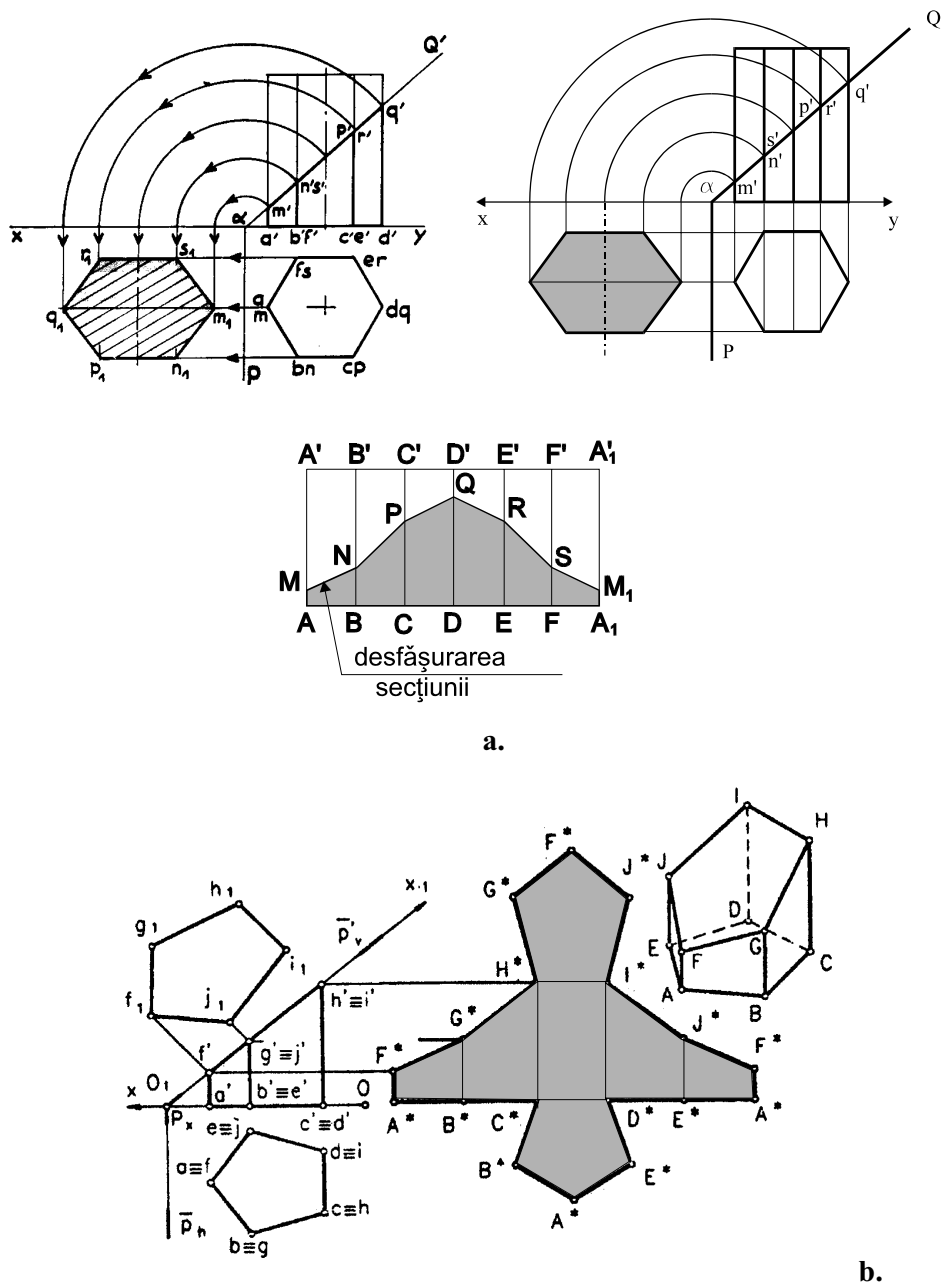


Fig. 7.17

8. CORPURI DE ROTAȚIE

8.1 Reprezentare

Corpurile de rotație se mai numesc și corpuri rotunde; iau naștere prin rotirea unei linii oarecare în jurul unei axe. Linia care dă naștere corpului se numește **generatoare**, iar cea pe care se sprijină – **directoare**.

Un solid de rotație este generat de o suprafață plană limitată de o generatoare, suprafață ce se rotește în jurul unei axe care este o dreaptă a planului.

Corpurile de rotație mai cunoscute sunt:

- **cilindrul** (Fig. 8.1) este o suprafață generată de o dreaptă (generatoare), care se deplasează pe o curbă fixă (directoare) și care rămâne mereu paralelă cu o direcție oarecare dată. Curba directoare poate fi cerc, elipsă, parabolă sau hiperbolă, cilindrul numindu-se după natura directoarei (parabolic sau hiperbolic)

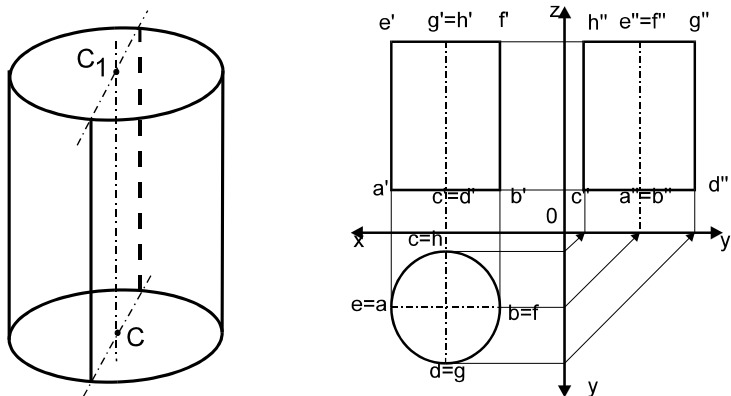


Fig. 8.1

- **conul** (Fig. 8.2) este suprafața generată de o dreaptă (generatoare), care trece printr-un punct fix (vârful conului) și se deplasează pe o curbă (directoare). Curba directoare poate fi cerc, elipsă, parabolă, hiperbolă.

Convențional, conul este denumit după curba directoare: circular, eliptic, parabolic, etc.

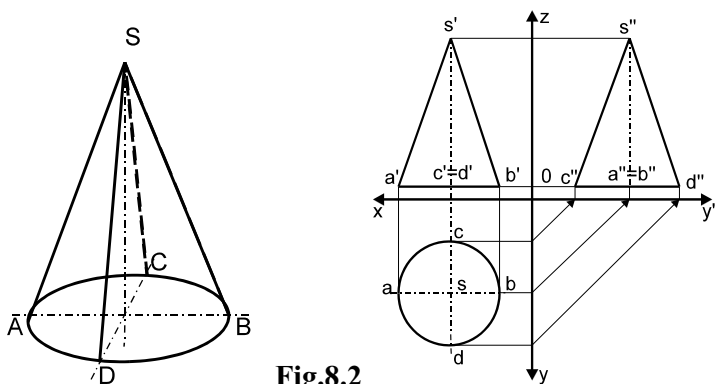


Fig.8.2

- **trunchiul de con** (Fig. 8.3) este un con secționat de un plan paralel cu baza sa.

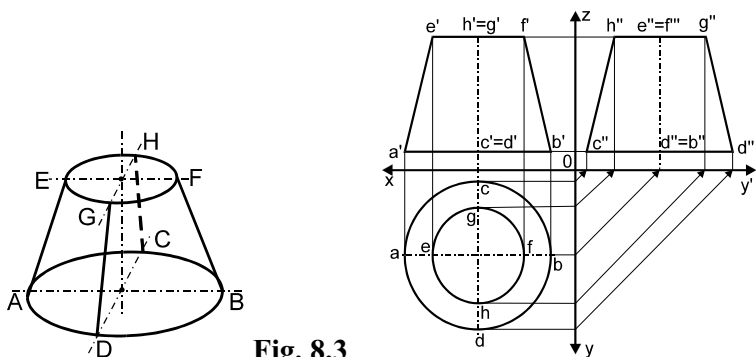


Fig. 8.3

- **sfera** (Fig. 8.4) este generată de un cerc care se rotește în jurul axei sale. Ea se proiectează după un cerc pe fiecare din planele de proiecție. Proiecțiile punctelor aflate pe sferă se obțin secționând sfera cu plane perpendiculare pe axă.

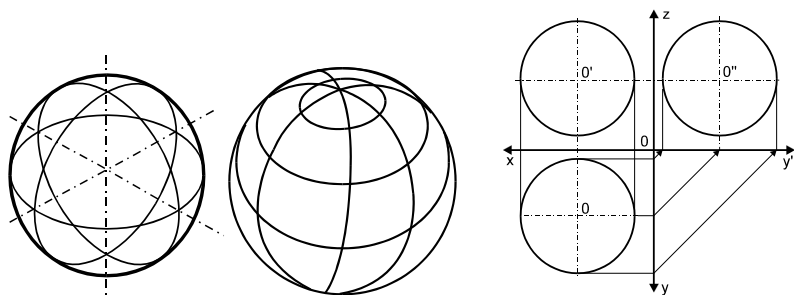


Fig. 8.4

- **torul** (Fig. 8.5) este corpul geometric generat prin rotirea unei curbe plane în jurul unui ax coplanar cu curba și care nu trece prin centrul acestuia. Proiecțiile punctelor situate pe suprafața torului se determină tot cu ajutorul planelor perpendiculare pe axa de rotație.

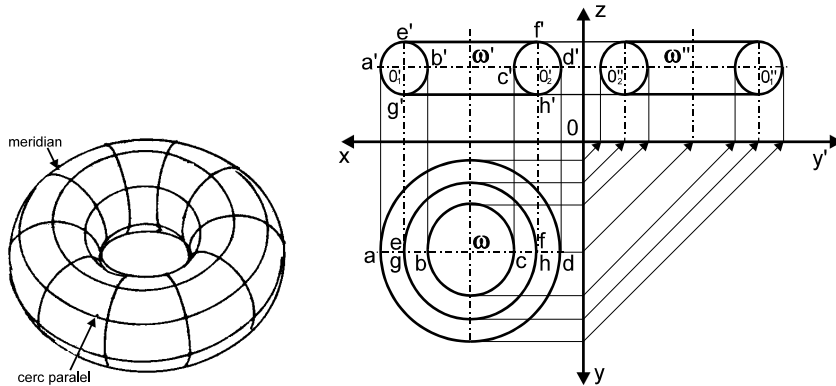


Fig. 8.5

- **elipsoidul** (Fig. 8.6) este corpul geometric generat prin rotirea unei elipse în jurul axei mari. Proiecțiile punctelor aflate pe elipsoid se găsesc prin secționarea elipsoidului cu plane de profil perpendiculare pe axa de rotație.

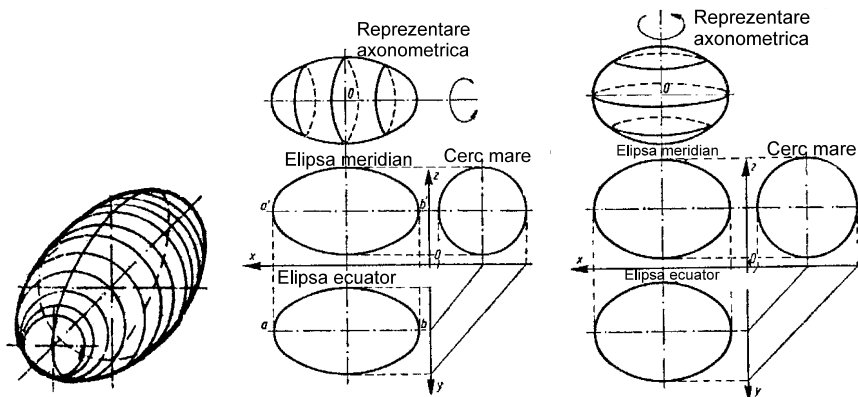


Fig. 8.6

- **paraboloidul** (Fig. 8.7) este corpul geometric generat prin rotirea unei parabole în jurul axei sale. Proiecțiile punctelor aflate pe

suprafața paraboloidului se găsesc prin secționarea cu plane perpendiculare pe axa de rotație.

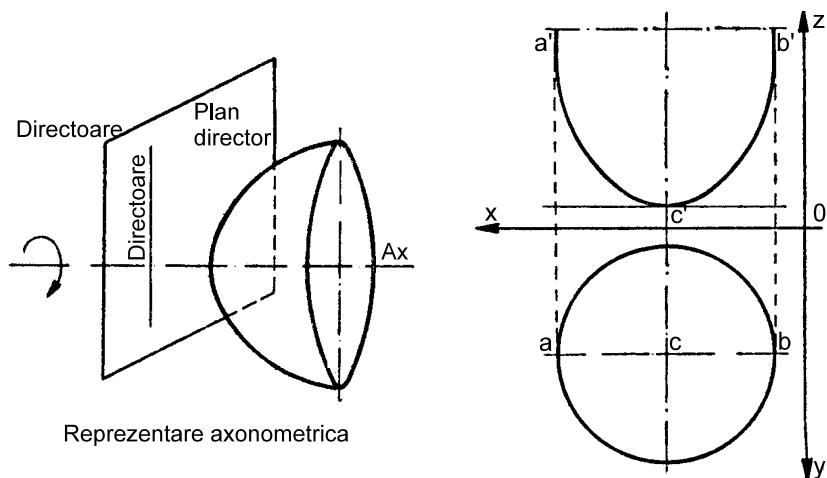


Fig. 8.7

- **hiperbolidul** (Fig. 8.8) este corpul geometric (suprafață) generat de o dreaptă care se rotește în jurul unui ax necoplanar cu dreapta. Mai poate fi generat și de o hiperbolă care se rotește în jurul axei ei imaginare (netraverse).

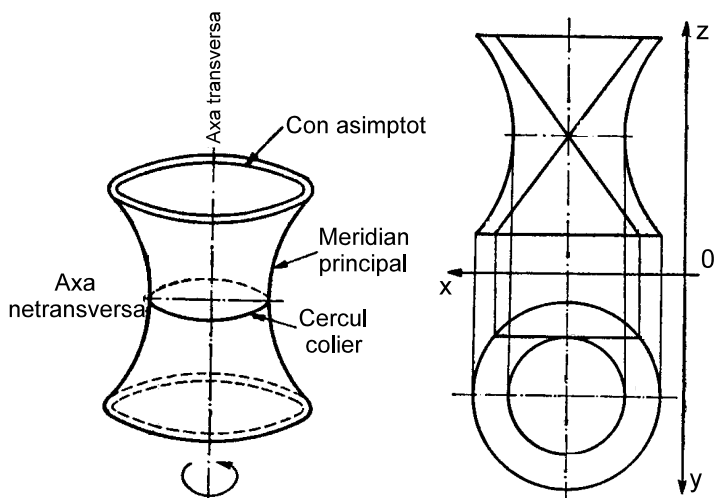


Fig. 8.8

8.2 Secțiuni plane în solide de rotație

Prin analogie cu secțiunea într-un poliedru, secțiunea într-un solid de rotație este intersecția dintre planul de secțiune și generatoarele solidului. Suprafața de intersecție se determină prin unirea punctelor de intersecție astfel obținute.

8.2.1. Secțiunea într-un cilindru circular drept

Un cilindru circular drept se secționează cu planul de capăt $[P]$, conform **teoremei lui Dandelin** secțiunea este o elipsă, Fig. 8.9.

Punctele cu ajutorul cărora se trasează elipsa, sunt punctele aflate la intersecția dintre proiecțiile verticale ale generatoarelor ($a'b'c'd'...k'l'$) și urma verticală ($P'P_X$). Se obțin proiecțiile verticale ($1', 2'...11', 12'$) ale punctelor elipsei, proiecțiile orizontale găsindu-se pe cercul de bază ($1, 2, 3...11, 12$).

Determinarea adevăratei mărimi a elipsei de secțiune se obține prin rabaterea planului de capăt $[P]$ în jurul urmei orizontale PP_X .

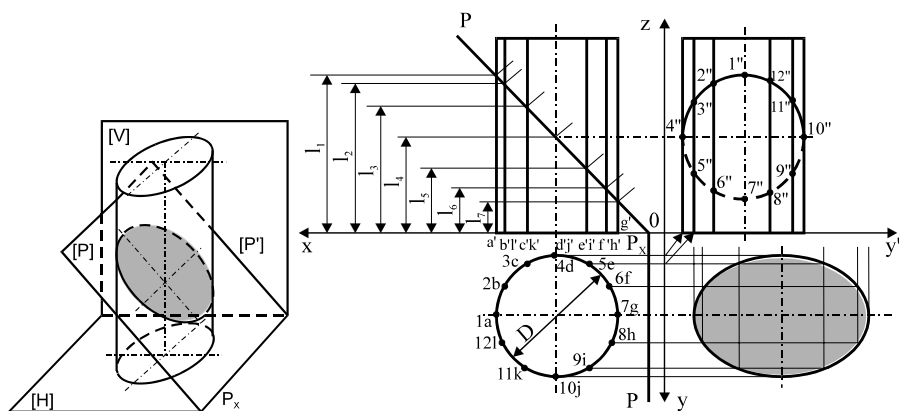


Fig. 8.9

8.2.2 Secțiunea într-un con circular drept

Un con circular drept cu baza în planul orizontal de proiecție $[H]$ se secționează cu un plan de capăt $[P]$, Fig. 8.10.

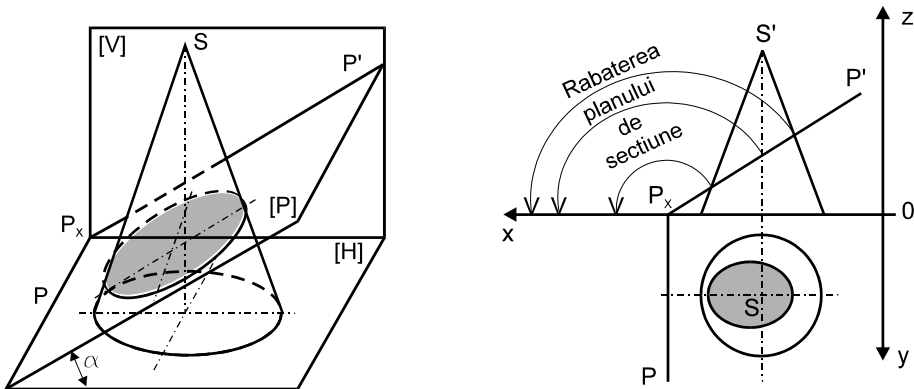


Fig. 8.10

Determinarea elipsei de secțiune se face la fel ca la cilindru. În schimb, la secțiunea conului cu un plan, se întâlnesc următoarele cazuri speciale:

- secțiunea cu un *plan vertical ce trece prin vârful conului*, este un **triunghi**, Fig. 8.11.

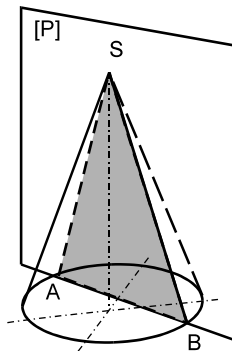


Fig. 8.11

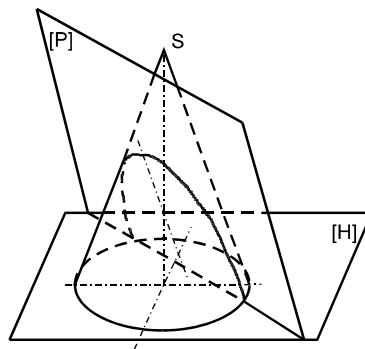


Fig. 8.12

- secțiunea cu un *plan înclinat, paralel cu una din generatoarele conului* este o **parabolă**, Fig. 8.12.

- secțiunea cu un *plan paralel cu axa conului* circular drept este o **hiperbolă**,
Fig. 8.13.

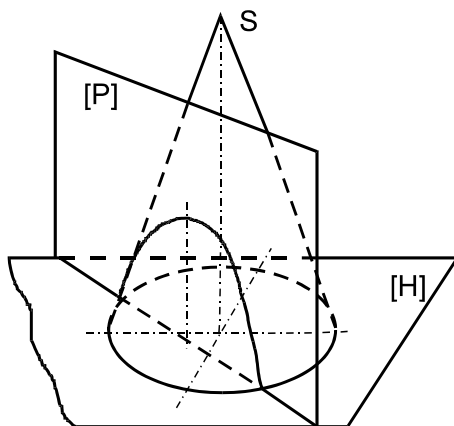


Fig.8.13

8.3 Desfășuratele unor corpuri de rotație mai importante

Reprezentarea în care se aduce atât suprafața laterală, cât și baza (bazele) unui con, respectiv cilindru în același plan se numește **desfășurare**. Figura poligonală plană astfel obținută se numește **desfășurată** sau **transformată prin desfășurare** a conului, respectiv a cilindrului. Pentru trasarea desfășuratelor cilindrului și conurilor este necesară determinarea adevăratelor mărimi ale generatoarelor și bazelor. Unei curbe trasate pe suprafața laterală a unui cilindru îi corespunde o curbă de aceeași lungime pe desfășurată, numită **transformată prin desfășurare** a curbei date. Unghiul a două curbe ale suprafeței este egal cu unghiul transformatelor lor prin desfășurare.

Pentru trasarea corectă a desfășuratelor se ține cont de **teorema lui Olivier**: transformata prin desfășurare a secțiunii făcute de un plan într-un cilindru sau un con prezintă inflexiuni în punctele în care planul tangent la cilindru/con este perpendicular pe planul secant.

În cazul sferei, pentru că este o suprafață nedesfășurabilă, există diferite metode aproximative pentru a o desfășura. Mai cunoscute sunt metodele prin care suprafața sferei se divizează în fusuri egale (prin secționarea cu plane proiectante verticale care trec prin centrul sferei) sau se divizează suprafața sferei în zone sferice (prin secționarea cu plane de nivel).

- Desfășurata cilindrului drept, Fig. 8.14.

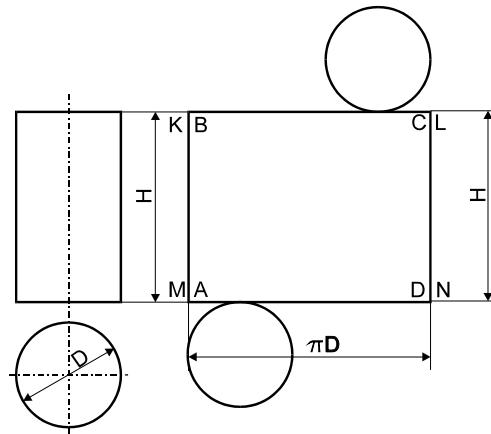


Fig. 8.14

- Desfășurata cilindrului drept intersectat de un plan sub un unghi α , Fig. 8.15.

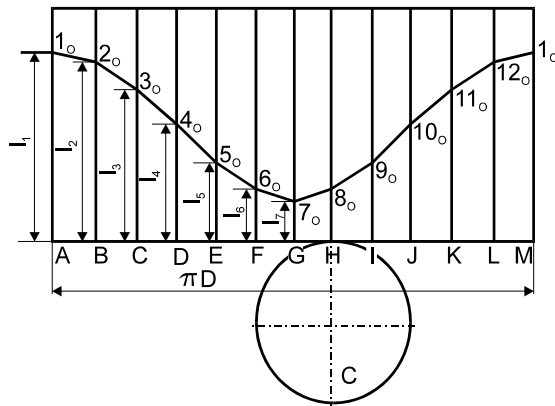


Fig. 8.15

- Desfășurata conului, Fig. 8.16.

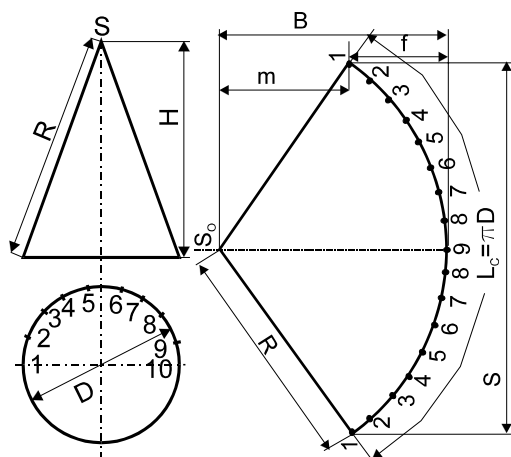


Fig. 8.16

- Desfășurata conului circular drept intersectat de un plan sub un unghi α față de axa sa, Fig. 8.17.

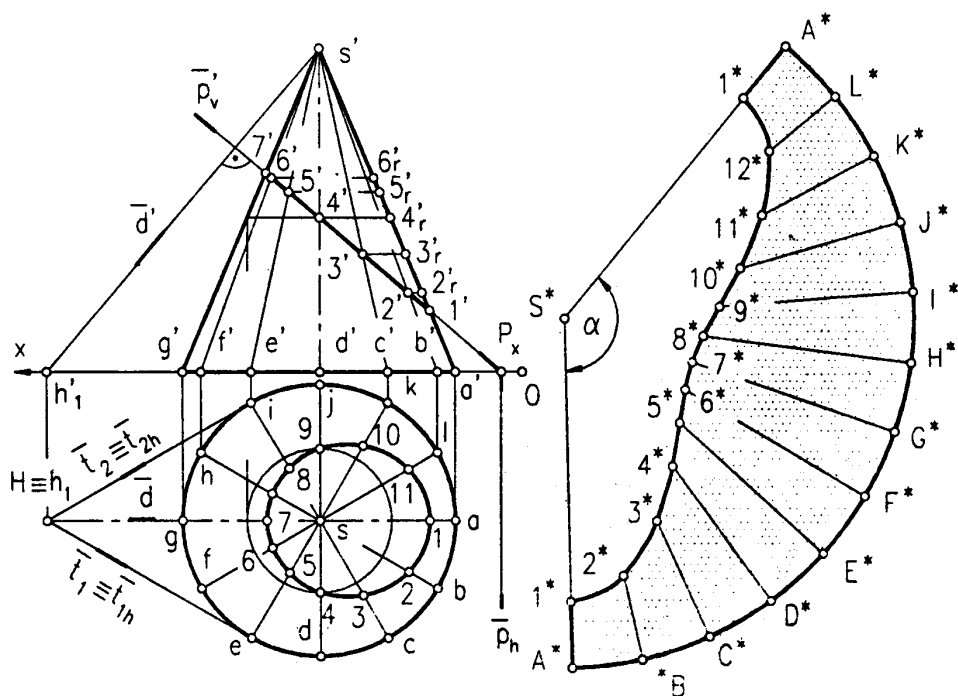


Fig. 8.17

- Desfășurata sferei:

* prin zone sferice (2 conuri, un cilindru și 4 trunchiuri de con),

Fig.8.18.

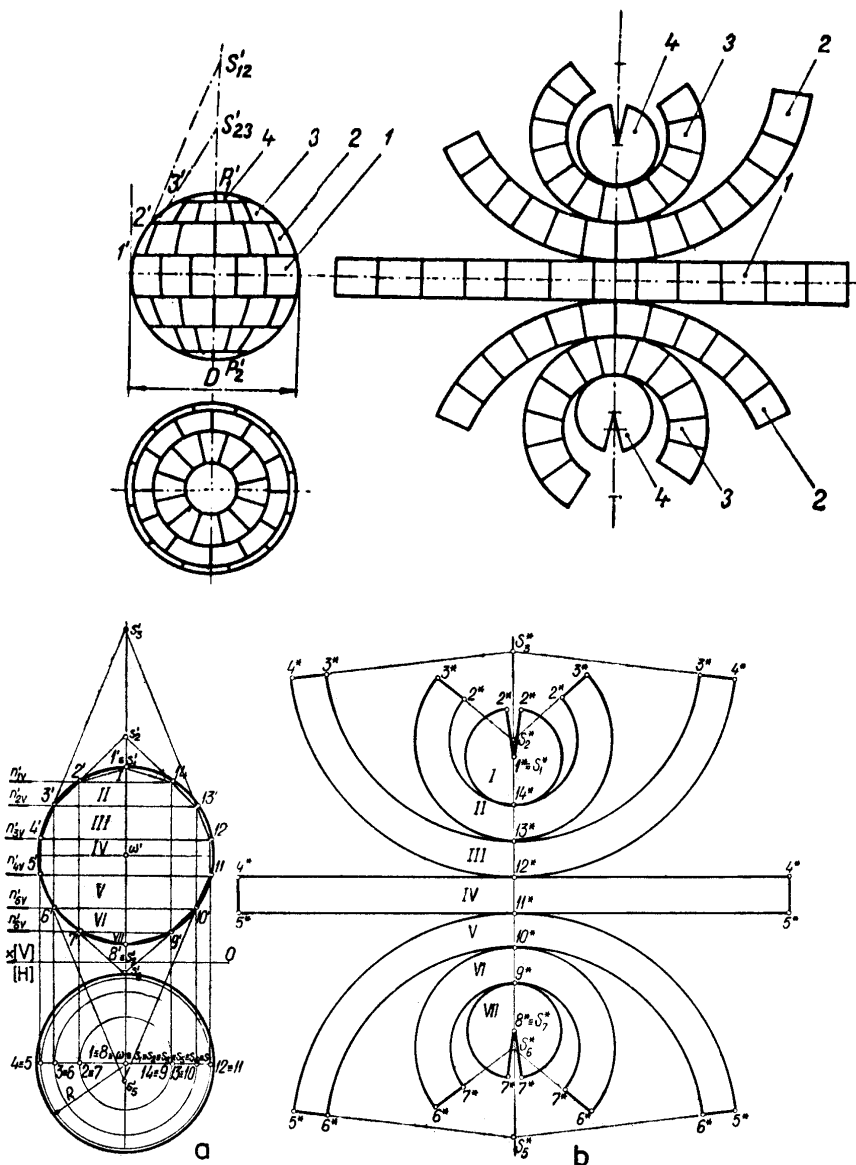


Fig. 8.18

* prin fusuri sferice (secțiuni mediane), Fig. 8.19.

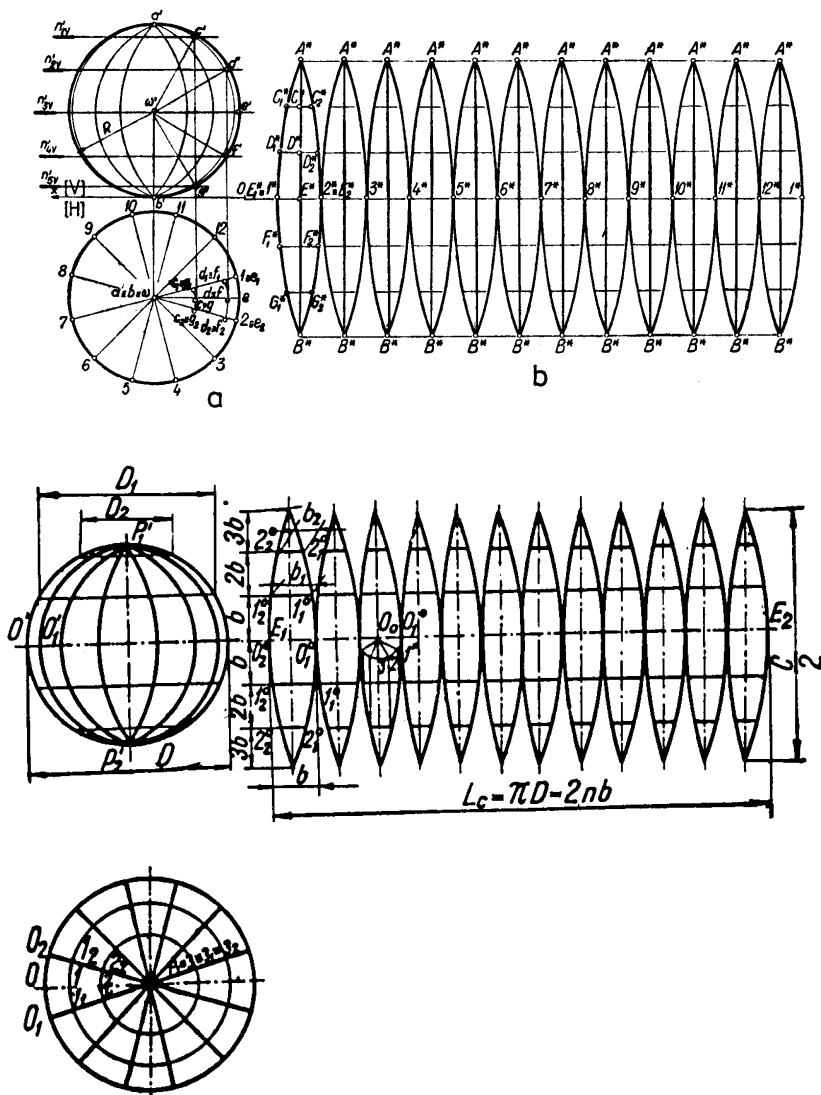


Fig. 8.19

9. INTERSECȚII DE CORPURI - DESFĂȘURATELE LOR

9.1 Intersecția dintre doi cilindri cu diametre diferite și axe perpendiculare

Pentru construirea desfășuratelor acestor cilindri este necesar ca în prealabil să se determine linia de intersecție a acestora, în care scop baza cilindrului mic se împarte în $2n$ părți egale (douăsprezece, în cazul nostru). Din punctele de împărțire se duc horizontale care intersectează horizontalele cu aceleași numere, în punctele $1_o, 2_o, 3_o$, etc.

Unind aceste puncte printr-o curbă continuă, se obține linia de intersecție care servește la desfășurarea celor doi cilindri conform indicațiilor din figură.

În desfășurata cilindrului A sunt determinate punctele $1'_o, 2'_o, 3'_o$, etc., care unite, dau curba de intersecție desfășurată a acestui cilindru. Desfășurata cilindrului mic B este dată în aceeași figură. Se observă că distanțele $I-II$; $II-III$, etc. din desfășurata A sunt egale cu lungimile arcelor $I-II$; $II-III$, etc. Lungimea cercului bazei, egală cu πD , a fost împărțită în același număr de părți egale (douăsprezece), iar pe verticalele corespunzătoare cu aceleași numere se iau lungimile marcate prin săgeți.

Deoarece corpurile intersectate sunt simetrice, în construcția desfășuratelor s-au notat numai un sfert din numărul de diviziuni, Fig.9.1.

9.2 Intersecția sub un unghi oarecare a doi cilindri de diametre diferite

Așa cum s-a arătat în Fig. 9.1, mai întâi se determină linia de intersecție după metoda folosită la intersecția dintre doi cilindri, apoi se procedează la construcția desfășuratelor celor doi cilindri.

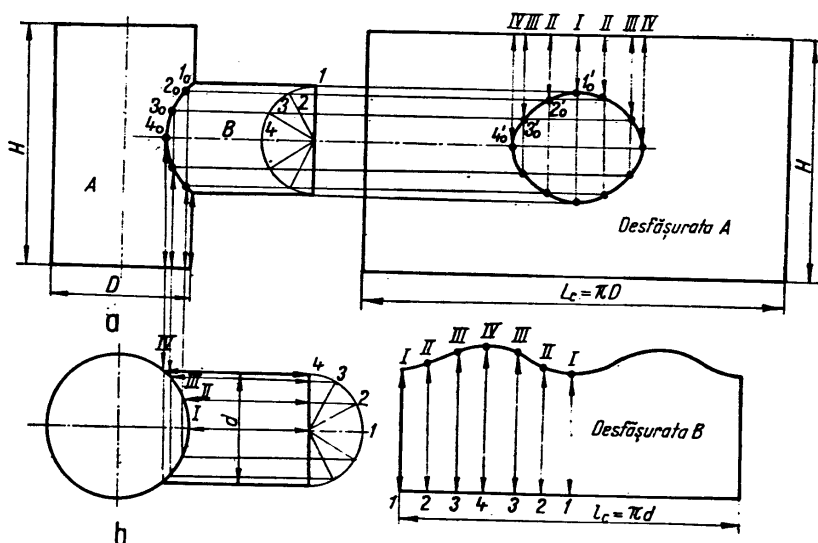


Fig. 9.1

Pe prelungirea extremității libere a cilindrului mic (linia $0 - 8$ perpendiculară pe axa cilindrului) se așează lungimea desfășurată a cercului cilindrului mic împărțită în același număr de părți egale ca și circumferința cilindrului mic. Prin punctele de diviziune se duc perpendiculare pe linia $0 - 8$ (paralele cu axa cilindrului mic). Se proiectează punctele a, b, c pe generatoarea cilindrului mic până se intersectează cu perpendicularele corespunzătoare duse din punctele $0, 1, 2$, obținându-se punctele $a', b', \text{etc.}$, care unite, dau curba de intersecție desfășurată pentru cilindrul mic.

Pentru a determina desfășurata tăieturii din cilindrul mare se procedează astfel: se trasează linia x, y , perpendiculară pe axa cilindrului mare în punctul e al liniei de intersecție. La intersecția acestei linii cu generatoarele cilindrului mare duse prin punctele j, h, g, f se obțin punctele I, II, III, IV .

Pe dreapta oarecare OO' se așează lungimile arcelor ab , bc , cd , etc., iar prin punctele obținute I , II , III , IV se duc perpendiculare pe OO' . Pe aceste perpendiculare, se ridică distanțele $I-a$, $II-b$, etc. și se coboară $I-j$, $II-h$, etc. Unind între ele punctele a , b , c , etc., se obține jumătate din tăietura cilindrului mare.

Având desfășuratele celor două tăieturi, se pot construi și desfășuratele cilindrilor intersectați, Fig. 9.2.

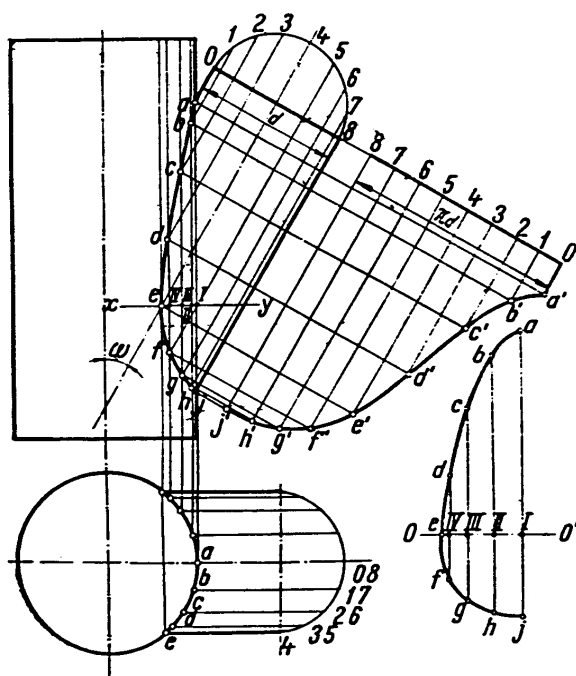


Fig. 9.2

9.3 Intersecția dintre un cilindru și o prismă

Construirea defășurătei prisme și a tăieturii în cilindru se realizează ca și în cazul intersecției a doi cilindri, cu simpla deosebire că în cazul de față, în loc de a împărți întregul perimetru al prisme în părți egale (așa cum s-a făcut la cilindrul mic din cazul anterior) se va împărți fiecare latură în părți egale conform Fig. 9.3.

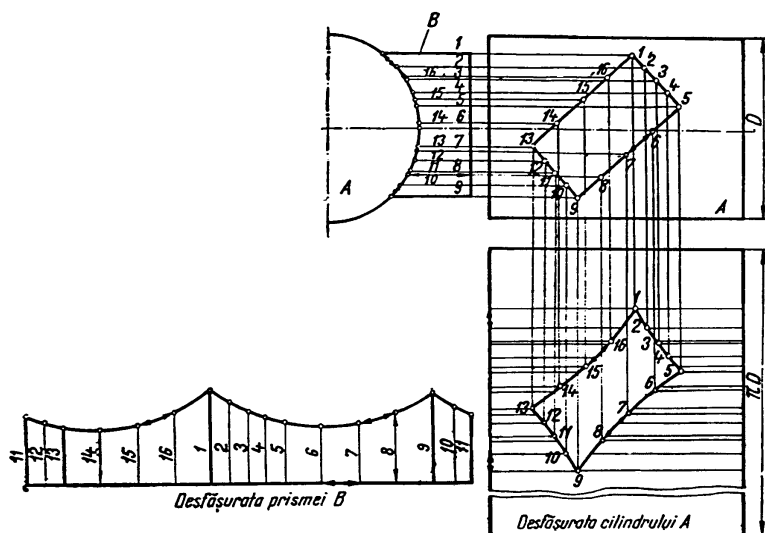


Fig. 9.3

9.4 Intersecția dintre un cilindru și un con ce pătrunde oblic în cilindru

Se trasează jumătate din cercul de bază al conului și se împarte într-un număr de părți egale (douăsprezece); din punctele de diviziune se duc perpendiculare pe diametrul cercului de bază al conului. Punctele de intersecție se unesc cu vârful S al conului. Proiecția corespunzătoare a acestor puncte ($1'$, $2'$, $3'$..., $12'$) se unesc cu vârful S_I . Punctele de intersecție ale razelor $S_I - 1'$, $S_I - 2'$, etc. cu cilindrul I , II , III , IV , etc. se proiectează în vederea din stânga, obținându-se linia de intersecție dintre cilindru și con. La fel se procedează și pentru determinarea liniei de intersecție de la ieșirea conului din cilindru.

Pentru a obține desfășurata conului se procedează la fel ca la desfășurarea unui con oblic. În Fig. 9.4 se arată jumătate din desfășurata cilindrului; se observă că în această construcție distanțele dintre dreptele

$I - II, II - III, III - IV$, etc. sunt luate de pe linia de intersecție.

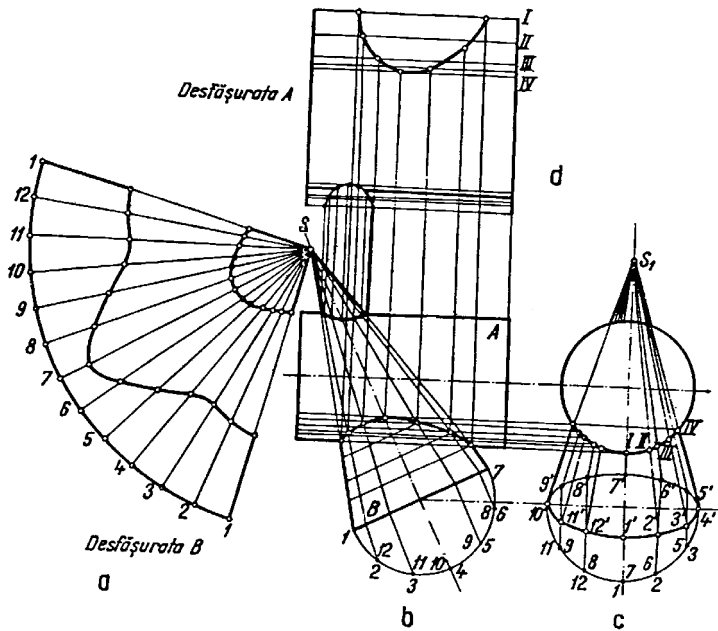


Fig. 9.4

9.5 Intersecția dintre un cilindru și un poliedru

În Fig. 9.5 se redă în două vederi intersecția dintre cilindrul B cu axa verticală și poliedrul A cu baza dreptunghiulară, a cărei axă este înclinată față de axa cilindrului (axele celor două corpuri nu se intersectează). Pentru construcția desfășuratelor acestor două corpuri se determină mai întâi linia de intersecție a fețelor poliedrului cu cilindrul dat. Aceasta se face astfel: se împarte cercul din proiecția plană a cilindrului B într-un număr oarecare de părți (în acest caz, jumătatea cercului s-a împărțit în 6 părți), iar prin punctele de diviziune $1, 2, 3, \dots, 7$ se duc razele corespunzătoare care intersectează perimetrul bazei poliedrului în punctele $I, II, III, \dots, VII$. Cu ajutorul compasului se duc aceste puncte pe orizontala xx , apoi se proiectează pe vederea laterală obținându-se punctele I', II', III' la intersecția razelor SI', SII' , etc. cu generatoarea cilindrului se determină

punctele $1', 2', 3'$, etc. Prin aceste puncte se duc orizontalele, care, prin intersecția lor cu verticalele ridicate din punctele de diviziune ale cercului din proiecția plană, determină punctele $1, 2, 3, \dots, 7$. Unind aceste puncte se obține curba de intersecție dintre cilindru și poliedru.

Desfășuratele cilindrului și poliedrului sunt cunoscute. Pentru a afla desfășurata secțiunii de intersecție de pe poliedru, se determină pe poliedrul desfășurat punctele: $I, II, III, \dots, IX$. Pe razele care unesc vârful S cu punctele $I, II, III, \dots, IX$, se așează distanțele $I' - I', II' - 2', III' - 3'$, etc., determinându-se astfel punctele $1, 2, 3$, etc., care unite dau tăietura făcută de cilindru în poliedru.

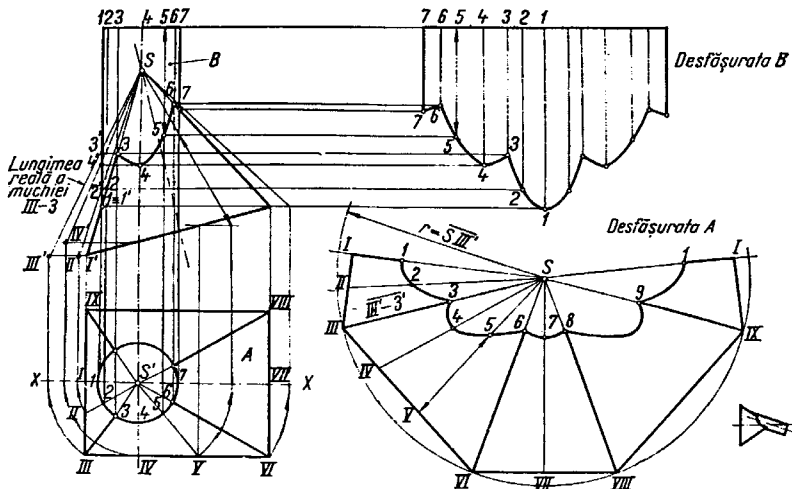


Fig. 9.5

9.6 Intersecția unui cilindru cu o sferă

Deoarece desfășurata sferei intersectată de alte corpuri se reduce la desfășurarea sferei intersectată de mai multe plane, înainte de a trece la descrierea determinării desfășuratelor ansamblurilor respective, în Fig.9.6.a se arată sfera intersectată de un plan și desfășurarea acesteia. Un plan intersectează meridianele sferei în punctele $1_1, 2_1, 3_1$, etc. Un plan intersectează meridianele sferei în punctele $1_1, 2_1, 3_1$, etc. Prin punctele de

intersecție $1'_1, 2'_1, 3'_1$, etc. se duc drepte orizontale ce intersectează meridianul OP'_1 în punctele $1''_1, 2''_1, 3''_1$, etc. Diferitele puncte de pe linia de intersecție pe desfășurată se obțin luând arcele 00_1 egal cu $00'_1$, 11_1 egal cu $01''_1$, 22_1 egal cu $02''_1$, etc. punctele intermediare se obțin ducând plane de intersecție suplimentare $[P'_1 4g P'_2]$, cu care se poate determina punctul 4_1g . Desfășurarea sferei se construiește cu una din metodele prezentate în capitolul anterior.

În Fig. 9.6.b este prezentat cazul general de intersecție dintre un cilindru și o sferă când axa cilindrului nu trece prin centrul sferei, ci intersectează axa acesteia într-un punct oarecare C_1 . Pentru construirea desfășuratei acestui ansamblu, este necesar ca în prealabil, să se determine linia de intersecție a corpurilor. Aceasta se obține folosind una din următoarele metode:

- a) cu ajutorul compasului, din C_1 se descrie un arc de cerc ce intersectează sfera în punctele M_S și cilindrul în punctele M_Z . Un punct oarecare M de pe linia de intersecție se obține prin intersecția dreptelor duse prin punctele M_S și M_Z ($M_S M_S, M_Z M_Z$).
- b) prin punctele de împărțire ale cercului de bază al cilindrului se duc generatoarele care intersectează conturul sferei în punctele $1_1, 2_1$, etc. Din aceste puncte se duc drepte verticale ce intersectează axa sferei în punctele $1_2, 2_2, 3_2$, etc., iar razele $C3_2, C2_2$, etc. și cu centrul în C (centrul sferei) se descriu arce de cerc ce întâlnesc generatoarele cilindrului în punctele $1_0, 2_0, 3_0$, etc. Unind punctele $1_0, 2_0, 3_0$, etc. printr-o curbă continuă, obținem linia de intersecție.

Având linia de intersecție (lungimile reale ale generatoarelor cilindrului) în Fig. 9.6.b se arată jumătate din desfășurata cilindrului. Pentru a obține desfășurata sferei se procedează ca și în cazul Fig. 9.6.a, cu

deosebirea că în cazul de față, proiecția liniei de intersecție nu este o dreaptă, ci o linie curbă.

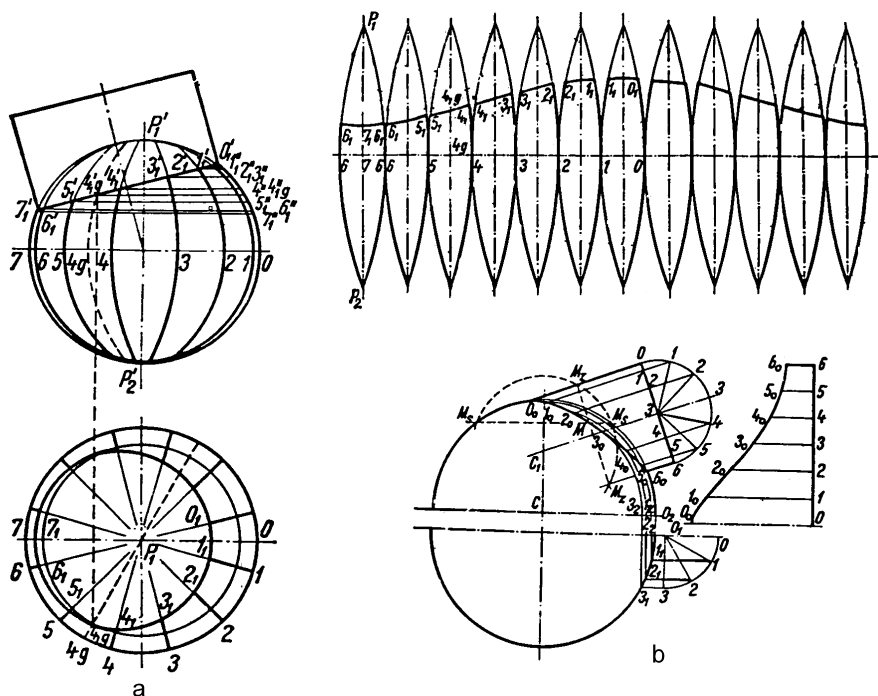


Fig. 9.6

9.7 Intersecția dintre un con cu o sferă

În cazul în care axa conului trece prin centrul sferei Fig. 9.7.a, desfășuratele conului și sferei se reduc la cazul intersectării acestora de către un plan. Se consideră cazul general când axa conului nu trece prin centrul sferei, ci intersectează axa acesteia într-un punct oarecare C_1 . Pentru construcția desfășuratelor conului și sferei trebuie determinată linia de intersecție a acestora.

Din punctul C_1 , cu compasul se descrie un arc de cerc care intersectează sfera în punctele M_S și conul în punctele M_K . Un punct

oarecare M , de pe linia de intersecție, se obține prin intersecția dreptelor duse prin punctele M_S și M_K ($M_S M_S$, $M_K M_K$). În continuare, baza conului se împarte într-un număr de părți egale, iar prin punctele de diviziune $0, 1, 2$, etc. se duc generatoarele conului ce determină, la intersecția lor cu linia de intersecție a celor două corpuri, punctele $0_O, 1_O, 2_O$, etc. Distanța de la punctele obținute până la vârf, și respectiv până la baza conului, determină lungimea reală a generatoarelor ce sunt transpuse cu ajutorul compasului (respectând numerele de ordine) – Fig. 9.7.b, unde este reprezentată desfășurata conului.

Desfășurata sferei se construiește după metoda descrisă în Fig. 8.6.a, cu deosebirea că în acest caz, linia de intersecție nu este o linie dreaptă, ci o linie curbă.

9.8 Racordarea unei secțiuni circulare la o secțiune pătrată

- Cazul în care latura pătratului a este mai mare decât diametrul D al cercului

Pentru determinarea desfășuratei ansamblului se procedează astfel: cercul de diametru D se împarte în $2n$ părți egale (douăsprezece), obținându-se punctele $I, 2, 3$, etc.

Construcția este formată din patru elemente plane: triunghiurile $I - I - II$; $II - 4 - III$, etc. și din patru conuri eliptice înclinate identice, având baza circulară comună, cu diametrul D și vârfurile I, II, III și IV .

Determinarea desfășuratei se reduce la determinarea elementelor plane și conice. În Fig. 9.8 sunt determinate lungimile reale ale generatoarelor elementelor conice, unde segmentul AV este egal cu înălțimea h , iar segmentele $A1, A2, A3$, etc. sunt egale cu segmentele $II 1, II 2$, etc. lungimile reale ale generatoarelor sunt $IV, 2 V$, etc.

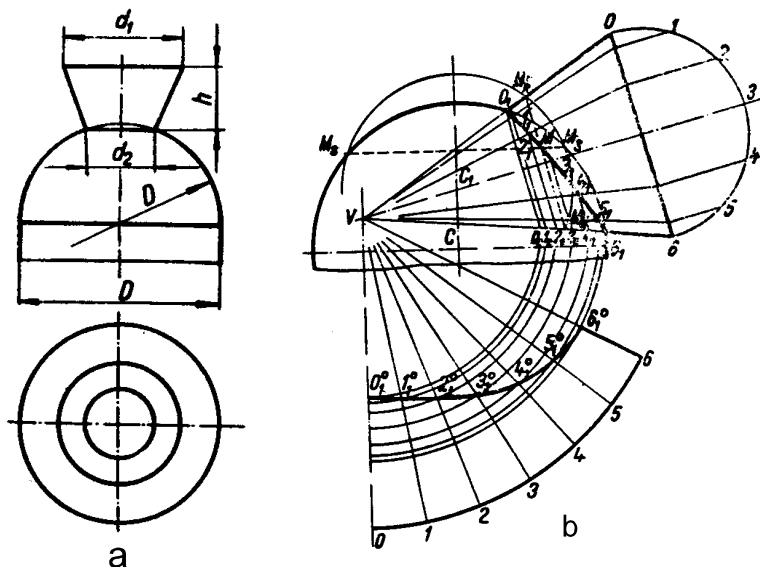


Fig. 9.7

În Fig. 9.8 se ia segmentul $Al = h = m$, iar din punctele A și I , cu ajutorul compasului se descriu arce de cerc cu razele IV și $a/2$, care se intersectează în punctul II . Cu centrul în II se descrie un arc cu raza $II\ 2 = V\ 2$. Cu centrul în I și cu raza $r = I2$ se descrie un arc de cerc care intersectează pe precedentul în punctul 2 . Construcția se continuă în același mod până când se determină întreaga desfășurată. Analitic, parametrii racordării se pot determina folosind următoarele relații:

$$r = \frac{\pi D}{2n}; \quad m = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - \frac{D}{2}\right)^2 + h^2}$$

$$l_k = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - \frac{D}{2} |\sin \varphi_K|\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - \frac{D}{2} |\cos \varphi_K|\right)^2 + h^2}$$

unde: $2n$ – numărul de părți în care se împarte cercul;

$$\gamma_K = K\varepsilon, \text{ unde } \varepsilon = \frac{360^\circ}{2n} \text{ (unghiul la centru);}$$

m – înălțimea feței triunghiului;

K – numărul de ordine al punctului de împărțire a cercului;

l_K – lungimea reală a muchiilor.

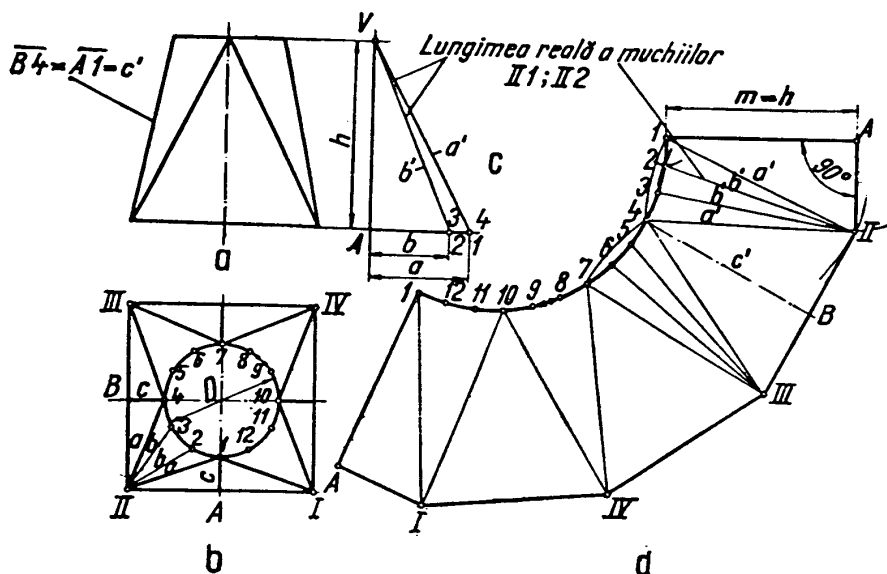


Fig. 9.8

- Cazul în care latura pătratului a este mai mică decât diametrul D al cercului.

Se procedează la fel ca și în cazul în care latura pătratului este mai mare decât diametrul D al cercului, Fig.9.8.

- Cazul în care latura pătratului a este egală cu diametrul D al cercului
- Construcția desfășurată acestui ansamblu (Fig.9.9) este similară cu cea descrisă la primul caz. Relațiile analitice pentru determinarea parametrilor racordării sunt:

$$r = \frac{\pi D}{2n}; \quad m = h; \quad l_K = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 \left[3 - 2(|\sin \varphi_K| + |\cos \varphi_K|)\right] + h^2}$$

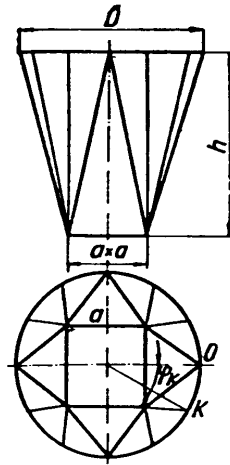


Fig. 9.9

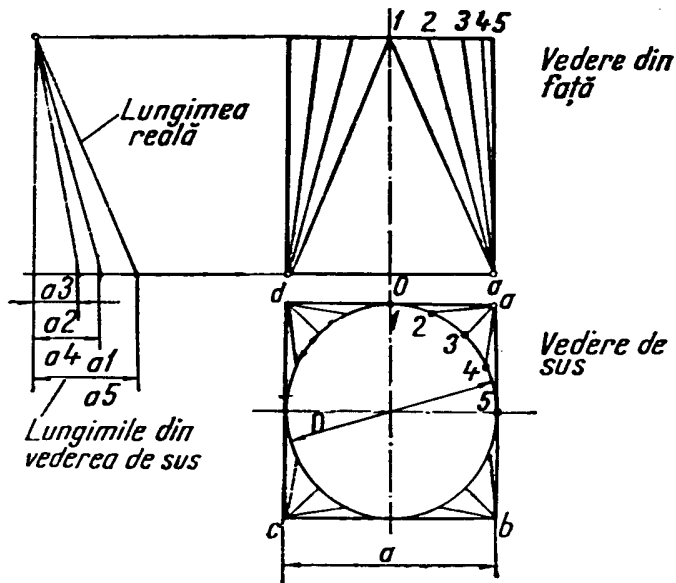


Fig. 9.10

• Cazul în care latura pătratului a este egală cu diametrul D al cercului. Construcția desfășurării acestui ansamblu (Fig.9.10) este similară cu cea descrisă la primul caz. Relațiile analitice pentru determinarea parametrilor racordării sunt:

$$r = \frac{\pi D}{2n}; \quad m = h; \quad l_k = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 \left[3 - 2(|\sin \varphi_k| + |\cos \varphi_k|)\right] + h^2}$$

10. LINII, SUPRAFETE ȘI CORPURI ELICOIDALE

10.1 Linii elicoidale

10.1.1 Elicea cilindrică

Elicea cilindrică sau linia elicoidală cilindrică este curba trasată pe suprafața unui cilindru care intersectează generatoarele cilindrului sub un unghi constant. Când cilindrul este de rotație, elicea trasată se numește *elice circulară*. Distanța dintre două puncte succesive de intersecție a elicei cu aceeași generatoare se numește *pas* și se notează cu p . *Unghiul elicei* este unghiul constant pe care îl face tangenta la elice cu planul unei secțiuni drepte.

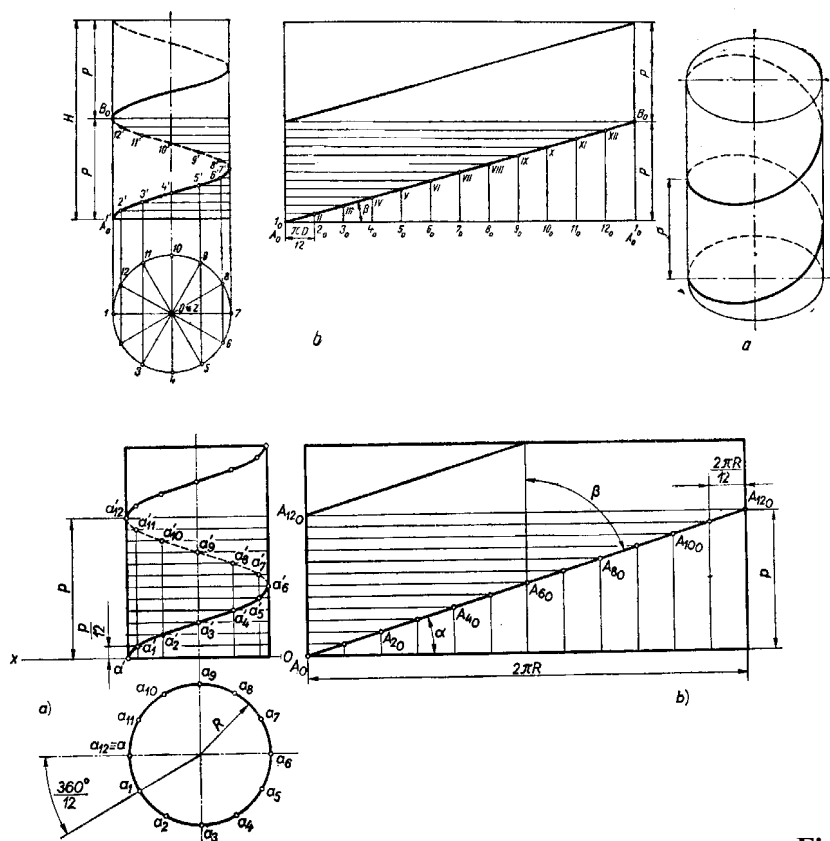


Fig. 10.1

Pentru a trasa, pe cilindrul drept cu bazele cercuri cu centrele în $\Omega_1 (\omega_1, \omega'_1)$ și $\Omega_2 (\omega_2, \omega'_2)$ – Fig. 10.1.a, elicea care este generată prin deplasarea punctului $A (a, a')$ se împart în douăsprezece părți egale atât cercul de bază al cilindrului, $\left(aa_1 = a_1 a_2 = \dots = a_{10} a_{11} = a_{11} a_{12} = \frac{360^\circ}{12} \right)$, cât și pasul p al elicei $\left(a'1 = 12 = \dots = 11 a'_{12} = \frac{p}{12} \right)$. În mod succesiv, considerându-se deplasările proporționale, se determină proiecțiile verticale $a', a'_1, \dots, a'_{12}$, prin care se trasează elicea ținând seama de vizibilitate. Prin simetrie, se trasează elicea și pe cealaltă porțiune a cilindrului. Pentru a desfășura elicea, se desfășoară cilindrul și se transpun pe desfășurată punctele prin care s-a trasat elicea. Desfășurata elicei este linia dreaptă $A^*A^*_{12}$ conform Fig. 10.1.b.

10.1.2 Elicea conică

Se numește elice conică, curba generată de un punct care se deplasează de-a lungul unei generatoare a unui con circular drept, în timp ce conul execută o mișcare de rotație în jurul axei sale, traiectoria punctului fiind proporțională cu unghiul de rotație.

Pentru construcția elicei, pe conul circular drept cu baza un cerc, cu centrul în $\Omega (\omega, \omega')$ și vârful în $S (s, s')$ – Fig. 10.2.a, se împart în douăsprezece părți egale atât cercul de bază al conului în proiecție orizontală ($12_1 1_1 = 1_1 2_1 = \dots = 11_1 12_1$) cât și pasul p în proiecție verticală ($12'_1 1'_1 = 1'_1 2'_1 = \dots = 11'_1 12'_1$). Cu ajutorul liniilor de ordine se determină în proiecție orizontală $1, 2, \dots, 11, 12$. Cu vârful compasului în s se descrie un arc de cerc din 1 până la intersecția cu $s1_1$ și se determină 1_0 . Cu linie de ordine din 1_0 se determină, pe paralela din $1'$ la axa Ox , proiecția verticală $1'_0$. Similar se determină și celelalte puncte ale elicei, notate în

figură numai pe porțiunea pasului p . Prin desfășurarea conului se obține și transformata prin desfășurare a elicei, care este o spirală Arhimede, Fig.9.2.b.

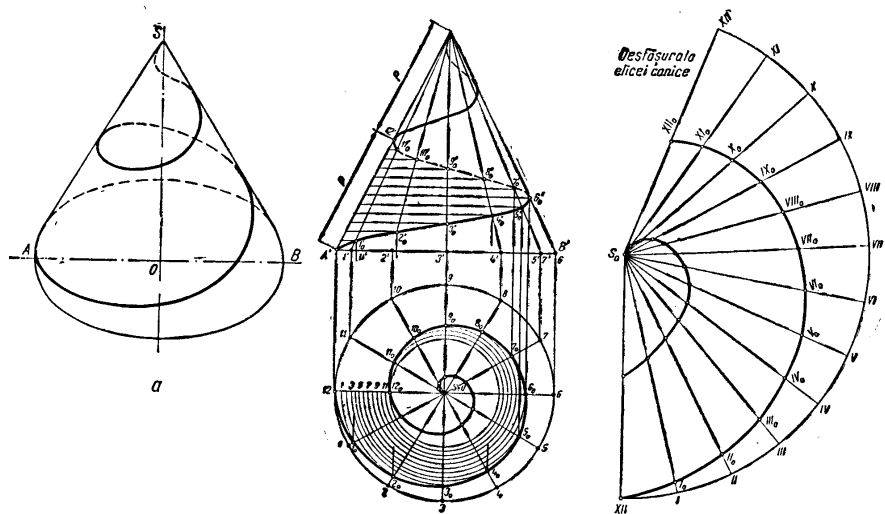


Fig. 10.2

10.1.3 Elicea sferică

Se numește elice sferică curba generată de un punct care se deplasează pe cercuri paralele ale unei sfere, în timp ce sfera execută o mișcare de rotație în jurul unei axe perpendiculare pe planele paralelelor, traiectoria punctului fiind proporțională cu unghiul de rotație.

Pentru construcția elicei pe sfera cu centrul în $\Omega (\omega, \omega')$ – Fig. 10.3, se poate utiliza semisfera superioară, pe care se împarte sfertul de cerc $I'13'$ în douăsprezece părți egale ($1'2'=2'3'=.....=12'13'=\frac{90^\circ}{12}$). Cu linie de ordine se determină în proiecție orizontală $1, 2,....., 12, 13$ pe ωg . Conturul aparent al sferei în proiecție orizontală se împarte în același număr de părți ($ab=bc=.....=pa=\frac{360^\circ}{12}$).

Cu vârful compasului în ω și cu raza $\omega 2$ se trasează un arc de cerc, care întâlnește ωb în b_2 . Cu linie de ordine din b_2 se determină, pe paralela din $2'$ la axa Ox , proiecția verticală b'_2 . Similar se determină și celelalte puncte ale elicei sferice, care se trasează ținând seama de vizibilitate. Prin simetrie față de $a_1'l'$, se trasează elicea și în semisfera interioară.

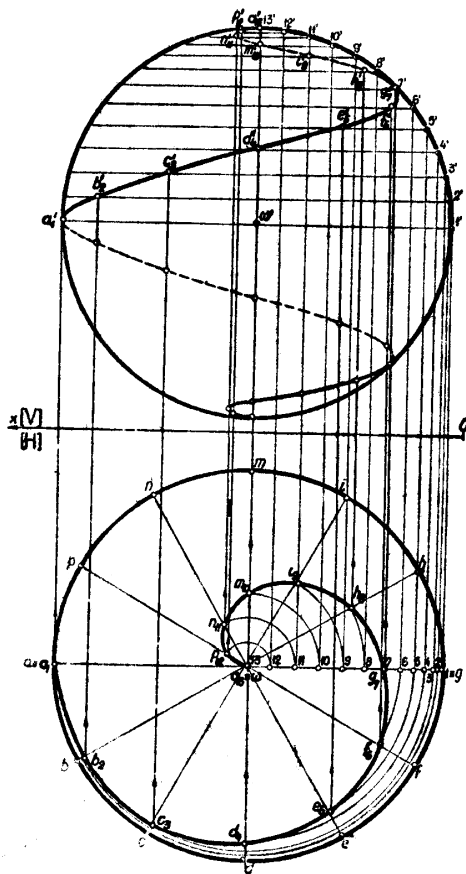


Fig. 10.3

10.2 Suprafețe elicoidale

Suprafețele elicoidale se pot încadra foarte bine și la suprafețe curbe. Ele au particular numai aceea că punctele elementului generator al suprafeței fie riglat, fie neriglat, se deplasează după linii elicoidale. Având în vedere larga lor aplicație în tehnică vor fi expuse detaliat.

Suprafețele elicoidale riglate pot fi strâmbе, atunci când segmentul generator formează cu axa liniei elicoidale un unghi diferit de 90^0 și drepte când segmentul generator face 90^0 cu axa.

10.2.1 Suprafața elicoidală strâmbă

Este generată de un segment a cărui dreaptă este concurentă cu axa (segmentul AB (ab , $a'b'$) din Fig. 10.4. Pasul este p și diferența cotelor punctelor A și B este de $3p/12$, această diferență păstrându-se tot timpul.

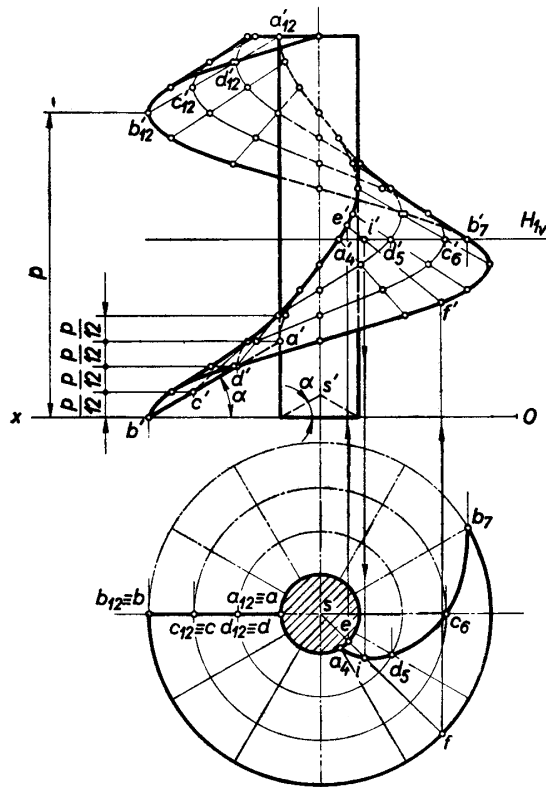
Dacă această diferență nu este un multiplu de $p/12$, în general p/n , atunci apar mai multe linii de construcție, necesitând o mai mare atenție în timpul lucrului. Pe linia elicoidală a punctului A (a , a'), acesta ajunge după 360^0 în A_{12} (a_{12} , a'_{12}), iar punctul B (b , b'), pe linia elicoidală respectivă, ajunge în B_{12} (b_{12} , b'_{12}).

În proiecție orizontală, suprafața generată se proiectează după o coroană circulară, la care cercul mic are diametrul cilindrului miez și diametrul cercului mare egal cu diametrul cilindrului pe care se deplasează punctul B .

Proiecția verticală cere mai multă atenție, în sensul că se trasează linia elicoidale pentru cât mai multe puncte ale segmentului generator AB . Înfășurătoarea acestor linii elicoidale va fi protecția verticală a suprafeței. În acest scop, în Fig. 10.4 alături de punctele A și B mai sunt luate și punctele C (c , c') și D (d , d'), care, ajung în C_{12} (c_{12} , c'_{12}) și D_{12} (d_{12} , d'_{12}). Odată cu trasarea celor patru linii elicoidale se pot trasa și diferitele poziții ale generatoarei și apoi înfășurătoarea acestora, obținând astfel proiecția verticală a suprafeței.

Dacă diametrul cilindrului miez este redus la axa de simetrie, se poate ușor vedea că generatoarea se deplasează pe această axă și pe linia elicoidală a lui B , care sunt cele două directoare.

Secțiunea cu un plan perpendicular pe axa suprafeței elicoidale este o spirală Arhimede. Fie $[H_I]$ un astfel de plan, care este intersectat de liniile elicoidale ale punctelor A și B , respectiv $A_4(a_4, a'_4)$ și $B_7(b_7, b'_7)$. Pozițiile intermediare ale generatoarei intersectează planul $[H_I]$ în punctele $C_6(c_6, c'_6)$ și $D_5(d_5, d'_5)$. Dacă nu sunt suficiente punctele pentru trasarea curbei se pot lua și alte poziții ale generatoarei.



107

În Fig. 10.4 este luată poziția EF a cărei proiecție orizontală este ef , cu proiecția verticală $e'f'$ care intersectează urma verticală H_{Iv} în punctul i' , de unde se găsește i , așa cum arată săgeata. Punctele A_4 , I , D_5 , C_6 și B_7 determină curba de secțiune.

Din cele două mișcări proporționale (rotație și translație) în lungul axei cilindrului, atunci când generatoarea înaintează planul de nivel $[H_I]$, punctul de intersecție execută a treia mișcare de translație, radială, care în proiecție orizontală generează curba $a_4id_5c_6b_7$. Având în vedere mișcările proporționale de rotație și de translație radială, curba de secțiune cu planul $[H_I]$ este o spirală Arhimede.

10.2.2 Suprafața elicoidală strâmbă generată de o dreaptă care nu intersectează axa

Fie dat segmentul de dreaptă, în poziție inițială AB (ab , $a'b'$) tangent la cilindrul indicat în Fig. 10.5, a cărui rază este perpendiculara comună dintre axă și generatoare. Elicea generată de punctul de tangență A (a , a') poartă numele de *elice colier*. Dreapta generatoare nu este tangentă la linia elicoidală a punctului A (a , a').

Trasarea suprafeței elicoidale se poate face ca și în cazul precedent sau trasând liniile elicoidale ale punctelor A și B , diferitele poziții ale generatoarei și apoi, înfășurătoarea acestora.

Deoarece generatoarea, în diferitele ei poziții, făcând același unghi α cu un plan perpendicular pe axa suprafeței (planul $[H]$) are con director de rotație. În Fig.10.5 se arată modul de găsim a mărimii unghiului α și se pune în evidență conul director cu vârful în S (s , s'). De asemenea se vede în proiecție orizontală secțiunea cu planul $[H_I]$, care, de data aceasta nu este o spirală Arhimede.

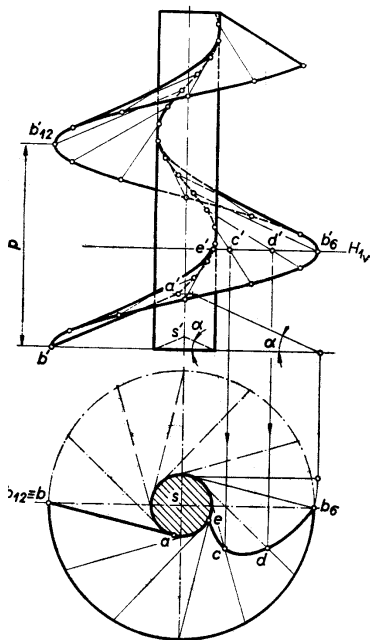


Fig. 10.5

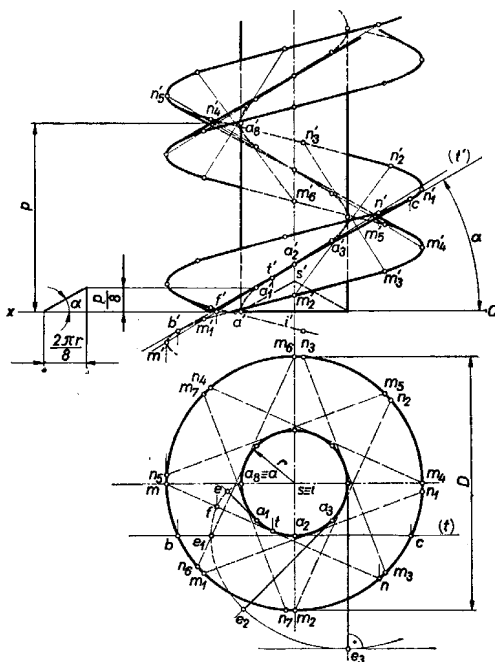


Fig. 10.6

Suprafețele elicoidale, în general, nu sunt desfășurabile. În cazul special când dreapta generatoare este tangentă la elicea colier, suprafața care apare poate fi desfășurată și este prezentată în Fig. 10.6.

10.2.3 Suprafața elicoidală dreaptă generată de un segment a cărui dreaptă face un unghi de 90^0 cu axa și este concurrentă cu aceasta

Fie pe Fig. 10.7 segmentul AB ($ab, a'b'$), punctul A fiind pe suprafața cilindrului miez de diametru d . În deplasarea lui elicoidală, segmentul rămâne tot timpul paralel cu planul $[H]$, deci, va genera o suprafață cu plan director, care, în cazul de față, este un **conoid elicoidal**.

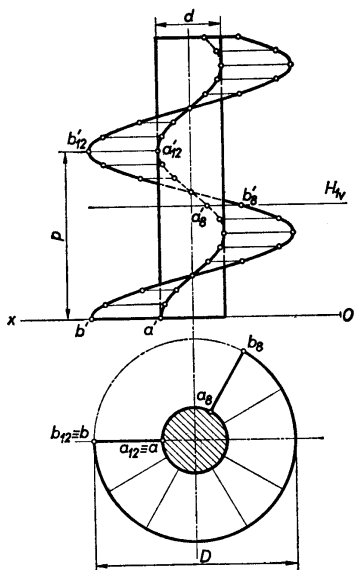


Fig. 10.7

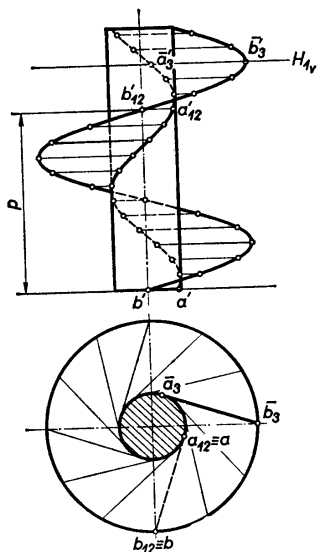


Fig. 10.8

Reprezentarea este mai simplă decât la suprafețele elicoidale simple ca la suprafețe elicoidale strâmbe. Când segmentul generator ajunge în poziție de capăt, cele două linii elicoidale ale punctelor A și B , în proiecție verticală, trec prin proiecția segmentului, care este un punct situat pe axă. Secțiunea cu un plan perpendicular pe axă este după o poziție a generatoarei. De exemplu, planul $[H_1]$ intersectează suprafața elicoidală după A_8B_8 ($a_8b_8, a'_8b'_8$).

10.2.4. Suprafața elicoidală generată de o dreaptă care nu este concurentă cu axa, dar face un unghi de 90° cu aceasta

Dreapta rămâne în toate pozițiile paralelă cu un plan perpendicular pe axă și se reazemă tot timpul pe două linii elicoidale. Pe elicea colier generată de punctul A de tangență a generatoarei cu cilindrul și pe elicea punctului B , a doua extremitate a segmentului generator, suprafața obținută este un *cilindroid elicoidal* (Fig. 10.8).

În cazul de față, în proiecție verticală, când generatoarea ajunge în poziție de capăt, apar trecând prin aceste puncte (pe generatoarele de contur aparent ale cilindrului) și cele două linii elicoidale.

În baza celor prezentate, conoidul și cilindroidul elicoidal pot fi recunoscute și numai după proiecțiile lor verticale. Secțiunea cu un plan $[H]$ perpendicular pe axă se face după poziția generatoarei care se află în acel plan. Pe figură se observă indicat planul $[H_1]$ prin urma verticală și intersecția acestuia cu suprafața elicoidală după poziția generatoarei A_3B_3 ($a_3b_3, a'_3b'_3$).

10.3 Corpuri elicoidale (elipsoide)

Corpurile elicoidale sunt generate de suprafețe ale căror puncte se rotesc după linii elicoidale. De cele mai multe ori acestea fac corp comun cu un cilindru miez, așa cum este în cazul filetelor, al roților dințate cilindrice cu dinți elicoidali, al stâlpilor cu nervură elicoidală pentru fundații, etc.

Uneori, un corp adus sub formă elicoidală este lipit de un cilindru miez, formând un organ pentru o anumită instalație de transport (încărcare, descărcare). Alteori pentru același scop, se întrebuințează șuruburi cu pas sau cu diametru variabil. Apoi sunt cazuri când corpurile elicoidale se întrebuințează fără a fi rigid fixate de un cilindru (arcuri și conducte elicoidale, etc.).

Alteori, elementul generator are un anumit profil, determinat hidrodinamic sau aerodinamic, pentru a asigura o rezistență minimă la înaintare și o tracțiune sau o împingere maximă. Este cazul elicelor de vapoare și de avioane, unde, pentru a obține un randament maxim, elementul generator își schimbă mărimea și pasul.

O suprafață elicoidală generată de un dreptunghi, cu dimensiuni corespunzătoare, în cazul când panta este mică, poate servi la urcarea și coborârea autovehiculelor la garajele colective cu 1 – 4 nivele sau chiar mai multe. Când panta depășește o anumită limită, pe partea superioară pot fi practicate trepte pentru urcare și coborâre (la scările elicoidale sau la racordarea a două pante orientate în direcții opuse).

La corpurile elicoidale generate de suprafețe poligonale, problema revine la a intersecta suprafețele elicoidale generate de dreptele din care fac parte laturile poligonului.

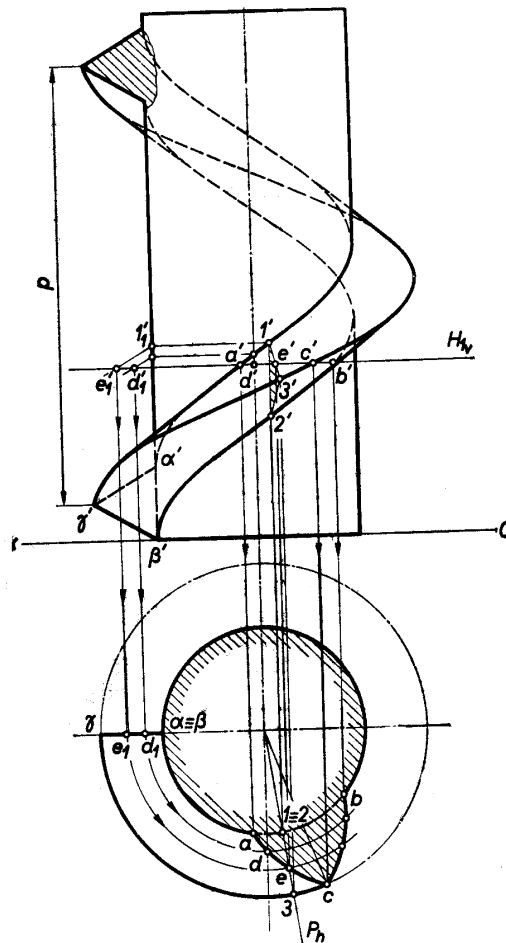


Fig. 10.9

Astfel, nervura elicoidală generată de triunghiul $(\alpha\beta\gamma, \alpha'\beta'\gamma')$ – Fig.10.9 are fața generată de latura $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$ identică, tot timpul, cu suprafața laterală a cilindrului și limitată de liniile elicoidale ale extremităților segmentului generator. Celelalte două suprafețe elicoidale sunt generate de dreptele din care fac parte laturile $(\alpha\gamma, \alpha'\gamma')$ și $(\beta\gamma, \beta'\gamma')$ ale triunghiului generator și au, ca linie de intersecție, linia elicoidală a vârfului (γ, γ') .

De cele mai multe ori, în cazul acestui profil, pasul este egal cu latura triunghiului, rezultând filetul triunghiular cu un început – Fig. 10.10.

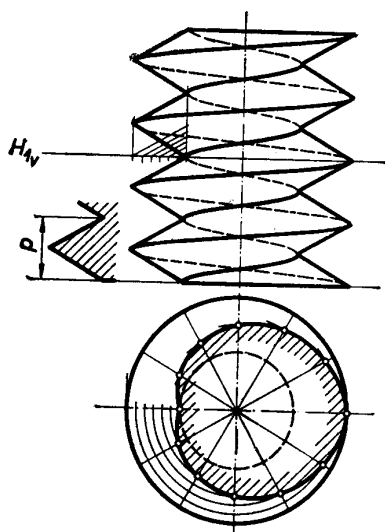


Fig. 10.10

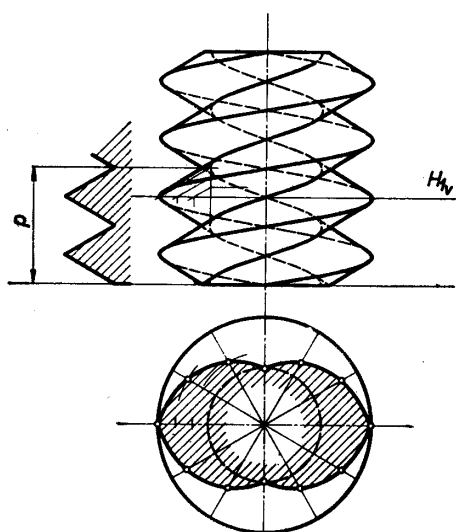


Fig. 10.11

Uneori, se cere ca filetele să aibă două începuturi, pasul fiind de două ori un plin și un gol. Trasarea și secționarea se fac la fel ca la figurile anterioare. Având în vedere însă că sunt două nervuri elicoidale, fiecare nervură va fi mărginită în secțiune de două arce, deci în total de patru arce de spirală Arhimede, Fig. 10.11.

10.4 Profilul filetelor

După cum se știe, profilul filetelor este de mai multe forme.

În Fig. 10.12 este prezentat un filet pătrat pe stânga, cu un început, nervura elicoidală fiind limitată de două porțiuni de suprafețe cilindrice, cuprinse între liniile elicoidale respective și de două suprafețe elicoidale drepte. În tot timpul mișcării, pătratul generator se găsește într-un plan care trece prin axa cilindrului, iar două dintre laturile pătratului generează suprafețe elicoidale drepte.

Fiind vorba de un filet cu un singur început, pasul p este un plin și un gol. Secțiunea cu un plan perpendicular pe axă este după pozițiile generatoarelor celor două suprafețe elicoidale, care sunt cuprinse în acest plan.

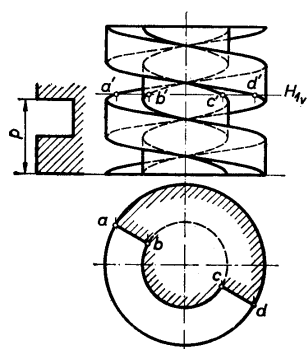


Fig. 10.12

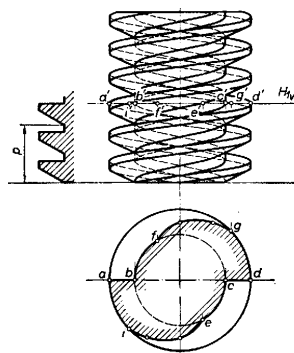


Fig. 10.13

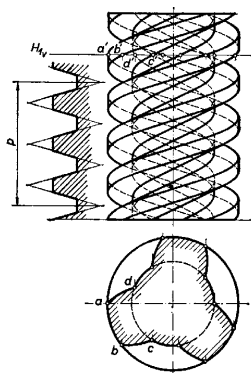


Fig. 10.14

Profilul filetelor poate să fie și trapez dreptunghic (Fig. 10.13). La un astfel de filet pe dreapta cu două începuturi, pasul p cuprinde două plinuri și două goluri. Cele două suprafețe elicoidale, care mărginesc nervurile, sunt una dreaptă și una strâmbă.

În secțiunea cu planul $[H_1]$, suprafețele elicoidale drepte sunt mărginite de segmentele AB ($ab, a'b'$) și CD ($cd, c'd'$). În ceea ce privește suprafețele elicoidale strâmbe, secțiunea lor cu un plan perpendicular pe axă este mărginită de arcele de spirală Arhimede EI ($ei, e'i'$) și FG ($fg, f'g'$). În Fig. 10.14 este indicat un filet cu profil trapez isoscel cu trei începuturi, adică pasul p cuprinde trei plinuri și trei goluri, suprafețe elicoidale care mărginesc nervurile sunt suprafețe elicoidale strâmbe.

Pe figură este executată și secțiunea cu planul de nivel $[H_1]$, perpendicular pe axă fiind indicate pentru una dintre nervuri, punctele A (a, a'), B (b, b'), C (c, c') și D (d, d'), unde liniile elicoidale corespunzătoare intersectează planul $[H]$. Numărul de începuturi se poate citi cu mare ușurință în proiecție orizontală, unde apar, pentru fiecare nervură, câte două arce de spirală Arhimede.

În Fig. 10.15 este prezentat corpul elicoidal care rezultă prin înfășurarea unei bare cilindrice sau sârme de oțel pe un cilindru, asigurându-se același pas p între spire. În acest mod s-a obținut arcul elicoidal cilindric, care poate fi considerat și ca rezultatul deplasării centrului unei sfere, de diametru egal cu diametrul barei cilindrice (sârmei), după linia elicoidală de pas p și de diametru corespunzător.

Proiecțiile diferitelor poziții sunt trasate cu linii subțiri. Înfășurătoarea acestora va fi reprezentarea cilindrului adus sub formă elicoidală. Ea este tangentă la fiecare sferă după cercul mare care aparține planului ce trece prin centrul sferei și este normal la axa elicoidală.

Pe planul cu care este paralelă axa, după fiecare 180° , înfășurătoarea are puncte de întoarcere. Conturul corespunzător semispirelor din spatele planului de front dus prin axă, pe porțiunea suprapusă a înfășurătoarei, precum și arcele dintre cele două puncte de întoarcere sunt nevăzute.

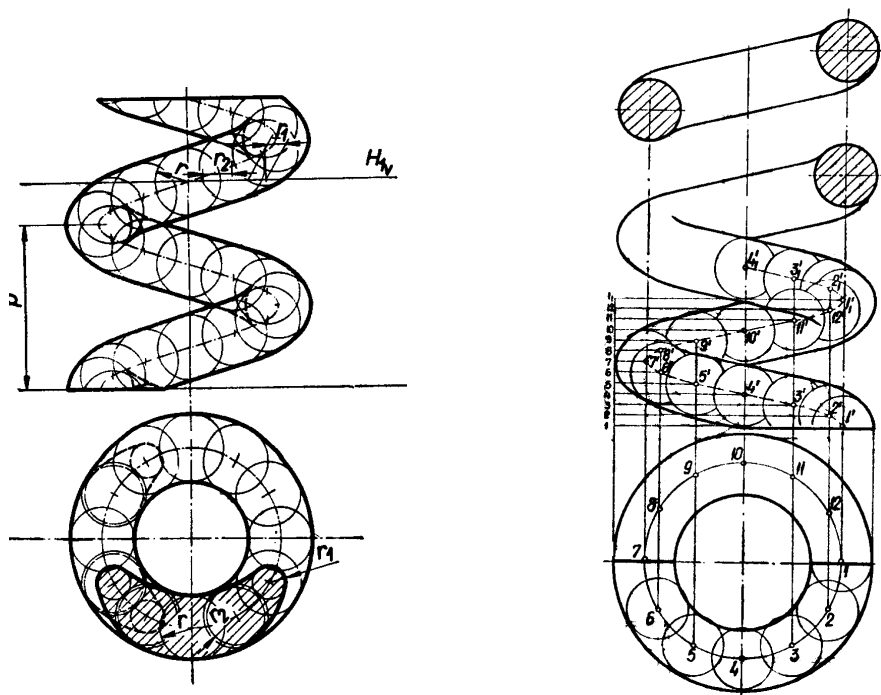


Fig. 10.15

În proiecție orizontală, înfășurătoarea sferelor arată cele două cercuri concentrice. Tot aici se vede conturul secțiunii făcute cu planul de nivel $[H_1]$. Acest plan secționează unele sfere după cercuri de raze r , r_1 , r_2 , etc., care, în proiecție orizontală, apar în mărime reală. Înfășurătoarea acestor cercuri dă în această proiecție conturul secțiunii. Secțiunea cu planul $[H]$ se trasează la fel, însă cu linie întreruptă, fiind nevăzută. Suprafețele care iau naștere prin înfășurarea sferelor de același diametru, trasate din centre situate pe o curbă plană sau spațială se mai numesc și suprafețe canal.

CONSTRUCȚII GEOMETRICE

11. NOTIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE

11.1 Originea noțiunilor geometrice fundamentale

Desenul geometric stă la baza geometriei descriptive și a desenului tehnic prin aplicarea construcțiilor geometrice din cadrul geometriei plane.

Noțiunile geometriei plane, postulatele și teoremele s-au format de-a lungul timpului prin abstractizarea unor realități obiective. S-a convenit ca obiectele din spațiul tridimensional (lumea înconjurătoare) să nu se deosebească în ceea ce privește masa, culoarea, forma, și prin neglijarea neregularităților corpurilor s-a ajuns la forme spațiale care se întind în trei dimensiuni: lungime, lățime și înălțime. Astfel un corp în spațiu are trei dimensiuni, o suprafață plană are două dimensiuni, o dreaptă are o singură dimensiune, iar punctul geometric nu are dimensiuni.

“ *Punctul geometric* ” este o noțiune matematică abstractă (*latinescul abstractus* – îndepărtat de realitate) care nu poate fi văzut și nici desenat [p.21].

Noțiunile fundamentale (care nu se definesc) ale geometriei plane sunt constituite de *punct* , *dreaptă*, *plan* și *distanță*. Prin intermediul acestora se definesc noțiunile de: *semidreaptă*, *segment*, *linie frântă*, *unghi*, etc.

11.2 Punctul și mulțimea de puncte

Punctul (A) este determinat și reprezentat prin intersecția a două drepte (Δ_1 și Δ_2); $A \Rightarrow \Delta_1 \cap \Delta_2$

Reprezentarea cea mai precisă a punctului este atunci când unghiul rezultat din intersecția celor două drepte are valoarea de 90^0 . Pe planul foi punctul se reprezintă printr-un cerc mic trasat cu balustrul și care are centrul situat la intersecția imaginară a două drepte conform Fig.11.1.

Orice **mulțime de puncte** formează o **figură geometrică**.

Mulțimea face parte din noțiunile fundamentale ale întregii matematici.

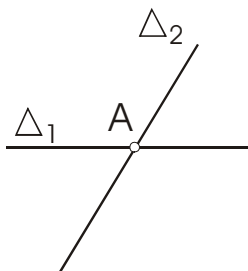


Fig. 11.1

11.3 Linii și tipuri de linii

11.3.1 Linia dreaptă, linia frântă și linia curbă

Dreapta sau linia dreaptă este determinată și se reprezintă ca urma punctului care se mișcă în plan (orizontal), urmând drumul cel mai scurt dintre două puncte și fără să-și schimbe direcția.

Dreapta se reprezintă precis atunci când punctele sunt suficient de depărtate astfel încât să poată determina o dimensiune măsurabilă conform Fig.11.2.

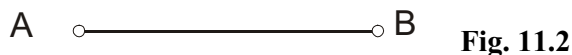


Fig. 11.2

Dreapta se mai reprezintă ca “urma” intersecției a două plane $[H]$ și $[V]$ conform Fig.11.2; $AB \Rightarrow [H] \cap [V]$

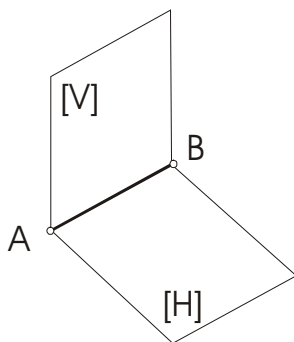


Fig. 11.3

Numărul dreptelor prin mai multe puncte:

- Prin două puncte diferite trece o dreaptă și numai una,
- Prin trei puncte diferite care nu sunt situate pe aceeași dreaptă trec trei și numai trei drepte care unesc fiecare câte două puncte determinând un plan,
- Printr-un punct se pot duce în plan o infinitate de drepte; mulțimea tuturor dreptelor din plan care au numai un singur punct comun constituie un fascicul de drepte.

Semidreapta conține mulțimea tuturor punctelor unei drepte care se găsesc de aceeași parte a unui punct O situat pe această dreaptă, inclusiv punctul O .

Semidrepte aparțin numai acele puncte care pot fi atinse din O printr-o mișcare rectilinie fără nici o schimbare de sens.

Segmentul $\overline{AB}$ conține mulțimea tuturor punctelor unei drepte care se găsesc între punctele A și B , inclusiv aceste puncte.

Segmentul este cea mai scurtă legătură dintre punctele A și B din plan; lungimea segmentului $\overline{AB}$ reprezintă distanța dintre punctele A și B . Când se ia în considerare sensul segmentului, atunci se notează prin $\overline{AB}$ segmentul care începe în A și se termină în B .

Linia frântă este de două tipuri: - *Linie frântă deschisă*;

- *Linie frântă închisă*.

Linia frântă deschisă reprezintă reuniunea a două sau mai multe segmente de dreaptă, astfel încât capătul fiecărui segment (înafară de al ultimului) este originea următorului segment, fără ca segmentele alăturate să se afle pe aceeași dreaptă (Fig.11.4 și Fig.11.5).

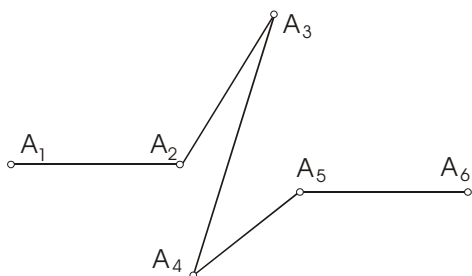


Fig. 11.4

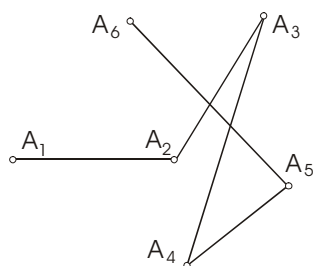


Fig. 11.5

Linia frântă închisă reprezintă reuniunea a trei sau mai multe segmente de dreaptă, astfel încât capătul ultimului segment este originea primului segment (Fig.11.5 și Fig.11.6)

Linia frântă închisă simplă reprezintă reuniunea a trei sau mai multe segmente de dreaptă, astfel încât capătul ultimului segment este originea primului segment fără ca acestea să se intersecteze (Fig.6).

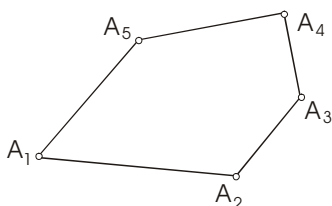


Fig. 11.6

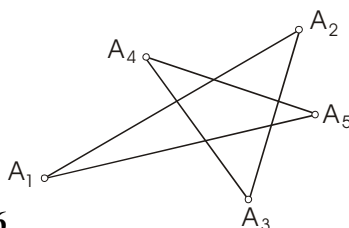


Fig. 11.7

Linia curbă este de două tipuri: - *Linie curbă deschisă*;

- *Linie curbă închisă*.

Linia curbă deschisă reprezintă schimbarea succesivă a poziției punctului după o direcție fără ca traectoria acestuia să formeze unghiuri (Fig.11.8).

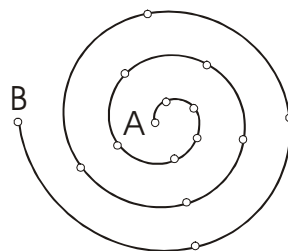
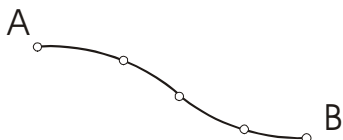


Fig. 11.8

Linie curbă închisă reprezintă schimbarea succesivă a poziției punctului după o direcție fără ca traectoria acestuia să formeze unghiuri astfel încât punctul de capăt să coincidă cu originea (Fig.11.9).

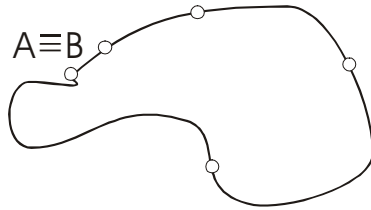


Fig. 11.9

11.3.2 Drepte paralele

Paralelele sunt dreptele care nu au nici un punct comun (sau nu se intersectează niciodată).

Paralela (Δ') la dreapta (Δ) se obține prin translația în același sens a unui echer de-a lungul unei rigle cu distanța l astfel încât toate punctele dreptei (Δ) se translatează într-o nouă poziție (Δ') cum se prezintă în Fig.11.10.

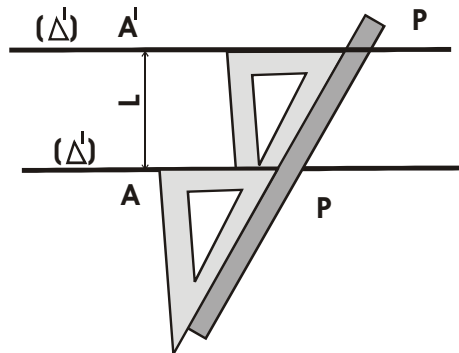


Fig. 11.10

11.3.2.1 Paralela la o dreaptă printr-un punct dat

Pentru trasarea unei paralele la o dreaptă printr-un punct O exterior dreptei (Δ) se procedează ca în Fig.11.11: cu vârful compasului în O și cu o rază oarecare " r " se trasează un arc de cerc care intersectează dreapta (Δ) în punctul A , iar din acest punct cu aceeași rază " r " se trasează un arc de cerc care trece prin punctul O și intersectează dreapta (Δ) în punctul B .

Cu vârful compasului în B se ia raza $r' = OB$ iar din punctul A se duce un arc de cerc care intersectează primul arc de cerc în punctul P .

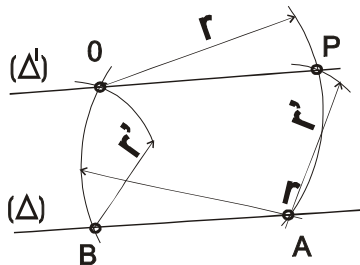


Fig. 11.11

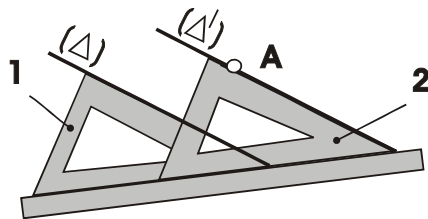


Fig. 11.12

Construcție cu rigla și echerul conform Fig.11.12: se suprapune una din laturile echerului (ipotenuza) pe o riglă, iar pe o altă latură se trasează dreapta (Δ) , după care acesta se translatează de-a lungul riglei în aceeași direcție până când aceeași latură trece prin punctul A , după care se trasează dreapta (Δ') de-a lungul acestei laturi a echerului.

11.3.2.2 Paralela la o dreaptă cu o distanță dată

Pentru trasarea unei paralele la o dreaptă (Δ) cu o distanță dată " d " se procedează ca în Fig.11.13: se aleg două puncte oarecare A și B situate pe dreapta (Δ) din care se trasează arce de cerc cu raza egală cu distanța " d " de aceeași parte a dreptei (Δ) . Dreapta (Δ') tangentă la arcele de cerc în punctele O și P reprezintă paralela la o dreaptă cu o distanță dată.

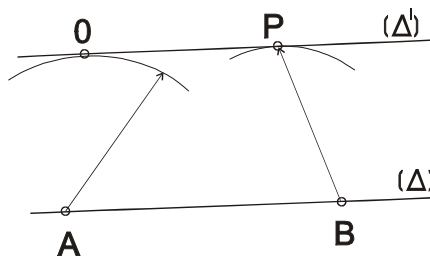


Fig. 11.13

11.3.3 Drepte perpendiculare

Perpendiculara este cea dreaptă care face cu o altă dreaptă în punctul de intersecție un unghi drept (90^0).

Dacă se unește un punct comun al dreptei (Δ) cu toate punctele dreptei (Δ') , $(\Delta) \parallel (\Delta')$, printre aceste segmente de legătură există unul care este cel mai scurt $\overline{AA'}$; acest segment reprezintă distanța dintre paralelele (Δ) și (Δ') formând cu (Δ) în A și cu (Δ') în A' câte o pereche de unghiuri drepte, Fig.11.14.

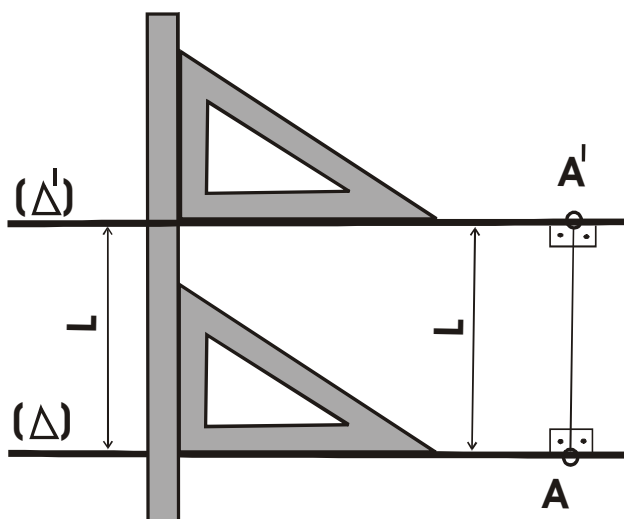


Fig. 11.14

13.3.3.1 Perpendiculara pe o dreaptă într-un punct dat

Pentru trasarea unei perpendiculare pe dreapta (Δ) în punctul O se procedează ca în Fig.11.15: cu vârful compasului în O se trasează un arc de cerc (oarecare) care intersectează dreapta (Δ) în punctele A și B , după care cu o rază mai mare decât OA (sau OB) se trasează din punctul A și respectiv B arce de cerc care se intersectează în punctul P . Se unește punctul P cu O obținându-se segmentul de dreaptă OP perpendicular pe dreapta (Δ) în punctul O .

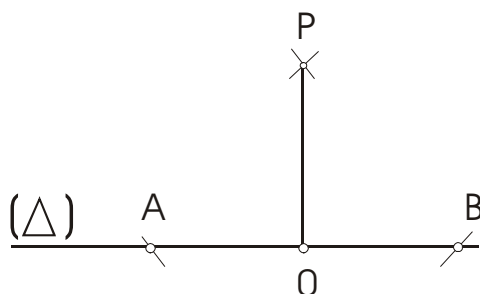


Fig. 11.15

11.3.3.2 Perpendiculara dintr-un punct exterior pe o dreaptă

Pentru trasarea unei perpendiculare dintr-un punct O (exterior drepte) pe dreapta (Δ) se procedează ca în Fig.11.16: cu vârful compasului în O se trasează un arc de cerc (oarecare) care intersectează dreapta (Δ) în punctele A și B , după care cu rază oarecare (mai mare decât jumătatea distanței dintre A și B) se trasează din punctul A și respectiv B arce de cerc care se intersectează de o parte și de alta a dreptei (Δ) în punctele C și D . Unind punctele C și D se obține perpendiculara pe dreapta (Δ) care trece prin punctul O exterior drepte.

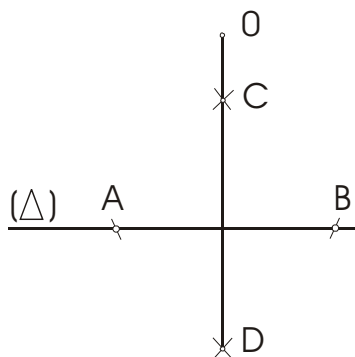


Fig. 11.16

11.3.3.3 Perpendiculara la capătul drepte

Pentru trasarea unei perpendiculare în punctul A situat la extremitatea drepte (Δ) se procedează ca în Fig.11.17: cu vârful compasului în punctul (oarecare) C exterior drepte (Δ) se trasează un arc

de cerc care trece prin punctul A și intersectează dreapta (Δ) în punctul B , după care se unește punctul B cu C și se prelungește până intersectează cercul în punctul D . Unind punctele D și A se obține perpendiculara la capătul drepte (Δ) .

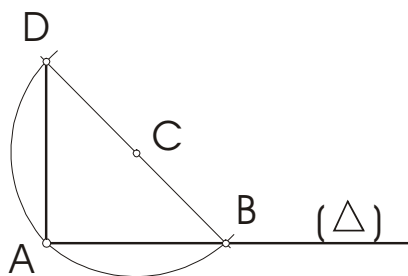


Fig. 11.17

11.3.3.4 Perpendiculara dintr-un punct dat situat deasupra și în afara drepte

Pentru trasarea unei perpendiculare în punctul O situat deasupra și în afara drepte se procedează ca în Fig.11.18: se aleg două puncte A și B situate pe dreapta (Δ) , iar cu vârful compasului în aceste puncte se trasează arce de cerc ce trec prin punctul O de o parte și de alta a drepte la intersecția lor rezultând punctul P . Unind punctele O și P se obține perpendiculara dintr-un punct dat situat deasupra și în afara drepte.

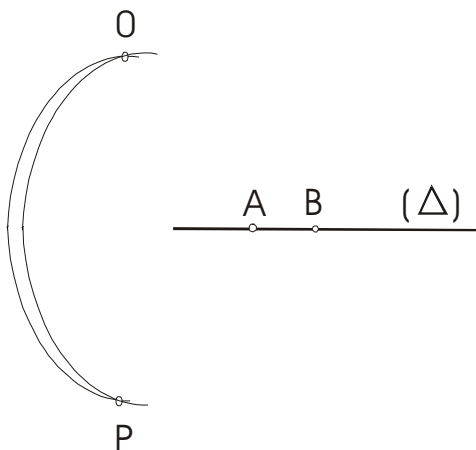


Fig. 11.18

11.3.4 Împărțirea unui segment de dreaptă

11.3.4.1 Determinarea mijlocului unui segment

Pentru determinarea mijlocului unui segment se procedează conform Fig.11.19: din fiecare extremitate a segmentului (punctele A și B) se trasează cu aceeași rază mai mare decât jumătatea segmentului câte un arc de cerc care se intersectează în punctele O și P . Unind aceste puncte printr-o dreaptă se obține axa de simetrie (Δ') , care intersectează segmentul $\overline{AB}$ în punctul S care determină mijlocul segmentului.

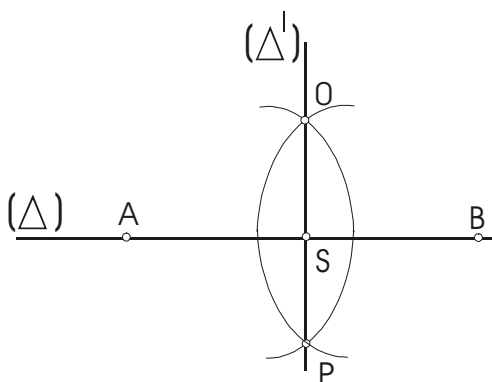


Fig. 11.19

Mediatoarea este dreapta care împarte un segment de dreaptă în părți egale și este perpendiculară pe acesta.

11.3.4.2 Împărțirea unui segment în mai multe părți egale

Pentru a împărți un segment de dreaptă $\overline{AB}$ în cinci părți egale se procedează ca în Fig.11.20: se trasează prin punctul A o semidreaptă oarecare (Δ) pe care, cu ajutorul distanțierului din trusa de compas, plecând din același punct, A se marchează cinci segmente egale: $A - I = I - 2 = 2 - 3 = 3 - 4 = 4 - C$. Unind punctele B cu C iar prin punctele $I, 2, 3, 4$ ducând paralele la segmentul $\overline{BC}$ acestea intersectează segmentul $\overline{AB}$ în punctele a, b, c, d , puncte care împart segmentul $\overline{AB}$ în cinci părți egale.

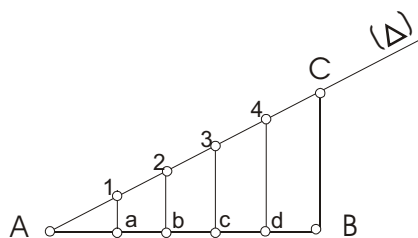


Fig. 11.20

Construcție cu rigla și echerul, Fig.11.21: se trasează prin punctul A o semidreaptă oarecare (Δ) pe care cu ajutorul distanțierului din trusa de compas plecând din același punct A se marchează cinci segmente egale: $A - 1 = 1 - 2 = 2 - 3 = 3 - 4 = 4 - 5$; se unesc punctele 5 cu B , iar cu ajutorul unei rigle și al unui echer se trasează paralele la segmentul $\overline{5B}$ prin punctele $1, 2, 3, 4, 5$, prin traslația echerului pe riglă într-un singur sens rezultând punctele $1', 2', 3', 4', 5'$ care împart segmentul $\overline{AB}$ în cinci părți egale.

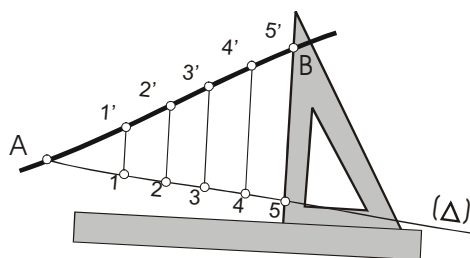


Fig. 11.21

11.3.4.3 Reducerea unui segment de dreaptă într-un raport dat

Pentru reducerea unui segment de dreaptă $\overline{AB}$ într-un raport dat de $3/4$ se procedează ca în Fig.11.22: se trasează prin punctul A o semidreaptă oarecare (Δ) pe care cu ajutorul distanțierului din trusa de compas plecând din același punct A se marchează trei segmente egale: $A - 1, 1 - 2, 2 - 3$, iar segmentul $\overline{AB}$ se împarte în patru părți egale cu primele: $A - 1', 1' - 2', 2' - 3', 3' - 4', 4' - B$. Se unește punctul 3 cu $4'$ iar prin punctul B se duce o paralelă la $\overline{34'}$ care intersectează semidreaptă (Δ) în punctul C .

Segmentul $\overline{AC}$ reprezintă segmentul redus cu raportul $3/4$ față de segmentul $\overline{AB}$.

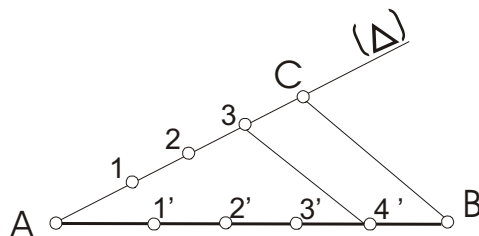


Fig. 11.22

11.3.4.4 Împărțirea unui segment de dreaptă în părți proporționale cu două segmente date

Pentru a împărți un segment de dreaptă $\overline{AC}$ în părți proporționale cu două segmente date se procedează ca în Fig.11.23: se trasează prin punctul A o semidreaptă oarecare (Δ) pe care se măsoară din punctul A segmentele s și u obținându-se extremitățile lor în punctele B' și C' . Unind punctele C' cu C și ducând prin punctul B' o paralelă la $\overline{CC'}$ care intersectează segmentul $\overline{AC}$ în punctul B se obține împărțirea acestui segment în segmentele $\overline{AB}$ și $\overline{BC}$ proporționale cu segmentele s respectiv u .

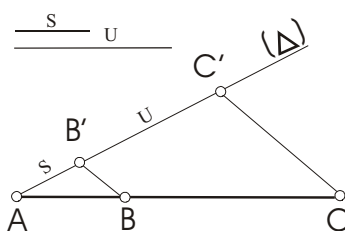


Fig. 11.23

11.4. Plan. Semiplan

Planul notat cu $[P]$ este suprafața care conține odată cu două puncte oarecare ale sale, dreapta care trece prin aceste puncte, Fig.11.24; planul este nemărginit (nu are limite sau margini)

În geometria euclidiană ((plană) *Euclid* – matematician grec, anul 300 î.c.) noțiunile fundamentale sunt punctul, dreapta și planul care reprezintă un *cadru geometric fundamental* mai larg față de care se fac toate considerațiile geometrice.

Semiplanul este suprafața care conține mulțimea nedivizibilă a punctelor situate de o parte a unei drepte din plan (Fig.11.25).

În cadrul geometriei în spațiu care este o subdiviziune a geometriei euclidiene **planul** este unul din elementele de bază ale formelor tridimensionale. În practică se folosesc porțiuni plane ca suprafețe ce mărginesc diferite forme geometrice.

Planul în spațiu se obține prin rotirea unei drepte Δ în jurul unui punct A al ei, astfel încât să se sprijine pe a altă dreaptă Δ' care nu conține pe A (Fig.11.26).

În practică pentru ușurința lucrului planul se consideră delimitat sau mărginit.

Poziția unui plan în spațiu este perfect determinată prin:

- o dreaptă Δ' și un punct A care nu se găsește pe dreaptă;
- două drepte care se intersectează Δ și Δ' ;
- două drepte paralele (caz particular când $\Delta \parallel \Delta'$;
- trei puncte care nu se găsesc pe aceeași dreaptă (A și două puncte ce determină pe Δ').

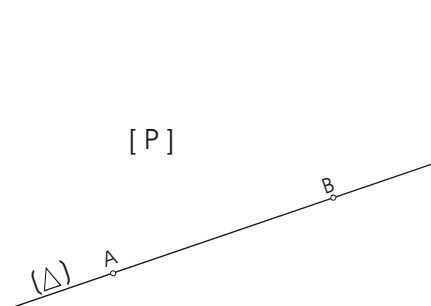


Fig. 11.24

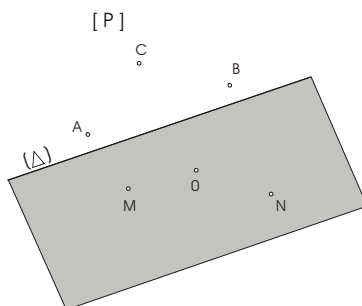


Fig. 11.25

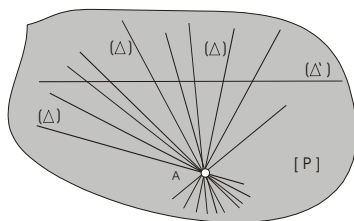


Fig. 11.26

11.5. Unghiuri

Se pot defini două tipuri de unghiuri: - unghiul plan, Fig.11.27;

- unghiul în spațiu, Fig.11.28.

Unghiul (plan) este figura geometrică formată din două semidrepte cu originea comună și dintr-una din părțile planului mărginită de ele.

Punctul comun formează vârful unghiului O , iar semidreptele $\overline{OA}$ și $\overline{OB}$ - laturile lui, (Fig.11.27). Deschiderea unghiului notată în grade ($^\circ$) este spațiul cuprins între laturile acestuia.

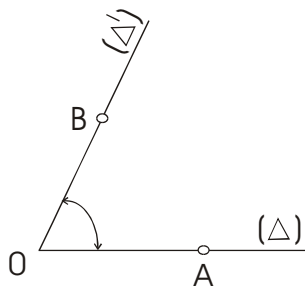


Fig. 11.27

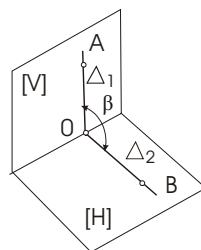


Fig. 11.28

Punctul comun formează vârful unghiului, A , iar dreptele Δ_1 și Δ_2 - laturile lui. Deschiderea unghiului măsurată în grade ($^\circ$) este reprezentată de spațiul cuprins între laturile unghiului. Se notează cu trei litere ($\angle AOB$) astfel încât litera cu care s-a notat vârful să fie la mijloc.

Unghiul în spațiu este determinat de două semiplane (Fig.11.28).

11.5.1. Construcția unui unghi dat

Pentru trasarea unui unghi dat (27°) se procedează ca în Fig.11.29: se alege un punct O reprezentând vârful unghiului și un alt punct A care se

unește cu O , rezultând astfel una din laturile unghiului (ex: $\overline{OA} = 100$ mm.). În punctul A se ridică o perpendiculară la $\overline{OA}$ pe care se măsoară valoarea $\overline{AB} = \overline{OA} \times \operatorname{tg} 27^0 = 100 \times 0,51 = 51$. Unind punctul O cu punctul B rezultă cea de a doua latură a unghiului (OB); unghiul astfel format ($\angle AOB$) este cel căutat.

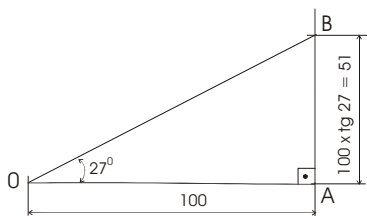


Fig. 11.29

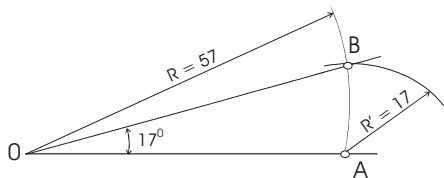


Fig. 11.30

Construcția aproximativă - Metoda coardelor

Are la bază observația că pentru unghiuri de până la 30^0 lungimea corzii este cu suficientă aproximație, proporțională cu valoarea unghiului pe care îl subîntinde; pe de altă parte coarda corespunzătoare unghiului de 1^0 este egală cu $1/57$ din valoarea razei învecinate. În concluzie pentru “ n ” grade ($n < 30^0$) lungimea coardei are valoarea de $n/57$ din lungimea razei (unde $R = 57$ mm.).

Pentru trasarea unghiului mai mic de 30^0 (de exemplu 17^0 conform Fig.11.30) trasăm un arc de cerc cu raza de 57 mm. pe care se alege un punct A . Cu vârful compasului în A și cu o rază egală cu valoarea unghiului pe care dorim să îl construim trasăm un arc de cerc care intersectează arcul de cerc inițial în punctul B . Unind centrul arcului de cerc inițial cu raza de 57 mm. cu punctele A și B se obține unghiul de 17^0 căutat $\angle AOB$.

11.5.2. Construcția unui unghi oarecare egal cu un unghi dat

Metoda arcelor de cerc: pentru trasarea unui unghi oarecare egal cu un unghi dat $\angle AOB$ se procedează ca în Fig.11.31: cu vârful compasului

în punctul O și cu o rază oarecare R se intersectează semidreapta Ox în punctul A iar semidreapta Oy în punctul B rezultând segmentele $\overline{OA} = \overline{OB}$. Se alege punctul O' și se trasează o semidreaptă oarecare $O'x'$ după care cu vârful compasului în O' și cu o rază egală cu $\overline{OA}$ se descrie un arc de cerc care intersectează semidreapta $O'x'$ în punctul A' . Din punctual A' se trasează un arc de cerc cu raza egală cu $\overline{AB}$ care intersectează primul cerc în punctul B' . Unind punctul O' cu B' și prelungind construcția se obține semidreapta $O'y'$ astfel încât unghiul $\angle A'O'B'$ astfel format este egal cu unghiul oarecare $\angle AOB$ dat inițial.

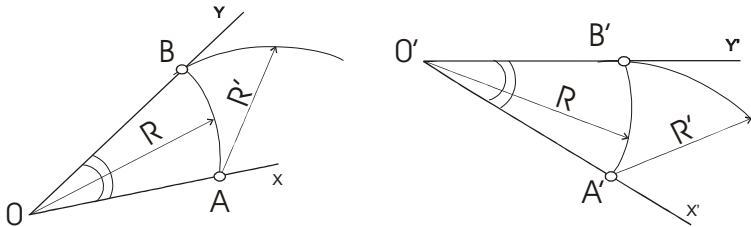


Fig. 11.31

Metoda paralelelor: pentru trasarea unui unghi oarecare egal cu un unghi dat $\angle AOB$ se procedează ca în Fig.11.32: prin punctul O'' se trasează paralele $O''A''$ și $O''B''$ la segmentele de dreaptă OA și respectiv OB , unghiul astfel format $\angle A''O''B''$ este egal ca mărime cu unghiul dat inițial $\angle AOB$.

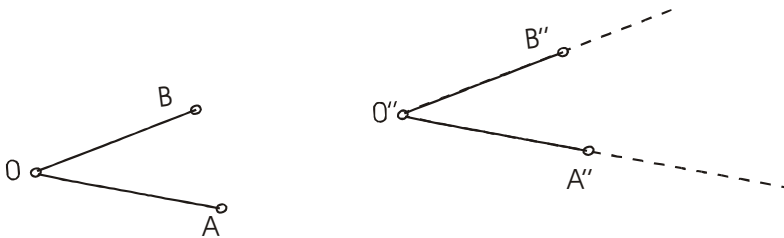


Fig.11.32

Metoda perpendicularelor: pentru trasarea unui unghi oarecare egal cu un unghi dat $\angle AOB$ se procedează ca în Fig.11.33: se prelungesc laturile OA și OB până depășesc poziția punctului O' , după care din punctul O' se coboară perpendiculare pe prelungirile laturilor OA și OB

ulterior rezultând unghiul $\angle A'O'B'$ egal ca mărime cu unghiul dat inițial $\angle AOB$.

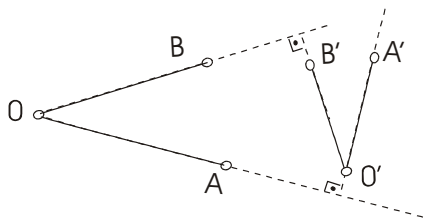


Fig. 11.33

11.5.3 Împărțirea unghiului în două părți egale

11.5.3.1 Construcția bisectoarei unui unghi cu ajutorul compasului

Bisectoarea unui unghi este linia dreaptă OP care trece prin vârful unghiului $\angle AOB = \angle \alpha$ și împarte spațiul cuprins între laturi în două spații egale, adică împarte unghiul $\angle \alpha$ în două unghiuri egale $\angle \alpha_1 = \angle \alpha_2$.

Pentru construcția bisectoarei unui unghi, $\angle \alpha$, se procedează ca în Fig.11.34: din punctul O se trasează un arc de cerc cu o rază oarecare R și care taie laturile unghiului în punctele A și B . Din aceste puncte cu o rază oarecare R' se trasează arce de cerc în interiorul unghiului care se intersectează în punctul P . Unind punctele O și P se obține dreapta OP care reprezintă bisectoarea unghiului α .

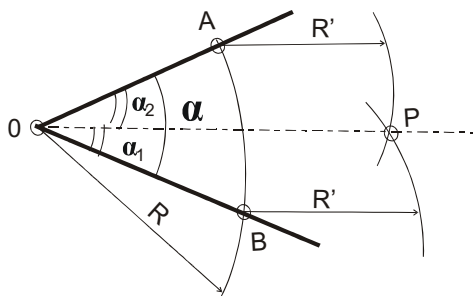


Fig. 11.34

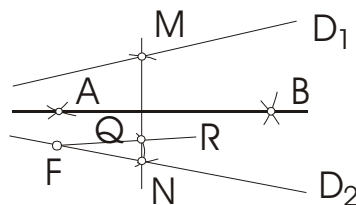


Fig. 11.35

11.5.3.2 Împărțirea în două părți egale a unghiului al cărui vârf se situează în afara desenului

Pentru împărțirea în două părți egale a unui unghi al cărui vârf se află în afara desenului se procedează conform Fig.11.35 astfel: fiind date laturile D_1 și D_2 ale unghiului respectiv printr-un punct F situat pe dreapta D_2 se trasează paralela FR la latura D_1 ; ca atare, această paralelă formează cu latura D_2 un unghi egal cu unghiul dat. Cu vârful compasului în punctul F și cu o rază oarecare se descrie un arc de cerc care intersectează semidreapta FR în punctul Q și latura D_2 în punctul N astfel încât coarda NQ intersectează latura D_1 în punctul M . Se construiește mediatoarea AB a segmentului MN care este în același timp și bisectoarea unghiului dat (unghiul dintre laturile D_1 și D_2).

11.5.4 Construcția unghiurilor cu valori consacrate:

$15^0, 30^0, 45^0, 60^0, 75^0, 90^0$

Construcția unghiului de 90^0

Pentru *construcția cu echerul* unghiul de 90^0 se poate obține prin ridicarea unei perpendiculare pe o dreaptă, deoarece în punctul de intersecție al perpendicularei cu aceea dreaptă se formează unghiuri drepte, adică unghiuri a căror valoare este de 90^0 . Pentru aceasta se așează echerul (având catetele neegale) cu cateta mică suprapusă pe o riglă urmând să trasăm o dreaptă de-a lungul ipotenuzei echerului și o altă dreaptă de-a lungul riglei, conform Fig.11.36.

Pentru *construcția cu compasul* unghiul de 90^0 se poate obține prin trasarea *mediatoarei* conform paragrafului 11.2.4.1.

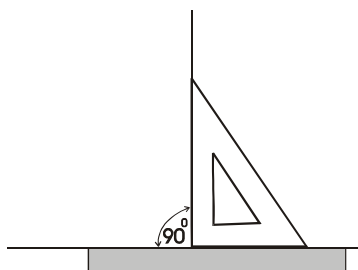


Fig. 11.36

Construcția unghiului de 60°

Pentru *construcția cu echerul* (având catetele neegale) conform Fig.11.37, acesta se așează cu cateta mică suprapusă pe o riglă urmând să trasăm o dreaptă de-a lungul ipotenuzei echerului și o altă dreaptă de-a lungul riglei. Unghiul mai mic de 90° format de cele două drepte este unghiul de 60° .

Pentru *construcția cu compasul* conform Fig.11.38 din punctele A și B ale unui segment de dreaptă se trasează arcele oarecare de cerc 1 respectiv 2 care se intersectează în punctul O .

Unind punctul O cu punctul A se obține unghiul de 60° .

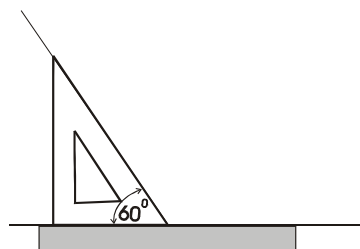


Fig. 11.37

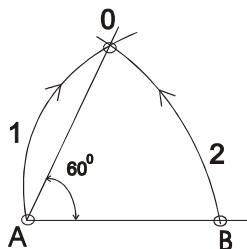


Fig. 11.38

Construcția unghiului de 30°

Pentru *construcția cu echerul* (având catetele neegale) conform Fig.11.39, acesta se așează cu latura mare suprapusă pe o riglă urmând să trasăm o dreaptă de-a lungul ipotenuzei echerului și o altă dreaptă de-a lungul riglei. Unghiul mai mic de 90° format de cele două drepte este unghiul de 30° .

Construcție prin ridicarea perpendicularei din vârful unghiului de 60^0

Conform Fig.11.40 după ridicarea perpendicularei din vârful unghiului de 60^0 se face diferența: $90^0 - 60^0 = 30^0$, acesta fiind unghiul căutat.

Construcție prin ridicarea bisectoarei unghiului de 60^0

Conform Fig.41 și a descrierii din paragraful 11.5.3 se construiește bisectoarea unghiului de 60^0 , rezultând astfel unghiul de 30^0 .

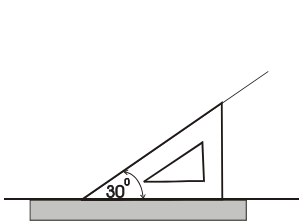


Fig. 11.39

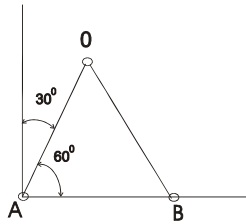


Fig. 11.40

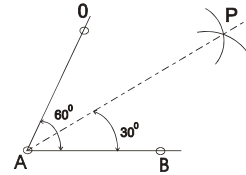


Fig. 11.41

Construcție prin împărțirea unghiului drept (90^0) în trei părți egale

Pentru construcție, conform Fig.11.42, cu vârful compasului în punctul O și cu o rază oarecare se trasează un arc de cerc care intersectează laturile unghiului $\angle POR = 90^0$ în punctele A și B , după care cu aceeași rază și succesiv se descriu două arce de cerc care intersectează arcul AB în punctele C și respectiv D . Unind punctul O cu punctele C și D rezultă semidreptele OC și OD care împart unghiul drept $\angle POR$ în trei unghiuri egale.

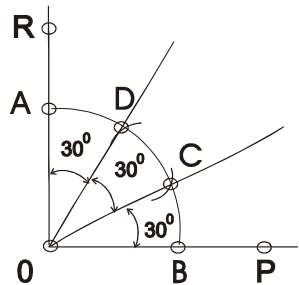


Fig. 11.42

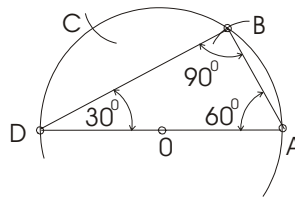


Fig. 11.43

Construcția unghiurilor de 30^0 , 60^0 și 90^0 cu vârfurile pe cerc

Pentru *construcția cu compasul* a unghiurilor de 30^0 , 60^0 și 90^0 se procedează conform Fig.11.43: se trasează un cerc cu raza oarecare R pe care se alege un punct A ; din acest punct se trasează pe circumferința cercului de trei ori valoarea razei rezultând punctele B , C și D .

Unind punctul A cu D rezultă diametrul cercului, iar unind punctul B cu punctele A și D se obțin unghiurile de 30^0 , 60^0 și 90^0 astfel; $\angle ADB = 30^0$, $\angle DAB = 60^0$ iar $\angle ABD = 90^0$.

Construcția unghiului de 45^0

Pentru *construcția cu echerul* (având catetele egale și două unghiuri de 45^0) conform Fig.11.44, acesta se așează cu una din catete pe o riglă urmând să trasăm o dreaptă de-a lungul ipotenuzei echerului și o altă dreaptă de-a lungul riglei. Unghiul astfel format, mai mic de 90^0 , este unghiul căutat de 45^0 .

Pentru *construcția cu compasul* unghiul de 45^0 rezultă și în urma construcției bisectoarei unghiului de 90^0 .

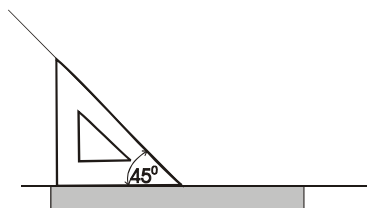


Fig.11.44

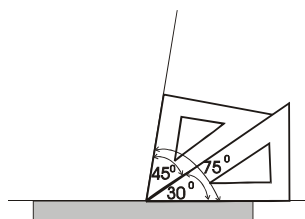


Fig. 11.45

Construcția unghiului de 75^0

Pentru *construcția cu echerul* conform Fig.11.45 se folosesc două echere, unul având catetele egale (cu unghiurile ascuțite de 45^0) și un altul având catetele neegale (cu unghiurile ascuțite de 30^0 și respectiv 60^0). Echerul oarecare se așează cu cateta mai mare suprapusă pe o riglă iar pe ipotenuza acestuia se suprapune ipotenuza echerului isoscel urmând să

trasăm o dreaptă de-a lungul catetei echerului isoscel și o altă dreaptă de-a lungul riglei. Unghiul mai mic de 90^0 astfel format este unghiul căutat cu valoarea de: $30^0 + 45^0 = 75^0$.

Construcția unghiului de 15^0

Pentru *construcția cu compasul* se trasează bisectoarea unghiului de 30^0 .

Pentru *construcția cu echerul* conform Fig.11.46 se folosesc două echere, unul având catetele egale și unghiurile ascuțite de câte 45^0 iar altul cu catetele neegale și unghiurile ascuțite de 30^0 și respectiv 60^0 . Echerul oarecare se așează cu cateta mare suprapusă pe o riglă după care echerul isoscel se așează cu ipotenuza suprapusă pe ipotenuza echerului oarecare. Unghiul format de catetele celor două echere are valoarea: $30^0 + 45^0 = 75^0$, iar prin ridicarea unei perpendiculare la dreaptă și făcând diferența $90^0 - 75^0 = 15^0$ rezultă unghiul căutat.

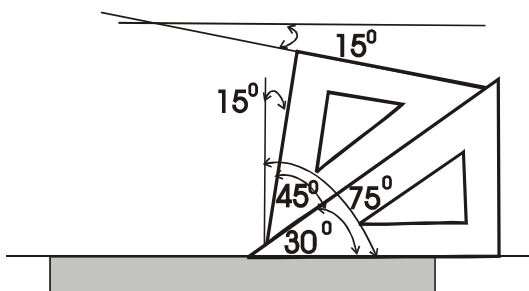


Fig. 11.46

11.5.5. Construcția unghiurilor ca sumă sau diferență de unghiuri

Se pot trasa sau construi o serie de alte unghiuri ca sumă sau ca diferență de unghiuri.

15.5.5.1 Construcția unui unghi ca sumă a două unghiuri

Pentru construcția unghiului $\angle AOD = \theta$ din Fig.11.49 ca sumă a unghiurilor $\angle AOB = \alpha$ (Fig.11.48) și $\angle COD = \beta$ (Fig.11.47) se procedează prin suprapunerea laturii OC a unghiului $\angle COD$ peste latura OB a unghiului $\angle AOB$.

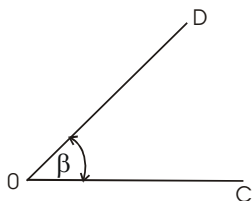


Fig. 11.47

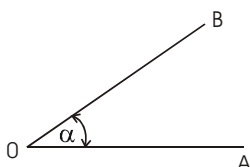


Fig. 11.48

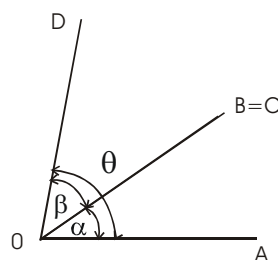


Fig. 11.49

11.5.5.2 Construcția unui unghi ca diferență a două unghiuri

Pentru construcția unghiului $\angle BOD = \theta$ din Fig.11.52 ca diferență a unghiurilor $\angle COD = \beta$ (Fig.11.50) și $\angle AOB = \alpha$ (Fig.11.51) se procedează prin suprapunerea laturii OC a unghiului $\angle COD$ peste latura OA a unghiului $\angle AOB$.

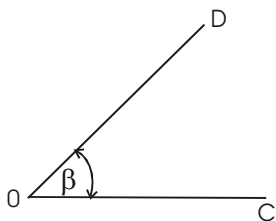


Fig. 11.50

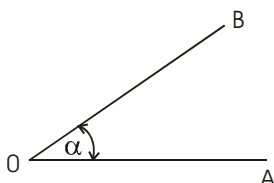


Fig. 11.51

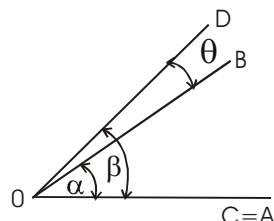


Fig. 11.52

11.5.5.3 Împărțirea unghiului într-un număr oarecare de părți egale

Pentru a împărți un unghi oarecare $\angle AOB$ într-un număr oarecare de părți egale se procedează conform Fig.11.53: cu centrul în vârful O și cu

o rază oarecare se descrie semicercul ABA_1 , iar cu centrele în punctele A și A_1 , cu raza AA_1 se descriu două arce de cerc care se intersectează în punctul C . Dreapta BC intersectează latura OA în punctul D . Segmentul AD se împarte într-un număr de părți egale (spre exemplu în 7 părți egale). Dreptele ce unesc punctul C cu punctele $1, 2, 3, 4, 5, 6$, se prelungesc până ce intersectează semicercul ABA_1 în punctele a, b, c, d, e, f și care unite cu vârful O împart unghiul oarecare $\angle AOB$ în șapte părți egale.

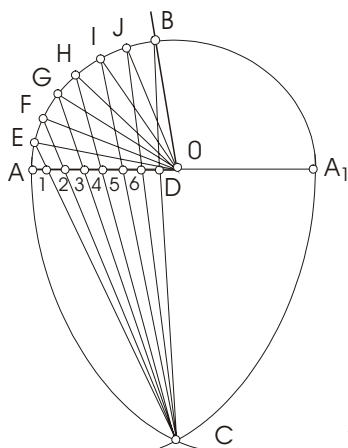


Fig. 11.53

11.5.6. Construcția unei drepte cu o înclinație dată față de o altă dreaptă

Pentru construcția unei drepte (D_2) cu o înclinație dată ($1:4$) față de o altă dreaptă (D_1) conform Fig.11.54 se procedează astfel: pe dreaptă D_1 se alege un punct O din care se trasează patru segmente egale unul în prelungirea celuilalt rezultând punctul A . Din acest punct se ridică o perpendiculară pe care se trasează un segment egal cu cel inițial rezultând punctul B . Unind punctul O cu punctul B și prelungind construcția rezultă dreapta căutată D_2 a cărei înclinație față de dreaptă D_1 este de $1:4$.

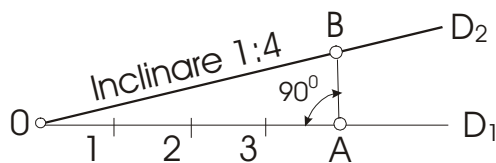


Fig. 11.54

11.5.7 Construcția unghiului de 180°

Pentru construcția unghiului de 180° se alege un punct oarecare O , care reprezintă vârful unghiului $\angle AOB$, pe dreapta AB conform Fig.11.55. Construcția se demonstrează prin ridicarea perpendicularei D_1 în punctul O și însumarea celor două unghiuri de 90° (Fig.11.56).

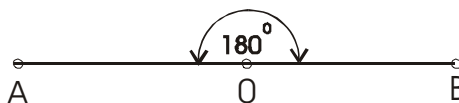


Fig. 11.55

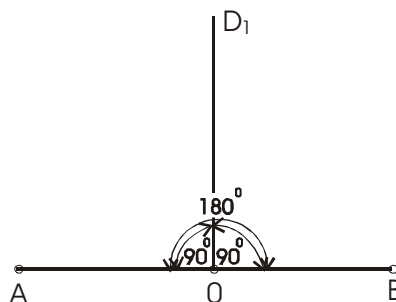


Fig. 11.56

11.5.8 Construcția unghiului de 360°

Pentru construcția unghiului de 360° conform Fig.11.57 se procedează la construcția unui cerc cu centrul în O și de rază oarecare $R = OA$ începând din punctul A .

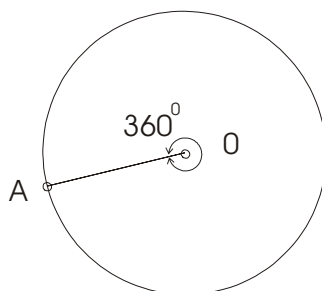


Fig. 11.57

12. CERCUL

Cercul este locul geometric al tuturor punctelor din plan care se găsesc la o distanță constantă de un punct fix.

Această linie curbă închisă se mai numește și **circumferință**, noțiunea de **cerc** deosebindu-se de noțiunea de **suprafață a cercului**.

Locul geometric este curba sau suprafața ale căror puncte au toate aceeași proprietate geometrică, definite de anumite relații matematice.

12.1 Elementele cercului

Elementele cercului conform figurilor 12.1, 12.2, 12.3 și 12.4 sunt următoarele:

Centrul cercului (O) este punctul fix egal depărtat de toate punctele cercului.

Raza cercului este oricare segment de dreaptă care unește centrul cercului cu un punct de pe cerc.

Secanta cercului este oricare dreaptă care unește două puncte de pe cerc.

Coarda cercului este oricare segment de dreaptă care unește două puncte de pe cerc.

Diametrul cercului este coarda care trece prin centrul cercului (cu cea mai mare valoare).

Tangenta cercului este dreapta care are un singur punct comun cu cercul.

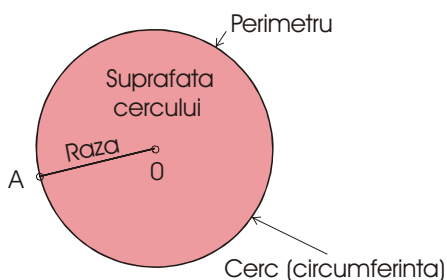


Fig. 12.1

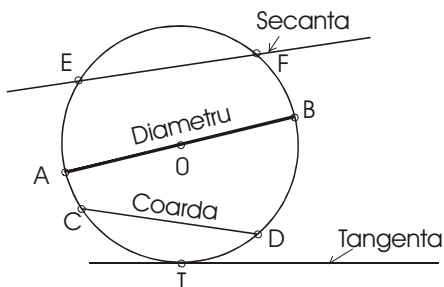


Fig. 12.2

Unghiul (înscris) în cerc este unghiul care are vârful pe cerc și laturile secante ale cercului.

Unghiul la centru (unghiul cu vârful în centrul cercului) este unghiul care are vârful în centrul cercului și laturile raze ale cercului.

Arcul de cerc este partea de pe cerc (circumferință) care este delimitată de un unghi la centru.

Sectorul circular este partea din suprafața cercului delimitată de două raze și un arc de cerc.

Segmentul de cerc este partea din suprafața cercului delimitată de un arc și coarda corespunzătoare lui.

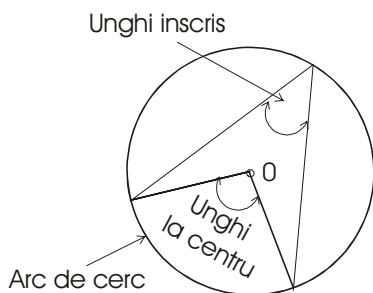


Fig. 12.3

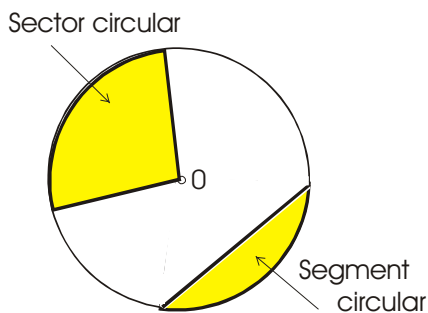


Fig. 12.4

12.2. Construcția grafică a cercului

Construcția grafică a cercului este determinată de elementele date ale cercului:

- poziția centrului și raza sau diametrul cercului;
- două puncte situate pe cerc și raza cercului;
- trei puncte situate pe cerc.

12.2.1 Construcția cercului când se cunosc poziția centrului și raza

Pentru construcția cercului când se cunosc poziția centrului și raza se procedează conform Fig.12.5: cu vârful compasului în centrul cercului

O de poziție dată (se cunosc coordonatele cercului) și cu deschiderea egală cu raza R (dată ca valoare) se trasează cercul căutat.

12.2.2 Construcția cercului când se cunosc două puncte situate pe cerc și raza

Pentru construcția cercului când se cunosc două puncte situate pe cerc și raza se procedează conform Fig.12.6: cu centrul în punctele date A și B și cu raza R cunoscută ca valoare se descriu două arce de cerc care se intersectează în punctul O numit centrul cercului. În continuare cu vârful compasului în centrul cercului O și cu deschiderea egală cu raza R (dată ca valoare) se trasează cercul căutat.

Observație: în cazul în care punctele A și B sunt situate pe o coardă se obțin două soluții: - două cercuri fiecare cu centrul opus față de coardă;

- un singur cerc atunci când punctele A și B sunt situate diametral opus.

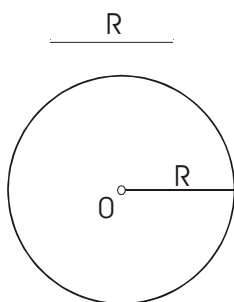


Fig. 12.5

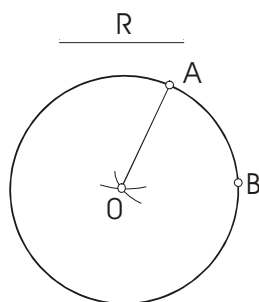


Fig. 12.6

12.2.3 Construcția cercurilor care trec prin două puncte

Pentru construcția cercurilor care trec prin două puncte se procedează conform Fig.12.7: se unesc punctele date A și B rezultând segmentul de dreaptă $\overline{AB}$ prin mijlocul căruia (punctul O) se ridică o perpendiculară pe care se ia un punct C pentru delimitarea lungimii acesteia. În continuare pe dreapta $\overline{OC}$ se alege O_1 centrul cercului, iar cu raza $\overline{O_1A}$ sau $\overline{O_1B}$ se trasează cercul de rază R_1 . Pe aceeași dreaptă $\overline{OC}$ se

alege O_2 centrul cercului, iar cu raza $\overline{O_2A}$ sau $\overline{O_2B}$ se trasează cercul de rază R_2 ; continuând raționamentul rezultă că prin două puncte date se pot duce o infinitate de cercuri.

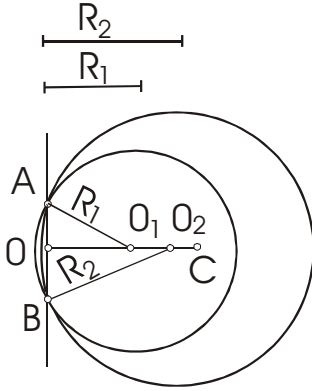


Fig. 12.7

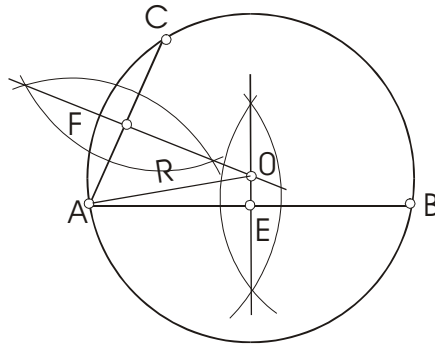


Fig. 12.8

12.2.4 Construcția cercului care trece prin trei puncte necoliniare

Pentru construcția cercului care trece prin trei puncte necoliniare se procedează conform Fig.12.8: se unesc cele trei puncte cunoscute A , cu B și C , iar pe segmentele $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$ astfel obținute se ridică mediatoarele lor care se întâlnesc în punctul O numit centrul cercului. Din punctul O cu raza $\overline{OA}$ se trasează cercul căutat.

12.3 Determinarea grafică a unora din elementele cercului

12.3.1 Determinarea centrului unui cerc dat

Pentru determinarea centrului unui cerc dat se procedează conform Fig.12.9: se trasează două coarde AB și CD cu recomandarea ca mărimea unghiului format prin prelungirea lor să fie cât mai apropiată de 90° , după care se trasează mediatoarele lor EF și GH . Punctul de intersecție O al mediatoarelor reprezintă centrul cercului căutat.

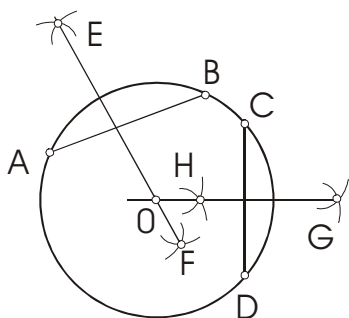


Fig. 12.9

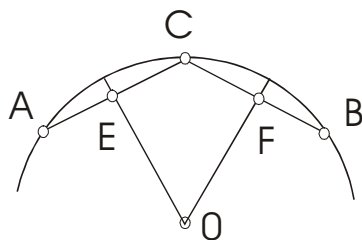


Fig. 12.10

12.3.2 Determinarea centrului unui cerc când se dă arcul AB

Pentru determinarea centrului unui cerc când se dă arcul AB se procedează conform Fig.12.10: se trasează două coarde AC și CB cu recomandarea ca mărimea unghiului format de ele să fie cât mai apropiată de 90° , după care se trasează mediatoarele lor prin punctele E și F . Punctul de intersecție O al mediatoarelor este centrul cercului căutat.

12.3.3 Determinarea arcului de cerc cu centrul în afara planului de lucru cunoscând o coardă și săgeata

Pentru determinarea unui arc de cerc de rază mare al cărui centru se află înafara planului de lucru (foii de hârtie) cunoscând o coardă AB și săgeata CD se procedează conform Fig.12.11: se unesc punctele A și B cu C după care se trasează două arce de cerc de rază oarecare R , dar mai mică decât AC , din punctele A și B . Pe aceste arce se iau diviziuni egale astfel: se împarte arcul cuprins între AC și AD în patru părți egale rezultând punctele 1 , 2 și 3 după care pe celălalt arc de cerc înafara dreptei CB se ia trei arce de cerc egale unul în prelungirea celuilalt rezultând punctele $1'$, $2'$ și $3'$. Se unește punctul A cu punctele 1 , 2 și 3 , iar punctul B cu punctele $1'$, $2'$ și $3'$, după care aceste semidrepte se prelungesc până se intersectează

rezultând punctele E , F și G . Unind punctele C , E , F și G printr-o linie curbă continuă obținem arcul de cerc căutat.

Metoda a-II-a de determinare a unui arc de cerc de rază mare al cărui centru se află înafara planului cunoscând o coardă AB și săgeata CD constă conform Fig.12.12 în: construcția dreptei BH perpendiculară pe CB după care segmentul DB (este jumătatea corzii AB) și CH se împarte în același număr de părți egale (ex: 4 părți egale) rezultând punctele 1 , 2 și 3 ($4 \equiv B$) și $1'$, $2'$ și $3'$ ($4' \equiv H$) care se unesc între ele două câte două 1 cu $1'$, 2 cu $2'$ și 3 cu $3'$. În continuare se ridică o perpendiculară din B pe CH și se împarte în patru părți egale rezultând punctele a , b , c și d care se unesc cu punctul C ; la intersecția acestor drepte (Ca , Cb , Cc) cu dreptele $11'$, $22'$ și $33'$ rezultă punctele E , F și G . Unind punctele C , E , F și G printr-o linie curbă continuă obținem arcul de cerc căutat.

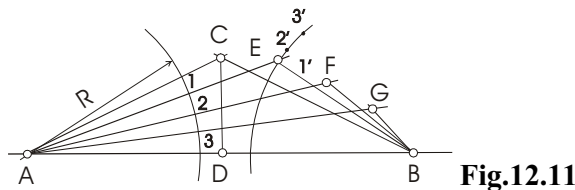


Fig.12.11

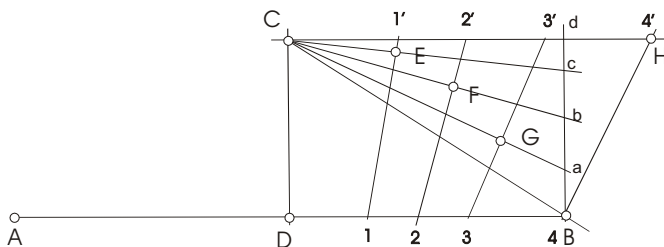


Fig. 12.12

12.3.4 Determinarea lungimii unui semicerc

Pentru determinarea lungimii unui semicerc se procedează conform Fig.12.13: se duc două diametre perpendiculare AB și DE după care cercul se intersectează în punctul F cu un arc de cerc cu centrul în punctul D și cu raza egală cu cea a cercului dat. În continuare se duce tangenta AG la cerc

în punctul A , după care se unește centrul cercului O cu punctul F și se prelungește dreapta până intersectează tangenta în punctul C . Din acest punct se ia pe tangentă un segment egal cu de trei ori raza cercului dat rezultând punctul H care se unește cu punctul B . Segmentul HB este egal cu πR (jumătatea lungimii cercului dat) ceea ce reprezintă valoarea semicercului căutat.

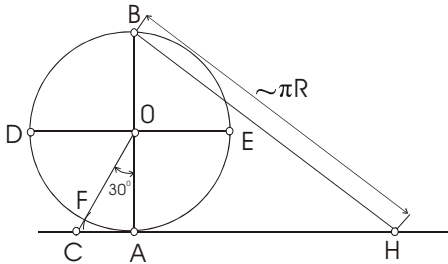


Fig. 12.13

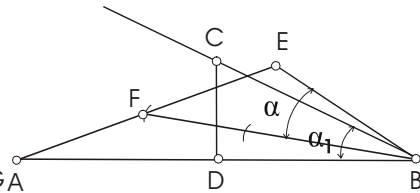


Fig. 12.14

12.3.5 Determinarea săgeții când se cunoaște coarda și un punct de pe cerc

Pentru determinarea săgeții când se cunoaște coarda AB și un punct E de pe cerc (al cărui centru se află înafara planului) se procedează conform Fig.12.14: se unește punctul E cu A și B după care se ia pe AE segmentul $EF = EB$.

Se unește punctul F cu punctul B și se obține $\alpha = \angle EBF$. În continuare se construiește pe latura AB unghiul $\angle ABC = \alpha = \alpha_1$, iar din punctul D care se găsește la jumătatea coardei AB se ridică perpendiculara DC . Prin intersecția perpendicularei DC cu BC se obține punctul C astfel încât segmentul DC va fi săgeata căutată pentru arcul ACB .

12.3.6 Determinarea lungimii unui arc oarecare AB al unui cerc de rază R

Pentru determinarea lungimii unui arc oarecare AB al unui cerc de rază R se procedează conform Fig.12.15: prin punctele A și B ale arcului de

cerc AB se duce coarda AB subîntinsă arcului. Se determină punctul D ca mijlocul segmentului AB după care se unește cu centrul cercului O și se prelungește până intersectează arcul AB în punctul C punct prin care se duce tangenta la cerc. Pe prelungirea dreptei OC se ia din punctul C de trei ori lungimea razei R până în punctul O_1 . În continuare se duc dreptele AO și BO_1 care determină pe tangentă segmentul EF care are o lungime aproximativ egală cu lungimea arcului de cerc AB . Construcția este suficient de exactă pentru arce de cerc cu unghiul la centru β până la 80° .

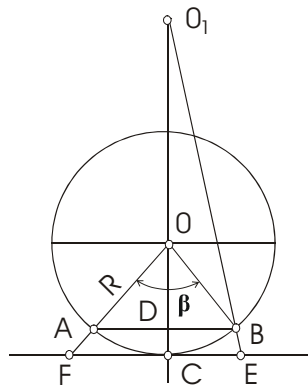


Fig. 12.15

12.4 Împărțirea cercului în părți egale

12.4.1 Împărțirea cercului în două, în patru și în opt părți egale

Pentru împărțirea unui cerc în *două părți egale* conform Fig.12.16 este suficient să construim diametrul cercului AB .

Pentru împărțirea unui cerc în *patru părți egale* conform Fig.12.17 se vor construi două diametre perpendiculare între ele.

La împărțirea unui cerc în *opt părți egale* conform Fig.12.18 după construcția celor două diametre perpendiculare din punctele A, C, E și G cu o rază oarecare R se descriu arce de cerc care se intersectează în punctele I, K, L și M . Unind punctele I cu L și K cu M se obține a doua pereche de diametre perpendiculare care împart cercul în opt părți egale.

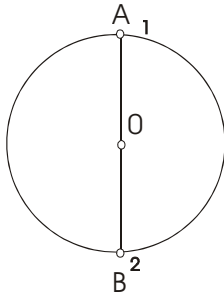


Fig. 12.16

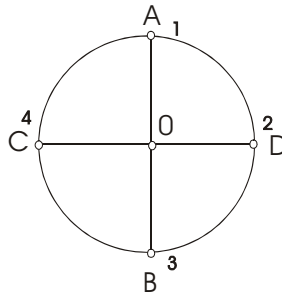


Fig. 12.17

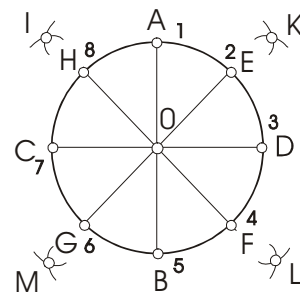


Fig. 12.18

12.4.2 Împărțirea cercului în trei, în șase și în douăsprezece părți egale

Pentru împărțirea cercului în *trei părți egale* se procedează conform Fig.12.19: se trasează diametrul cercului AB , după care din punctul A cu raza R egală cu raza cercului se duc două arce de cerc de o parte și de alta a punctului A până intersectează cercul în punctele C și D . Punctele A , C și D împart cercul dat de rază R în trei părți egale.

Pentru împărțirea cercului în *șase părți egale* se procedează conform Fig.12.20: se trasează diametrul cercului AB , după care din punctele A și B cu raza R egală cu raza cercului se duc arce de cerc de o parte și de alta a punctelor A și B până intersectează cercul în punctele C , D , E și F . Punctele A , B , C , D , E și F împart cercul dat de rază R în șase părți egale.

Pentru împărțirea cercului în *douăsprezece părți egale* se procedează conform Fig.12.21: pornind de la construcția anterioară se împart arcele AE , AF , BC și BD în câte două părți egale. Pentru arcul AF se procedează astfel: din punctele A și F cu o rază oarecare $R' < AF$ se duc arce de cerc care se intersectează în punctul I . Unind punctul I cu centrul cercului O printr-o dreaptă aceasta intersectează cercul în punctul 2, punct care împarte arcul de cerc AF în două părți egale. Procedând similar și pentru

arcele de cerc FD , DB , BC , CE , și EA se obțin punctele de pe cerc 4, 6, 8, 10 și 12. Renumerotând punctele A , F , D , B , C și E cu 1, 3, 5, 7, 9 și 11 obținem punctele pe cerc 1, 2, 3, 12 puncte care împart cercul dat de rază R în douăsprezece părți egale.

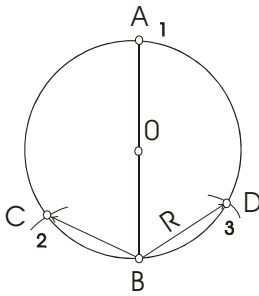


Fig. 12.19

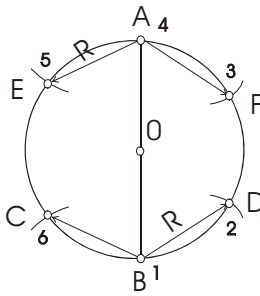


Fig. 12.20

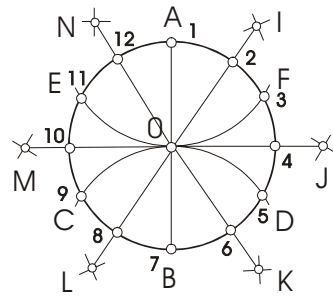


Fig. 12.21

12.4.3 Împărțirea cercului în cinci și în zece părți egale

Pentru împărțirea cercului în *cinci părți egale* se procedează conform Fig.12.22: se trasează două diametre perpendiculare AB și CD după care se determină punctul E ca mijlocul razei (mijlocul segmentului OB). În continuare cu vârful compasului în punctul E și cu o rază egală ca valoare cu segmentul EC se trasează un arc de cerc care intersectează diametrul AB în punctul F . Segmentul CF este egal cu coarda care subîntinde arcul căutat; acest segment se ia de cinci ori pe cerc, unul în prelungirea celui alt, rezultând punctele 1, 2, 3, 4 și 5 puncte care împart cercul dat în cinci părți egale.

Pentru împărțirea cercului în *zece părți egale* se procedează conform Fig.12.23: se pornește de la construcția anterioară (împărțirea cercului în cinci părți egale – Fig.12.22) unde s-a obținut segmentul OF . Acest segment se ia de zece ori pe cerc, unul în prelungirea celui alt, rezultând punctele 1, 2, 3, 10 puncte care împart cercul dat în zece părți egale.

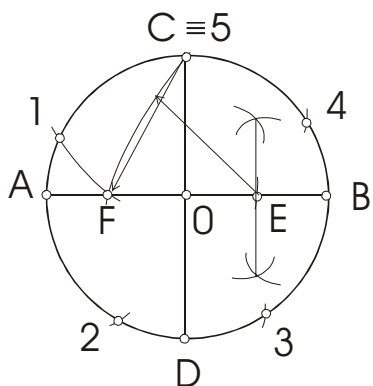


Fig. 12.22

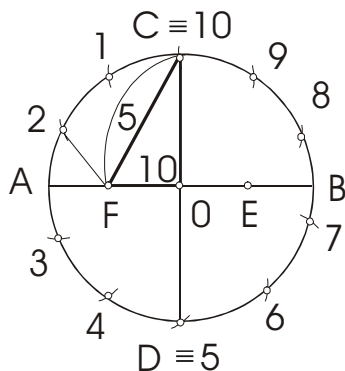


Fig. 12.23

12.4.4 Împărțirea cercului în șapte părți egale

Pentru împărțirea cercului în *șapte părți egale* se procedează conform Fig.12.24: se trasează diametrul AB , după care cu vârful compasului în punctul B și cu o rază egală cu raza cercului R se trasează un arc de cerc care intersectează cercul în punctele C și D . Unind punctele C și D cu un segment, acesta intersectează raza OB în punctul E . Segmentul CE se ia de șapte ori pe cerc, unul în prelungirea celuiilat, rezultând punctele $1, 2, 3, \dots, 7$ puncte care împart cercul dat în șapte părți egale.

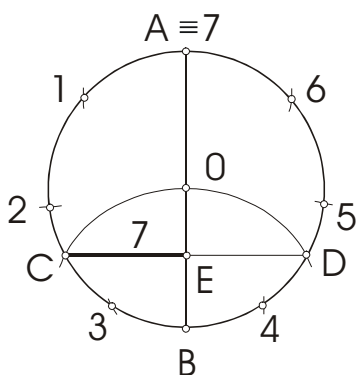


Fig. 12.24

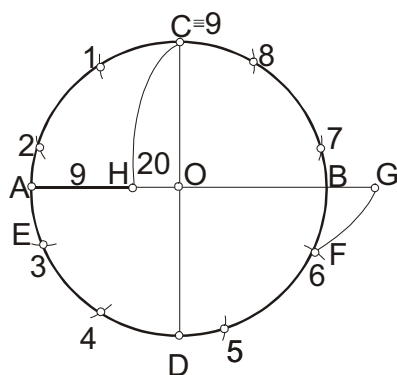


Fig. 12.25

12.4.5 Împărțirea cercului în nouă și în douăzeci de părți egale

Pentru împărțirea cercului în *nouă părți egale* se procedează conform Fig.12.25: se trasează două diametre perpendiculare AB și CD după care cu vârful compasului în punctul D și cu o rază egală cu raza cercului R se trasează un arc de cerc care intersectează cercul în punctele E și F . În continuare cu centrul în punctul C și cu raza CF se descrie un arc de cerc care intersectează prelungirea diametrului AB în punctul G , după care din acest punct cu raza CG se duce un alt arc de cerc care intersectează diametrul AB în interiorul cercului în punctul H . Segmentul AH este egal cu coarda care subîntinde arcul căutat; acest segment se ia de nouă ori pe cerc, unul în prelungirea celui alt, rezultând punctele 1, 2, 3, 4 9 puncte care împart cercul dat în nouă părți egale.

Pentru împărțirea cercului în *douăzeci de părți egale* se procedează conform Fig.12.25: se pornește de la construcția anterioară (împărțirea cercului în nouă părți egale) unde s-a obținut segmentul OH . Acest segment se ia de douăzeci de ori pe cerc, unul în prelungirea celui alt, rezultând punctele 1, 2, 3, 20 puncte care împart cercul dat în douăzeci de părți egale.

12.4.6 Împărțirea cercului într-un număr oarecare de părți egale

Pentru împărțirea cercului în *într-un număr oarecare de părți egale* se procedează conform Fig.12.26: se consideră spre exemplificare un număr de unsprezece părți. Se trasează diametrul AB care se împarte în unsprezece părți egale (punctele 1, 2, 3, 4 11) după care din punctele A și B se duc două arce de cerc, cu raza egală ca valoare cu diametrul AB , care se intersectează în punctele C și D . Din punctele C și D se duc drepte prin diviziunile cu număr par (sau impar) ale diametrului AB până

intersectează cercul în punctele $1', 2', 3', 4', 5' \dots 11'$. Aceste puncte împart cercul dat într-un număr (în exemplul arătat de 11 părți) de părți egale.

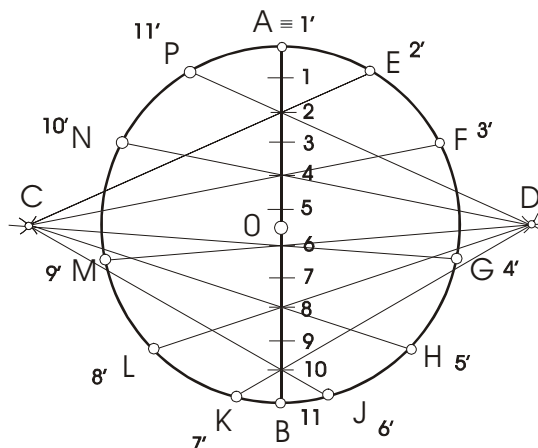


Fig. 12.26

12.5 Tangenta. Cercuri tangente

12.5.1 Tangenta la cerc

Tangenta la un cerc (în oricare punct al cercului) este perpendiculara pe rază care trece prin acel punct (Fig.12.27).

Tangenta la un cerc se mai poate defini și ca poziția limită a unei secante care trece prin două puncte ale unei curbe atunci când secanta se rotește și cele două puncte se confundă.

Construcția cu echerul a tangentei la cerc constă conform Fig.12.28 în așezarea echerului cu latura cea mai mare pe o riglă astfel încât una din laturile echerului care formează unghiul drept să treacă prin centrul cercului dat, după care echerul se translatează de-a lungul riglei până când cea de a doua latură a echerului care formează unghiul drept intersectează cercul într-un singur punct (T). Linia trasată de-a lungul acestei laturi a echerului este tangenta la cerc căutată.

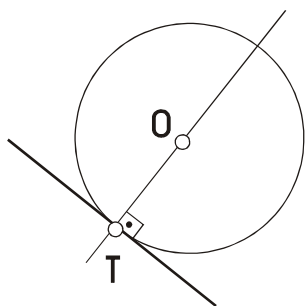


Fig. 12.27

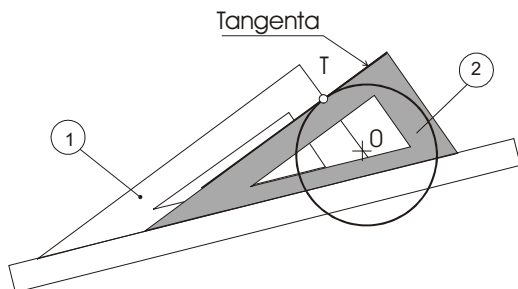


Fig. 12.28

12.5.2 Tangenta dintr-un punct exterior la cerc

Pentru construcția tangentei dintr-un punct exterior la cerc se procedează conform Fig.12.29: din punctul O_2 exterior cercului dat cu centrul O se duce o dreaptă care unește aceste două puncte. În continuare se determină punctul O_1 situat la jumătatea segmentului OO_2 , după care se trasează un cerc cu centrul în punctul O_1 cu raza $R = O_1O_2$ care intersectează cercul dat inițial în punctele T și T' . Unind aceste puncte cu punctul O_2 se obțin tangentele la cerc O_2T și O_2T' căutate.

Construcția cu echerul a tangentei dintr-un punct exterior la cerc constă conform Fig.12.30 în așezarea echerului cu latura cea mai mare pe o riglă care unește centrul cercului O cu punctul exterior cercului O_2 astfel încât una din laturile echerului care formează unghiul drept să treacă prin centrul cercului dat, după care echerul se translatează de-a lungul riglei până când cea de a doua latură a echerului care formează unghiul drept trece prin punctul O_2 și intersectează cercul într-un singur punct (T). Linia trasată de-a lungul acestei laturi a echerului este tangenta dintr-un punct exterior la cerc căutată.

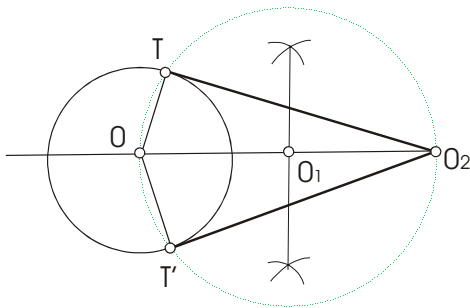


Fig. 12.29

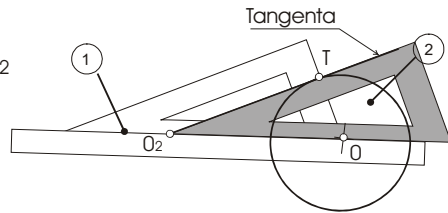


Fig. 12.30

Dreapta (OO_2) care unește centrul cercului (O) cu un punct exterior acestuia (O_2) din care sunt duse tangente la cerc împarte unghiul format de acestea în două părți egale (Fig.88).

Coarda (TT') care unește punctele de tangență (T și T') la intersecția (O_1) cu dreapta OO_2 formează un unghi drept (Fig.12.31).

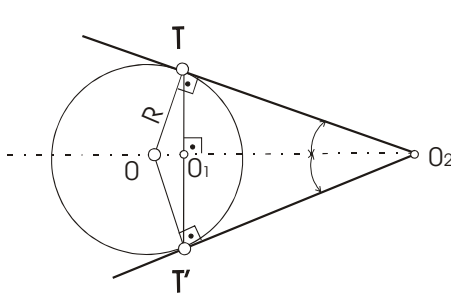


Fig. 12.31

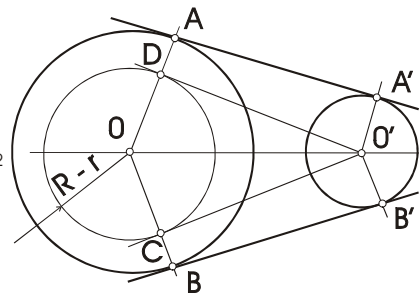


Fig. 12.32

12.5.3 Tangente exterioare la două cercuri

Pentru construcția tangentelor exterioare la două cercuri date de rază r și R conform Fig.12.32 se procedează astfel: din centrul O cu o rază $R - r$ se trasează un cerc ajutător și se construiesc tangentele din O' la acest cerc în punctele C și D . În continuare se duc paralele la distanța r la aceste tangente (AA' și BB'); acestea sunt tangentele exterioare la cercurile date.

12.5.4 Tangente interioare la două cercuri

Pentru construcția tangentelor interioare la două cercuri date de rază r și R conform Fig.12.33 se procedează astfel: din centrul O cu o rază $R + r$ se trasează un cerc ajutător și se construiesc tangentele din O' la acest cerc în punctele C și D . În continuare se construiesc paralele la distanța r la aceste tangente (AA' și BB'); acestea sunt tangentele interioare la cercurile date.

Construcția cu echerul a tangentelor interioare la două cercuri constă conform Fig.12.34 în așezarea echerului cu latura cea mai mare pe o riglă care unește centrele cercurilor (O și O') astfel încât una din laturile echerului care formează unghiul drept să treacă prin centrul O . În locul în care această latură a echerului intersectează cercul (cu centrul în O) se marchează punctul A . În continuare se translatează echerul de-a lungul riglei până când aceeași latură a echerului trece prin centrul celui de al doilea cerc (O') și se marchează locul unde aceasta intersectează cercul prin punctul A' . Unind punctele A cu A' se obține tangenta interioară la cele două cercuri.

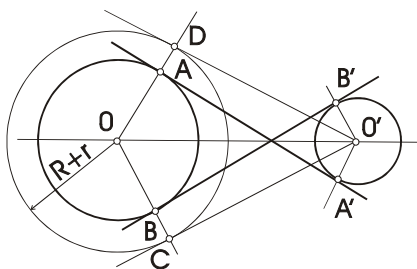


Fig. 12.33

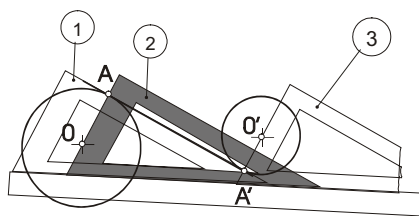


Fig. 12.34

12.5.5 Cercuri tangente interior

Pentru construcția a două cercuri tangente interioare date de rază R_1 și R_2 conform Fig.12.35 se procedează astfel: se ia o dreaptă pe care se

poziționează centrul O_1 ; din acest punct cu raza R_1 se trasează un cerc care intersectează dreapta inițială în punctul T . Pe aceeași dreaptă și de aceeași parte a punctului T se măsoară raza R_2 obținându-se centrul celui de al doilea cerc (O_2). Din acest punct se trasează un cerc cu raza R_2 care se intersectează cu primul cerc într-un singur punct (T) care este punctul de tangență.

Dacă din punctul T se ridică o perpendiculară pe dreapta O_1T se obține tangenta comună la cele două cercuri.

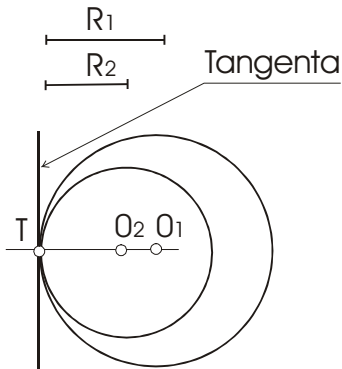


Fig. 12.35

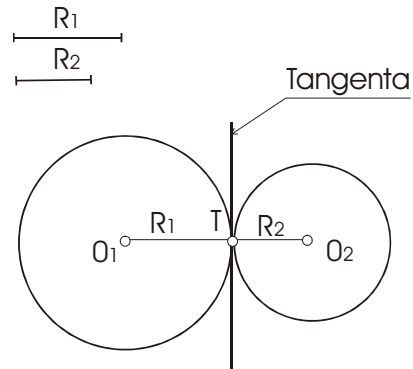


Fig. 12.36

12.5.6 Cercuri tangente exterior

Pentru construcția a două cercuri tangente exterior date de rază R_1 și R_2 conform Fig.12.36 se procedează astfel: se ia o dreaptă pe care se poziționează centrul O_1 ; din acest punct cu raza R_1 se trasează un cerc care intersectează dreapta inițială în punctul T . Pe aceeași dreaptă dar de cealaltă parte a punctului T se măsoară raza R_2 obținându-se centrul celui de al doilea cerc (O_2). Din acest punct se trasează un cerc cu raza R_2 care se intersectează cu primul cerc într-un singur punct (T) care este punctul de tangență.

Dacă din punctul T se ridică o perpendiculară pe dreapta O_1O_2 se obține tangenta comună la cele două cercuri.

12.6 Cercuri concentrice

12.6.1 Cercuri concentrice interior

Pentru construcția unui cerc concentric interior cu cerc dat conform Fig.12.37 se procedează astfel: la cercul dat de rază R și cu centrul în punctul O se construiesc mai multe cercuri de rază $r < R$ tangente interior la cercul dat. Unind centrele cercurilor de rază r se obține cercul cu centrul în O de rază $R - r$ concentric interior cu cercul dat.

12.6.2 Cercuri concentrice exterior

Pentru construcția unui cerc concentric exterior cu cerc dat conform Fig.12.38 se procedează astfel: la cercul dat de rază R și cu centrul în punctul O se construiesc mai multe cercuri de rază $r < R$ tangente exterior la cercul dat. Unind centrele cercurilor de rază r se obține cercul cu centrul în O de rază $R + r$ concentric exterior cu cercul dat.

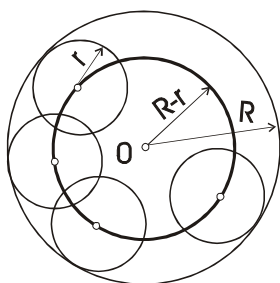


Fig. 12.37

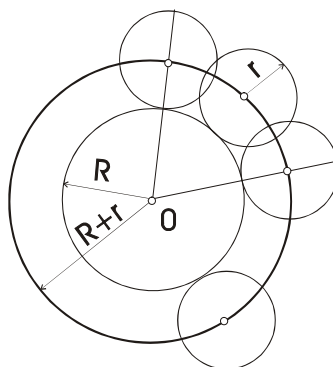


Fig. 12.38

13. RACORDARI

Racordarea este operația de legătură prin intermediul a unu sau două arce de cerc între: două linii, o linie și un cerc, două cercuri.

Racordarea este operația prin care două linii dintr-un plan sunt unite printr-un arc de curbă tangent la fiecare dintre cele două linii [20].

Racordările au la baza construcțiilor geometrice următoarea proprietate pe care o are tangenta comună la două cercuri tangente: **tangenta este perpendiculară pe razele celor două cercuri în punctul de contact, respectiv pe dreapta care unește centrele lor.**

Regulile racordărilor:

- La racordarea unei drepte cu un arc de cerc, punctul de racordare **T** se găsește la intersecția perpendicularei trasate din centrul cercului pe dreapta respectivă conform Fig.13.1;
- La racordarea a două cercuri sau arce de cerc, punctul de racordare **T** se găsește pe dreapta care unește centrele celor două cercuri conform Fig.13.2.

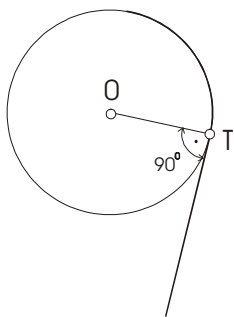


Fig. 13.1

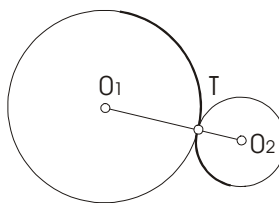


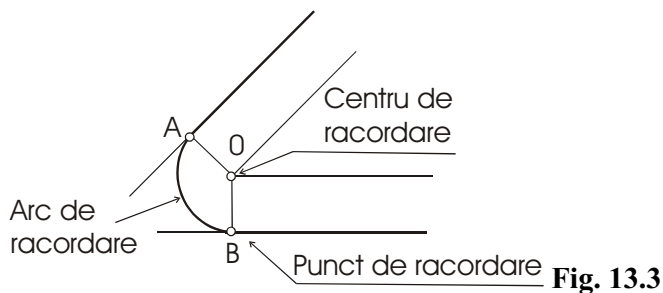
Fig. 13.2

13.1 Elementele racordării

Elementele racordării conform Fig.13.2 sunt:

- Centrul de racordare (**O**) este centrul arcului de racordare;
- Punctul de racordare (**A**) este punctul de contact între elementele ce se racordează;

- *Arcul de racordare (AB)* este arcul de cerc cu care se execută racordarea.



13.2 Racordarea a două drepte

13.2.1 Racordarea a două drepte cu un arc de cerc de rază dată

13.2.1.1 Metoda paralelelor

Pentru racordarea a două drepte (Δ_1) și (Δ_2) cu un arc de racordare de rază dată R conform Fig.13.4 se procedează astfel: se trasează câte o paralelă la dreptele (Δ_1) și (Δ_2), la o distanță R , la intersecția lor determinându-se centrul de racordare O din care se ridică câte o perpendiculară pe cele două drepte pe care le intersectează în punctele A respectiv B rezultând punctele de racordare. În continuare cu vârful compasului în O și cu o rază $R = OA = OB$ se trasează arcul de racordare AB căutat.

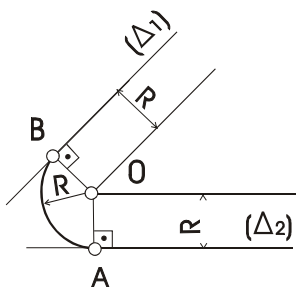


Fig. 13.4

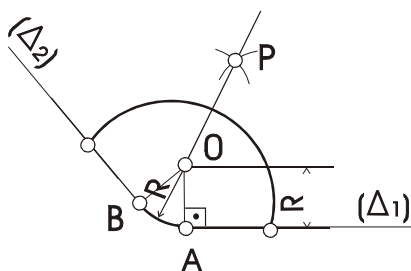


Fig. 13.5

13.2.1.2 Metoda bisectoarei

Pentru racordarea a două drepte (Δ_1) și (Δ_2) cu un arc de racordare de rază dată R conform Fig.13.5 se procedează astfel: se împarte unghiul format de cele două drepte în părți egale și se trasează bisectoarea după care se trasează o paralelă la una din cele două drepte la distanța R . În locul de intersecție al paralelei cu bisectoarea rezultă punctul O numit și centru de racordare. În continuare se trasează din punctul O câte o perpendiculară pe cele două drepte inițiale în punctele A respectiv B numite și puncte de racordare, după care cu vârful compasului în O și cu o rază $R=OA=OB$ se trasează arcul de racordare AB .

13.2.2 Racordarea a două drepte cu un arc de cerc fiind dat unul din punctele de racordare

Pentru racordarea a două drepte (Δ_1) și (Δ_2) cu un arc de cerc fiind dat unul din punctele de racordare (*punctul B*) conform Fig.13.6 se procedează astfel: se prelungesc dreptele (Δ_1) și (Δ_2) până se intersectează în punctul A , după care se trasează bisectoarea unghiului format de cele două drepte. În continuare se ridică o perpendiculară pe dreapta (Δ_1) în punctul B până se intersectează cu bisectoarea trasată anterior rezultând punctul O care este centrul de racordare. Din punctul O se duce o perpendiculară pe dreapta (Δ_2) iar piciorul acesteia se notează cu C , care este cel de al doilea punct de racordare. În continuare cu vârful compasului în punctul O și cu raza $R = OB = OC$ se trasează un arc de cerc din punctul B până în punctul C , arcul AB fiind arcul de racordare căutat pentru racordarea dreptelor (Δ_1) și (Δ_2).

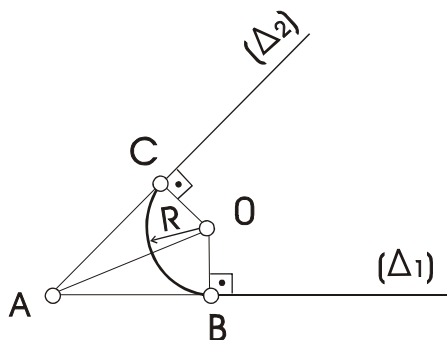


Fig. 13.6

13.2.3 Racordarea a două drepte paralele cu un arc de cerc fiind date punctele de racordare

Pentru racordarea a două drepte paralele (Δ_1) și (Δ_2) cu un arc de cerc conform Fig.13.7 se procedează astfel: se aleg punctele de racordare A pe dreapta (Δ_1) și B pe dreapta (Δ_2) , după care se duce dreapta (Δ'_1) paralelă la dreapta (Δ_1) la distanța $R = AB$. În continuare din punctul B se duce un arc de cerc cu raza $R = AB$ care intersectează dreapta (Δ'_1) în punctul O numit centru de racordare. Din acest punct O , cu aceeași rază $R = AB$ se trasează un arc de cerc care unește punctele de racordare A și B rezultând arcul de racordare AB căutat.

Caz particular: unul din punctele de racordare (B) conform Fig.13.8 poate să fie un punct al unei muchii; este cel mai frecvent caz întâlnit în practica construcțiilor de mașini la strunjita suprafețelor. Construcția este asemănătoare cazului prezentat anterior (Fig.13.7).

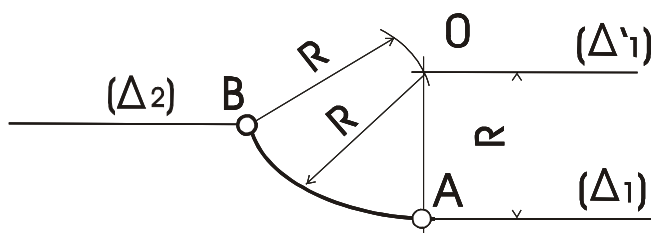


Fig. 13.7

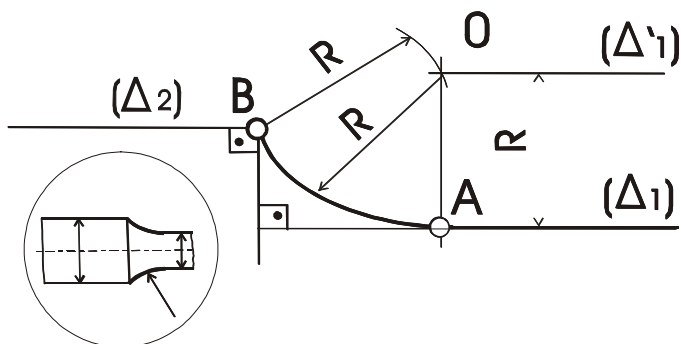


Fig. 13.8

13.2.4 Racordarea a două drepte perpendiculare cu un arc de cerc de rază dată

Pentru racordarea a două drepte perpendiculare (Δ_1) și (Δ_2) cu un arc de racordare de rază dată R conform Fig.13.9 se procedează astfel: cu vârful compasului în punctul de intersecție P și cu raza R se trasează arce de cerc care intersectează dreptele în punctele A respectiv B care sunt centrele de racordare. În continuare cu aceeași rază R din punctele A și B se duce câte un arc de cerc care se intersectează în punctul O numit centru de racordare. Din punctul O și cu o rază $R = OA = OB$ se trasează arcul de racordare AB căutat.

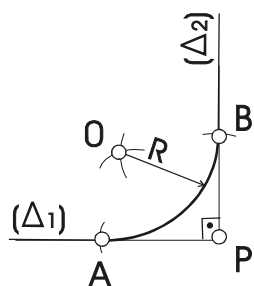


Fig. 13.9

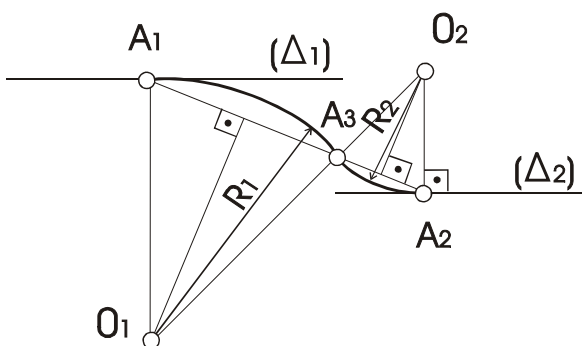


Fig. 13.10

13.2.5 Racordarea a două drepte paralele prin două arce de cerc fiind date punctele de racordare

Pentru racordarea a două drepte paralele (Δ_1) și (Δ_2) prin două arce de cerc fiind date punctele de racordare A_1 și A_2 conform Fig.13.10 se procedează astfel: se trasează dreapta A_1A_2 pe care se alege un punct oarecare A_3 , după care se ridică mediatoarele segmentelor A_1A_2 și A_2A_3 de o parte și de alta a dreptei în sens invers. În continuare se ridică perpendiculare în punctul A_1 pe dreapta (Δ_1) și în punctul A_2 pe dreapta (Δ_2) care intersectează mediatoarele în centrele de racordare O_1 și O_2 . Din punctul O_1 cu raza $R_1=O_1A_1$ se trasează arcul de racordare A_1A_3 , iar din punctul O_2 cu raza $R_2=O_2A_2$ se trasează arcul de racordare A_2A_3 , acestea fiind arcele de racordare căutate pentru racordarea celor două drepte paralele.

13.2.6 Racordarea a două perechi de drepte paralele egal depărtate între ele prin două arce de cerc fiind date punctele de racordare

Pentru racordarea a două perechi de drepte paralele egal depărtate între ele (Δ_1) și (Δ_2) cu (Δ'_1) și (Δ'_2) prin două arce de cerc fiind date două puncte de racordare C_1 și C_2 conform Fig.13.11 se procedează astfel: se trasează inițial dreapta C_1C_2 , după care se determină mijlocul acesteia prin construcția punctului C_3 ; în continuare se ridică mediatoarele segmentelor C_1C_2 și C_2C_3 în sens invers rezultând punctele A respectiv B . Din punctele C_1 și C_2 se ridică perpendiculare care intersectează mediatoarele în centrele de racordare O_1 și O_2 . Perpendiculara ridicată din punctul C_1 pe dreapta (Δ_1) intersectează paralela (Δ'_1) în C'_1 iar prelungirea perpendicularei în C_2 pe dreapta (Δ_2) intersectează dreapta (Δ'_2) în C'_2 . În continuare se unesc punctele C'_1 cu C'_2 rezultând dreapta $C'_1C'_2$ și O_1 cu O_2 rezultând dreapta

O_1O_2 care se intersectează în punctul C'_3 . Din punctul O_1 cu raza egală cu O_1C_1 se trasează arcul de cerc C_1C_3 iar din O_2 cu raza egală cu O_2C_2 se trasează arcul de cerc C_2C_3 , arce prin care se racordează paralele (Δ_1) și (Δ_2) . Din punctul O_1 cu raza egală cu $O_1C'_1$ se trasează arcul de cerc $C'_1C'_3$ iar din O_2 cu raza egală cu $O_2C'_2$ se trasează arcul de cerc $C'_2C'_3$, arce prin care se racordează dreptele paralele (Δ'_1) și (Δ'_2) care sunt paralele cu dreptele (Δ_1) și (Δ_2) .

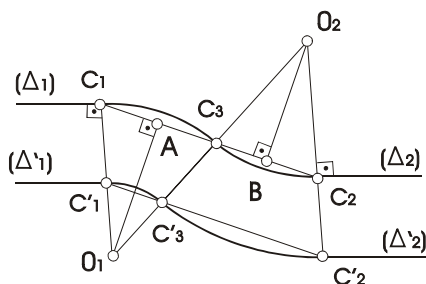


Fig.13.11

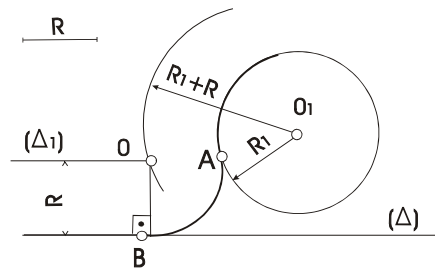


Fig.13.12

13.3 Racordarea unei drepte cu un cerc dat

13.3.1 Racordarea unei drepte cu un cerc de rază dată

Pentru racordarea unei drepte cu un cerc de rază dată R conform Fig.13.12 se procedează astfel: se trasează o paralelă (Δ_1) la dreapta (Δ) la o distanță egală cu valoarea razei R , după care din centrul cercului O_1 se trasează un arc de cerc cu raza egală cu R_1+R care intersectează dreapta (Δ_1) în punctul O numit și centru de racordare. În continuare din punctul O se duce o perpendiculară pe dreapta (Δ) rezultând punctul de racordare B iar unind punctul O cu O_1 dreapta rezultată intersectează cercul în punctul de racordare A . În final cu vârful compasului în O și cu deschiderea egală cu raza R se trasează un arc de cerc care unește punctele A și B rezultând arcul de racordare AB căutat.

13.3.2. Racordarea unei drepte cu un cerc fiind dat punctul de racordare de pe dreapta

Pentru racordarea unei drepte (Δ) cu un cerc de rază oarecare R_1 fiind dat punctul de racordare de pe dreapta A conform Fig.13.13 se procedează astfel: se ridică o perpendiculară pe dreapta (Δ) în punctul A pe care se trasează segmentul $AB=R_1$ și se unește punctul B astfel determinat cu centrul cercului O_1 . Din punctul A se duce o perpendiculară la AB care intersectează cercul în punctul de racordare C . Unind punctul O_1 cu C rezultă dreapta O_1C care prelungită se intersectează cu prelungirea perpendiculararei AB în centrul de racordare O_2 . Cu centrul în punctul O_2 și cu raza $R = O_2A$ se descrie arcul de racordare AC care racordează dreapta (Δ) cu cercul dat.

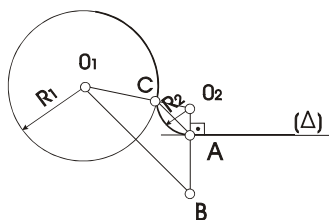


Fig.13.13

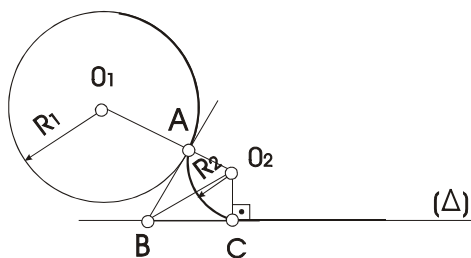


Fig.13.14

13.3.3 Racordarea unei drepte cu un cerc fiind dat punctul de racordare de pe cerc

Pentru racordarea unei drepte (Δ) cu un cerc de rază oarecare R_1 fiind dat punctul de racordare A de pe cerc se procedează conform Fig.13.14 astfel: se construiește tangenta în punctul A la cercul cu centrul în O_1 și de rază R_1 care se intersectează cu prelungirea dreptei (Δ) în punctul B . Se construiește bisectoarea unghiului format de dreapta (Δ) și

tangenta la cerc care se intersectează cu prelungirea razei O_1A în centrul de racordare O_2 . Din punctul O_2 se coboară o perpendiculară pe dreapta (Δ) rezultând punctul de racordare C . Cu vârful compasului în O_2 se descrie un arc de cerc cu raza $R_2=O_2C$ care este arcul de cerc care racordează dreapta (Δ) cu cercul dat.

13.3.4 Racordarea unei drepte cu un cerc printr-un arc de cerc tangent exterior într-un punct dat de pe cerc

Pentru racordarea unei drepte (Δ) cu un cerc dat de rază oarecare r printr-un arc de cerc de rază dată R tangent exterior la punctul B dat pe cerc conform Fig.13.15 se procedează astfel: se trasează o paralelă (Δ_1) la dreapta (Δ) la distanța dată R după care din punctul O_1 se trasează un arc de cerc cu raza egală cu $R+r$ care intersectează paralela în centrul de racordare O . Coborând o perpendiculară din O pe dreapta (Δ) se obține punctul de racordare A de pe dreaptă iar unind punctul O cu O_1 ; dreapta OO_1 intersectează cercul în punctul de racordare B . Cu centrul în O și cu raza egală cu R se trasează arcul de racordare AB care racordează dreapta (Δ) cu cercul dat printr-un arc de cerc tangent exterior într-un punct dat de pe cerc.

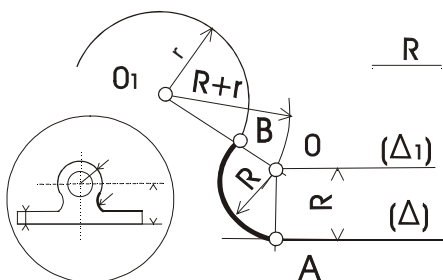


Fig. 13.15

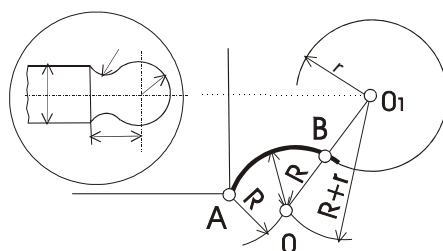


Fig. 13.16

Caz particular: unul din punctele de racordare (A) conform Fig.13.16 poate să fie un punct al unei muchii; este cazul frecvent întâlnit în practica construcțiilor de mașini la strunjirea articulațiilor sferice. Construcția este asemănătoare cazului prezentat anterior (Fig.13.15).

13.3.5 Racordarea unei drepte cu un cerc printr-un arc de cerc tangent interior într-un punct dat de pe cerc

Pentru racordarea unei drepte (Δ) cu un cerc dat de rază oarecare r printr-un arc de cerc de rază dată R tangent interior la punctul B dat pe cerc conform Fig.13.17 se procedează astfel: se trasează o paralelă (Δ_1) la dreapta (Δ) la distanța dată R după care din punctul O_1 se trasează un arc de cerc cu raza egală cu $R-r$ care intersectează paralela în centrul de racordare O . Coborând o perpendiculară din O pe dreapta (Δ) se obține punctul de racordare A de pe dreaptă iar unind punctul O cu O_1 , prelungirea dreptei OO_1 intersectează cercul în punctul de racordare B . Cu centrul în O și cu raza egală cu R se trasează arcul de racordare AB care racordează dreapta (Δ) cu cercul dat printr-un arc de cerc tangent interior într-un punct dat de pe cerc.

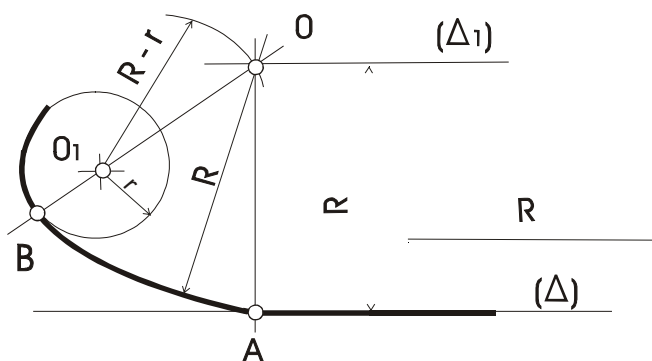


Fig. 13.17

13.4 Racordarea a două cercuri

13.4.1 Racordarea a două cercuri cu un arc de cerc de rază dată tangent exterior la cercurile date

Pentru racordarea a două cercuri (cercul O_1 de rază r' și cercul O_2 de rază r) cu un arc de cerc (racordare) dat de rază R tangent exterior la cele două cercuri conform Fig.13.18 se procedează astfel: din punctul O_1 se trasează un arc de cerc cu raza $R+r'$ iar din punctul O_2 se trasează un alt arc de cerc cu raza $R+r$ care se intersectează în centrul de racordare O . Unind punctul O cu O_2 rezultă punctul de racordare A iar unind punctul O cu O_1 rezultă punctul de racordare B . În continuare cu centrul în O și cu raza egală cu R se trasează arcul de racordare AB care racordează cercurile O_1 și O_2 în punctele A și B și este tangent exterior la cercurile date.

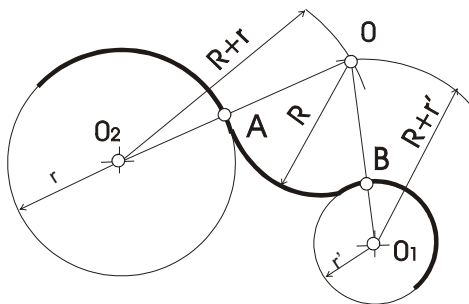


Fig. 13.18

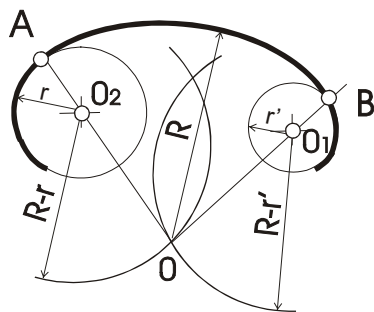


Fig. 13.19

13.4.2 Racordarea a două cercuri cu un arc de cerc de rază dată tangent interior la cercurile date

Pentru racordarea a două cercuri (cercul O_1 de rază r' și cercul O_2 de rază r) cu un arc de cerc (racordare) dat de rază R tangent interior la cele două cercuri conform Fig.13.19 se procedează astfel: din punctul O_1 se trasează un arc de cerc cu raza $R-r'$ iar din punctul O_2 se trasează un alt arc de cerc cu raza $R-r$ care se intersectează în centrul de racordare O . Unind

punctul O cu O_2 și prelungind dreapta OO_2 aceasta intersectează cercul O_2 în punctul de racordare A iar unind punctul O cu O_1 și prelungind dreapta OO_1 aceasta intersectează cercul O_2 în punctul de racordare B . În continuare cu centrul în O și cu raza egală cu R se trasează arcul de racordare AB care racordează cercurile O_1 și O_2 în punctele A și B și este tangent interior la cercurile date.

13.4.3 Racordarea a două cercuri cu un arc de cerc de rază dată, tangent interior la unul și exterior la celălalt cerc

Pentru racordarea a două cercuri (cercul O_1 de rază r' și cercul O_2 de rază r) cu un arc de cerc (racordare) dat de rază R tangent interior la unul și exterior la celălalt se procedează conform Fig.13.20 astfel: din punctul O_1 se trasează un arc de cerc cu raza $R+r$ iar din punctul O_2 se trasează un alt arc de cerc cu raza $R-r'$ care se intersectează în centrul de racordare O . Unind punctul O cu O_2 și prelungind dreapta OO_2 aceasta intersectează cercul O_2 în punctul de racordare A iar unind punctul O cu O_1 dreapta OO_1 intersectează cercul O_1 în punctul de racordare B . În continuare cu centrul în O și cu raza egală cu R se trasează arcul de racordare AB care racordează cercurile O_1 și O_2 în punctele A și B tangent interior la unul și tangent exterior la celălalt.

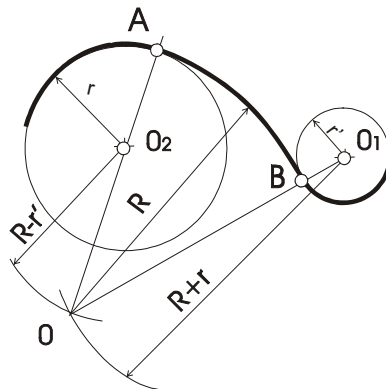


Fig. 13.20

14. CURBE

14.1 Curbe plane

14.1.1 Curbe definite prin arce de cerc

14.1.1.1 Construcția ovoidului când se cunoaște axa mică

Curba ovoid este o curbă plană închisă definită de arce de cerc racordate și cu centrele situate pe două axe (axa mică și axa mare) a cărei formă este asemănătoare cu secțiunea centrală a unui ou.

Obs: a nu se confunda cu *ovoidul* ca și corp solid care are forma unui ou.

Pentru construcția ovoidului atunci când se cunoaște axa mică conform Fig.14.1 se procedează astfel: fiind dată axa mică AA_1 se determină punctul O ca fiind mijlocul acesteia din care se ridică o perpendiculară de o parte și de alta a acesteia reprezentând axa mare. Din punctul O cu raza $r = OA = OA_1$ se duce un cerc care intersectează axa mare în punctele B și B_1 astfel arcul ABA_1 formează un prim arc de cerc a curbei ovoid, după care din punctele de racordare A și A_1 se duc arce de cerc cu raza $R = AA_1$ de cealaltă parte a axei mici. Unind punctele A cu B_1 și A_1 cu B_1 și prelungind dreptele astfel obținute până intersectează arcele de cerc anterior construite se obțin punctele de racordare C și C_1 . Din centrul de racordare B_1 și cu raza $r' = B_1C = B_1C_1$ se trasează un arc (cerc) de racordare la arcele de cerc construite anterior. Figura formată din arcele de cerc ABA_1 , A_1C , CC_1 și CA reprezintă curba ovoid căutată.

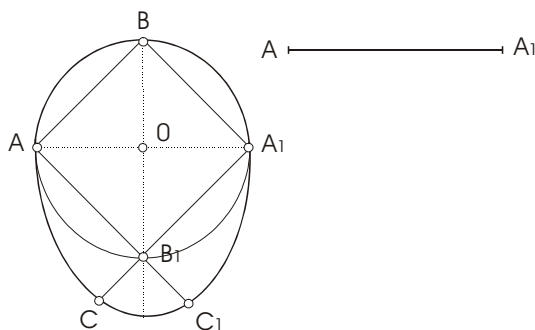


Fig. 14.1

14.1.1.2 Construcția ovalului când se cunoaște axa mare

Ovalul este curba convexă închisă care are o axă de simetrie și curba maximă în punctul de pe axă.

Curba convexă este curba a cărei formă reprezintă în secțiune dosul unei scobituri / este arcul de curbă față de care un punct este situat într-o parte a curbei opusă celei a punctelor față de care arcul este concav.

Curba concavă conform Fig.14.2 este definită prin calitatea unui arc de curbă, față de un punct exterior A , de a avea, între două puncte P_1 și P_2 de pe el, o coardă care să fie intersectată de segmentul de dreaptă care unește punctul A cu orice punct P de pe arc dintre P_1 și P_2 , într-un punct M situat între A și P .

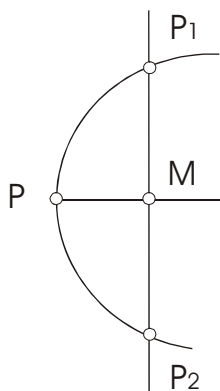


Fig. 14.2

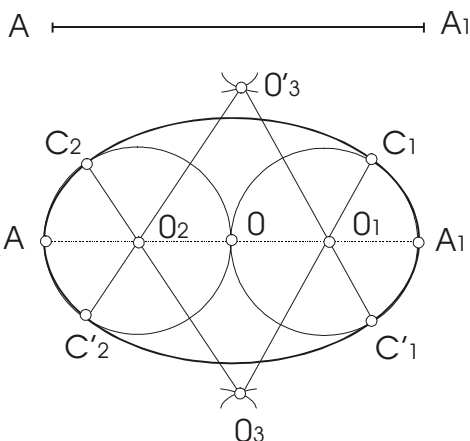


Fig. 14.3

Pentru construcția ovalului atunci când se cunoaște axa mare, conform Fig.14.3, se procedează astfel: fiind dată axa mare AA_1 aceasta se împarte în patru părți rezultând punctele O , O_1 și O_2 . Din punctele O_1 și O_2 se trasează câte un cerc cu raza $r = O_1A_1 = O_2A = OO_1 = OO_2$, cercuri ce sunt tangente în punctul O . Din aceleași puncte O_1 și O_2 se trasează de o parte și de alta a axei mari două cerce de cerc cu raza $R = O_1O_2$ care se

intersectează în punctele O_3 și O_4 (centre de racordare). Prolungind dreptele ce unesc centrul O_1 cu O_3 și O_4 acestea intersectează cercul în punctele C_1 și C_1' iar prolongind dreptele ce unesc centrul O_2 cu O_3 și O_4 acestea intersectează cel de al doilea cerc în punctele C_2 și C_2' obținând astfel punctele de racordare C_1 , C_1' , C_2 și C_2' .

Din punctele O_3 și O_4 se trasează arcele $C_1' C_2'$ și $C_1 C_2$ care racordează arcele de cerc $C_1' A_1 C_1$ și $C_2' A_2 C_2$ obținând astfel ovalul căutat.

14.1.1.3 Construcția ovalului când se cunosc axe

Pentru construcția ovalului atunci când se cunosc cele două axe (AA_1 și BB_1) conform Fig.14.4 se procedează astfel: din punctul O (prin care s-a notat punctul de intersecție a axelor perpendiculare AA_1 și BB_1 situat la mijlocul celor două axe) se trasează un cerc cu raza $R = OA = OB$ care intersectează prelungirea axei mici BB_1 în punctele D și E . Din punctul B se trasează un arc de cerc cu raza $r = BD$ care intersectează dreptele AB și A_1B în punctele F respectiv G , după care pe dreptele AF și A_1G la mijlocul acestora se ridică perpendiculare de o parte și de alta a acestora intersectând axa mare în punctele O_1 și O_2 , iar axa mică în punctul O_3 respectiv O_4 (pentru o construcție similară celei din punctul B în punctul B_1). În continuare se procedează la construcția ovalului prin arce de cerc construind din punctele O_1 și O_2 cu raza $O_1A = O_2A$ arce de cerc care intersectează perpendicularele ridicate anterior în punctele de racordare C_1 , C_1' respective C_2 , C_2' , după care din centrele de racordare O_3 și O_4 se trasează arce de cerc cu raza $O_3B = O_4B_1$. Curba alcătuită din arcele de cerc $C_1' A C_1$, $C_2 B C_2$, $C_1 A_1 C_1'$ și $C_2' B_1 C_2'$ reprezintă ovoidul căutat atunci când se cunosc cele două axe.

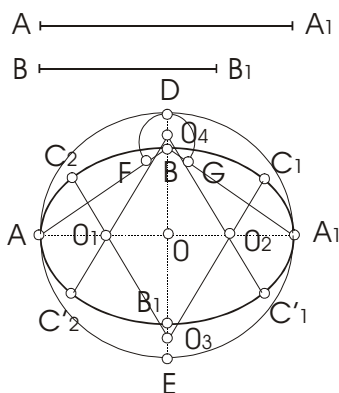


Fig. 14.4

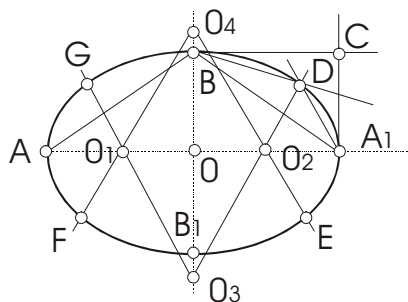


Fig. 14.5

14.1.1.4 Construcția ovalului prin metoda dreptunghiului

Pentru construcția ovalului atunci când se cunosc cele două axe (AA_1 și BB_1) se mai poate folosi și metoda dreptunghiului pentru care conform Fig.14.5 se procedează astfel: se notează cu O punctul de intersecție a celor două axe perpendiculare la mijlocul lor. Din punctele B și A_1 se ridică către o perpendiculară care se intersectează în punctul C formând dreptunghiul A_1OBC , după care se trasează diagonală A_1B și bisectoarele unghiurilor CBA_1 și BA_1C care se intersectează în punctul de racordare D din care se ridică o perpendiculară pe diagonală A_1B care intersectează axa mare în punctul O_2 iar axa mică în punctul O_3 . Celelalte centre (O_1 și O_4) și punctele de racordare (E , F și G) se determină prin construcții similare (dreptunghi) față de axele ovalului cu care sunt simetrice.

14.1.2 Spirale

14.1.2.1 Spirale definite prin arce de cerc

Spiralele definite prin arce de cerc sunt curbe plane construite dintr-o succesiune de arce de cerc racordate între ele și a cărei formă este asemănătoare cu secțiunea centrală făcută printr-o cochilă de melc.

14.1.2.1.1 Construcția spiralei cu două centre

Pentru construcția spiralei cu două centre atunci când se cunoaște pasul spiralei pe dreapta (Δ) se procedează conform Fig.14.6 astfel: se determină punctul O_1 ca fiind mijlocul segmentului O_2A (pasul spiralei), după care cu vârful compasului în O_1 se trasează un arc de cerc cu raza O_1O_2 până în punctul A după care cu vârful compasului în O_2 și cu raza O_2A se trasează un arc de cerc care intersectează dreapta (Δ) în punctul C , după care cu vârful compasului în O_2 și cu raza O_2C se trasează un alt arc de cerc până intersectează dreapta (Δ) în punctul D și tot așa prin alternarea centrelor O_1 și O_2 și prin adăugarea la raza existentă anterior a unei mărimi echivalente cu jumătate de pas se continuă construcția elicei.

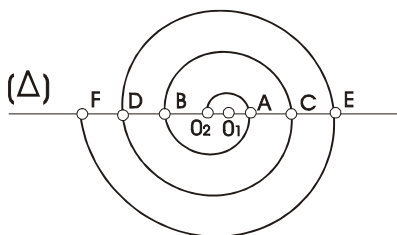


Fig. 14.6

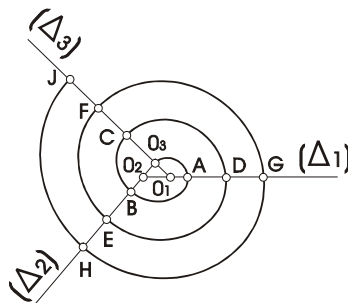


Fig. 14.7

14.1.2.1.2 Construcția spiralei cu trei centre

Pentru construcția spiralei cu trei centre atunci când se cunoaște pasul spiralei se procedează conform Fig.14.7 astfel: se trasează un triunghi echilateral cu latura egală cu pasul elicei și cu vârfurile O_1 , O_2 , O_3 , după care se prelungesc laturile acestuia rezultând semidreptele Δ_1 , Δ_2 și Δ_3 . Din punctul O_1 cu raza $O_1O_2 = O_1O_3$ se trasează un arc de cerc care intersectează dreapta Δ_1 în punctul A , după care cu centrul în punctul O_2 și cu raza egală cu O_2A se trasează un arc de cerc care intersectează dreapta Δ_2 în punctul B continuându-se cu un arc de cerc cu centrul în O_3 și raza

egală cu OB care intersectează dreapta Δ_3 în punctul C . Construcția spiralei se poate continua prin trasarea de arce de cerc succesive din centrele O_1 , O_2 , O_3 cu raze egale cu O_1C, O_2D, O_3E respectiv O_1F, O_2G, O_3H .

14.1.2.1.3 Construcția spiralei cu patru centre

Pentru construcția spiralei cu patru centre atunci când se cunoaște pasul spiralei se procedează conform Fig.14.8 astfel: se construiește un pătrat cu latura egală cu pasul spiralei și cu vârfurile O_1 , O_2 , O_3 și O_4 , iar laturile pătratului se prelungesc obținând semidreptele Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 și Δ_4 . Cu vârful compasului din punctul O_1 se trasează un arc de cerc cu raza egală cu pasul elicei, din punctul O_4 până unde arcul intersectează dreapta Δ_1 în punctul A , după care cu vârful compasului în O_2 și cu raza O_2A se trasează un arc de cerc din punctul A până când arcul intersectează dreapta Δ_2 în punctul B urmând ca din punctul O_3 cu raza O_3B să se traseze un arc de cerc din punctul B până când arcul intersectează dreapta Δ_3 în punctul C ca în continuare din punctul O_4 cu raza O_4C să se traseze un arc de cerc din punctul C până când arcul intersectează dreapta Δ_4 în punctul D . Construcția spiralei se poate continua prin trasarea de arce de cerc succesive din centrele O_1 , O_2 , O_3 și O_4 cu raze egale cu O_1D , O_2E , O_3F , O_4G respectiv O_1H , O_2J , O_3K , O_4L .

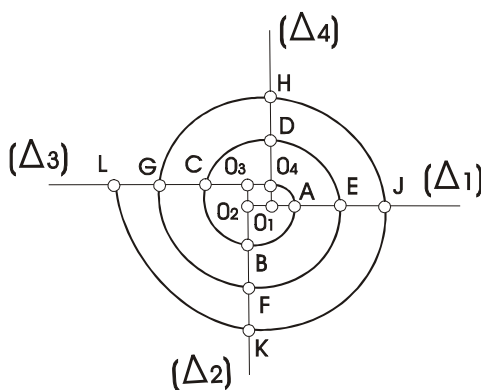


Fig. 14.8

14.1.2.2 Spiralele definite ca rotații

Spirala este locul geometric al pozițiilor ocupate în plan de un punct mobil care înaintează după o lege anumită, pe o dreaptă, aceasta având o mișcare de rotație determinată, în același sens, în jurul unui punct fix.

Spirala este o curbă plană deschisă a cărei spiră corespunde unei rotații complete a dreptei, iar distanța dintre două spire consecutive se numește *pas*.

14.1.2.2.1 Construcția spiralei lui Arhimede când se cunoaște pasul spiralei

Spirala lui Arhimede este o curbă plană deschisă și descrisă de un punct care se mișcă pe o dreaptă cu o viteză constantă, dreapta rotindu-se în același timp în jurul unui centru cu viteza unghiului constantă ω ; altfel spus deplasarea punctului pe dreaptă este proporțională cu unghiul de rotație al dreptei.

Expresia analitică a *spiralei lui Arhimede* este dată de relația:

$$r = a\varphi$$

unde: φ – este unghiul de rotire al razei;

$$a = \frac{v}{\omega} = ct, \text{ unde } v \text{ este viteza periferică a punctului.}$$

Pentru construcția spiralei lui Arhimede când se cunoaște pasul spiralei, se procedează conform Fig.14.9 astfel: se trasează un cerc cu raza egală cu pasul spiralei, ($OA = r_0 = 2\pi r_a$, unde r_a este drumul parcurs de un punct pe dreaptă în timp ce aceasta se rotește cu 360° (pasul spiralei). Acest cerc se împarte într-un număr de părți egale (de exemplu opt) punctele de împărțire notându-se cu $A_1, A_2, \dots, A_8$, după care se împarte și raza cercului OA în același număr (opt) de părți egale rezultând punctele de intersecție 1, 2,..... 8. Din centrul cercului (O) se duc raze în punctele de

intersecție $A_1, A_2, \dots, A_8$. Cu piciorul compasului în centrul O și cu raza OI se descrie un arc de cerc ce intersectează raza OA_1 în punctul a_1 , după care se descrie un arc de cerc cu raza OA_2 în punctul a_2 ș.a.m.d. pentru toate cele opt puncte, iar în final prin unirea punctelor $O, a_1, a_2, \dots, a_8$ se obține spirala căutată (spirala lui Arhimede).

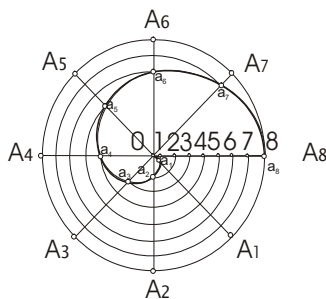


Fig. 14.9

14.1.2.2 Construcția spiralei hiperbolice când se cunoaște distanța asimptotei față de originea coordonatelor

Spirala hiperbolică rezultă din mișcarea unui punct pe o rază astfel încât distanța acestuia față de centrul de rotire este tot timpul invers proporțională cu unghiul de rotire φ al razelor, măsurat față de o poziție inițială.

Ecuția spiralei hiperbolice este:

$$r\varphi = a$$

unde: a – determină distanța asimptotei acestei spirale față de originea coordonatelor,

Pentru construcția spiralei hiperbolice conform Fig. 14.10 se procedează astfel: din punctul O , ca centru, se trasează un cerc cu o rază oarecare, care se împarte la un număr de părți egale. Punctele 1, 2, 3, ... etc., astfel obținute se unesc prin raze cu punctul O . Spre exemplu dacă cercul se împarte în 12 părți egale atunci unghiul φ_1 corespunzător primei raze este egal cu zero iar $r_1 = \infty$.

Pentru: $\varphi_2 = \pi/6 \Rightarrow r_2 = 6a/\pi$,

$$\varphi_3 = 2\pi/6 \Rightarrow r_3 = 6a/2\pi,$$

$$\varphi_4 = 3\pi/6 \Rightarrow r_4 = 6a/3\pi,$$

.....

Caz general $r_n = 6a/(n-1)\pi$.

Segmentele astfel obținute se iau pe razele corespunzătoare rezultând punctele *II, III, IV, ...* etc., prin unirea cărora se obține spirala hiperbolică căutată.

Când $\varphi \rightarrow 0$, curba asimptotică se apropie de dreapta *CB*, iar când $\varphi \rightarrow \infty$, curba asimptotică se apropie de polul *O*.

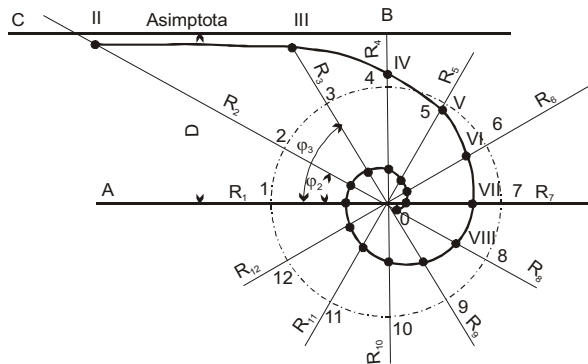


Fig. 14.10

14.1.3 Curbe conice

14.1.3.1 Elipsa. Construcția elipsei când se cunosc axele

Elipsa este locul geometric al curbelor din plan pentru care suma distanțelor fiecăruia din punctele sale cu două puncte fixe (*F* și *F'*) este constantă (Fig.14.11).

Punctele *F, F'* se numesc *focare*, iar distanțele *MF* respectiv *MF'* de la un punct *M* al elipsei la focare se numesc *raze vectoriale*. Distanța constantă *2a* trebuie să fie mai mare decât distanța dintre focare. Punctele *M₁, M₂, M₃, M₄* ca și întreaga elipsă admit ca axă de simetrie perpendiculara pe mijlocul segmentului ce leagă focarele. Punctul de intersecție al celor două axe de simetrie notat cu *O* se numește *centrul de*

simetrie al elipsei (centru). Distanța de la focare la centru, $OF_1=O_2F=e$, se numește *excentricitate liniară* sau *distanță focală*.

Proprietăți:

- *Elipsa are două axe de simetrie: AA' - axa mare și BB' - axa mică;*
- *Suma razelor vectoare este egală cu AA' ;*
- *$BF=BF'=AA'/2$; cu această proprietate se pot determina focarele elipsei atunci când se cunosc axele ei AA' și BB' ;*
- *Tangenta într-un punct M este bisectoarea exterioară a unghiului FMF' .*

Tangenta într-un punct oarecare M al elipsei se obține dacă se unește punctul de intersecție L al dreptelor AB cu B_1M cu punctul E și se prelungește dreapta EL până intersectează dreapta BD în punctul de intersecție T , care aparține tangentei (Fig.14.12). Al doilea punct P al tangentei se situează la intersecția paralelei duse prin punctul L la dreapta OA cu segmental AD . Normala este perpendiculara MN dusă în punctul M pe tangenta PT .

Pentru construcția elipsei când se cunosc axele AA_1 și BB_1 se procedează conform Fig.14.12 astfel: se trasează cele două axe perpendiculare la mijlocul lor, după care se construiește dreptunghiul $CDEF$ și se împart segmentele OA_1 și A_1C în același număr de părți egale (de exemplu cinci) rezultând punctele de împărțire $1, 2, 3, 4$ pe OA_1 și $1', 2', 3', 4'$ pe A_1C . La intersecția dreptelor ce unesc punctul B_1 cu $1, 2, 3, 4$ și punctul B cu $1', 2', 3', 4'$ rezultă punctele G, H, J, C . Se unesc punctele B, G, H, J, K și A printr-o dreaptă curbă obținându-se astfel un sfert de elipsă. Se procedează la construcții similare (simetrice) față de celelalte semiaxe obținând în final elipsa căutată. Construcția este cu atât mai exactă cu cât axele se împart într-un număr mai mare de părți.

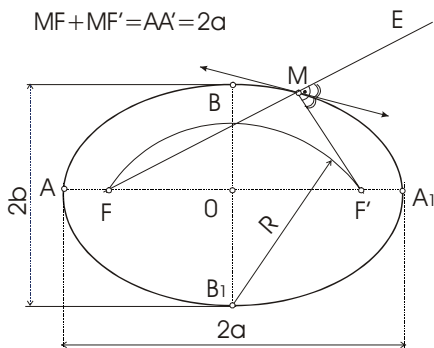


Fig. 14.11

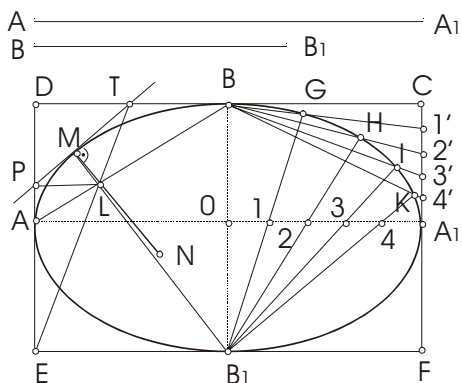


Fig. 14.12

14.1.3.2 Parabola

Parabola este locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fix (F) și de o dreaptă fixă (d) din plan (Fig.14.13).

Parabola este o curbă deschisă cu o singură ramură.

Punctul F se numește focar, iar dreapta fixă (d) se numește *directoare*. Distanța de la focar la directoare se notează cu p și se numește *parametrul hiperbolei*. Orice paralelă la dreapta directoare pentru o distanță mai mare de $p/2$ este intersectată de un cerc oarecare cu centrul în F în două puncte ale parabolei T și T' M și M' . Aceste puncte sunt simetrice față de perpendiculara pe directoare prin focar. Axa de simetrie se numește axa parabolei și atinge parabola în punctul A care are distanța de la directoare la focar egală cu $p/2$.

Proprietăți:

- Parabola are o singură axă de simetrie AA' ;
- Vârful A este la egală depărtare de focar și de directoare;
- Tangenta într-un punct M este bisectoarea unghiului PMP' .

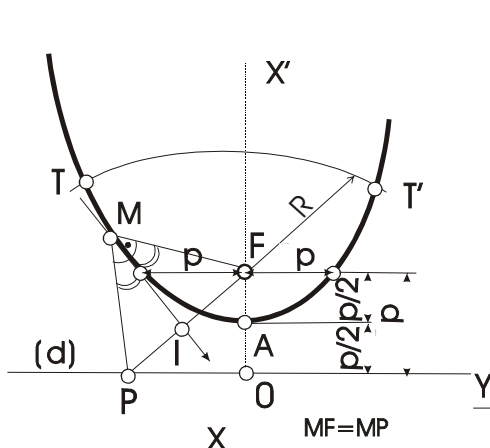


Fig. 14.13

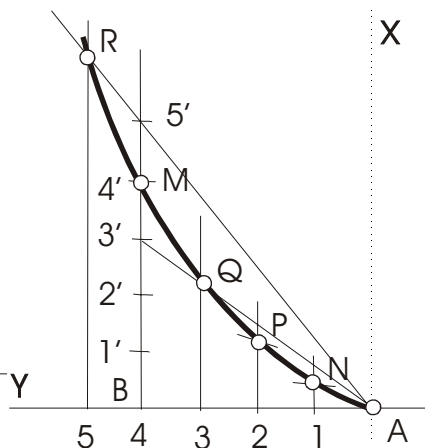


Fig. 14.14

14.1.3.2.1 Construcția parabolei când se cunosc vârful A, axa AX și un punct M

Pentru construcția parabolei atunci când se cunoaște vârful A , axa AX și un punct oarecare M se procedează conform Fig.14.14 astfel: se trasează o dreaptă AY perpendiculară pe axa AX în vârful parabolei A , după care din punctul M coborâm perpendiculara MB pe AY . Distanțele AB și MB se împart în același număr de părți egale (de exemplu în patru) rezultând punctele de împărțire $1, 2, 3, 4$ pe AB și $1', 2', 3', 4'$ pe MB (segmentele de pe cele două perpendiculare nu sunt egale ca mărime $IA \neq BI'$). Prin punctele $1, 2, 3$ se duc paralele la AX după care se unește punctul A cu punctele $1', 2', 3'$ rezultând N, P, Q .

Unind punctele A, N, P, Q, M rezultă o latură a parabolei căutate. Aceeași construcție se execută simetric față de axa AX rezultând parabola căutată. Construcția este cu atât mai exactă cu cât axele se împart într-un număr mai mare de părți.

14.1.3.2.2 Construcția parabolei când se cunosc directoarea și focarul

Pentru construcția parabolei atunci când se cunosc focarul F și directoarea (d) conform Fig.14.15 se procedează astfel: din punctul F se coboară perpendiculara BF pe directoarea (d), după care această distanță se împarte în două părți egale rezultând vârful parabolei A .

Se prelungește dreapta BF care devine axa parabolei, aceasta împărțindu-se într-un număr oarecare de părți egale cu FB rezultând punctele de împărțire 1, 2, 3, 4, 5, 6. Prin punctul F se trasează o perpendiculară pe axa parabolei și se ia $FC = FC' = FB$ rezultând punctele C și C' ale parabolei.

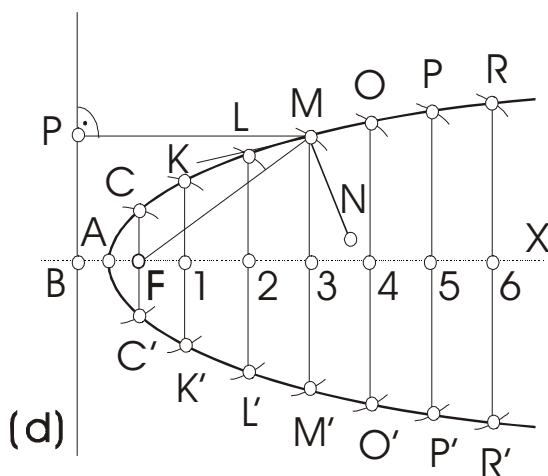


Fig. 14.15

Pentru determinarea altor puncte ale parabolei, prin punctele de împărțire se trasează perpendiculare pe axă, după care cu centrul în focarul F și cu raze egale cu distanța de la punctele de împărțire (1, 2, 3, 4, 5, 6) la punctul B se trasează arce de cerc care determină pe perpendiculare punctele de intersecție K, L, M, O, P, R și K', L', M', O', P', R' . Prin unirea punctelor $R', P', O', M', L', K', C', A, C, K, L, M, O, P, R$ se obține parabola căutată. Construcția este cu atât mai exactă cu cât axele se împart într-un număr mai mare de părți.

14.1.3.3 Hiperbola. Construcția hiperbolei când se cunosc distanțele dintre focare și dintre vârfuri.

Hiperbola este locul geometric al punctelor din plan pentru care diferența distanțelor a două puncte fixe (F și F') este constantă (Fig.14.16).

Punctele fixe F și F' se numesc *focare*, iar segmentele R și r care unesc un punct de pe hiperbolă cu focarele se numesc *raze vectoriale*. Distanța $2a$ trebuie să fie mai mică decât distanța dintre focare. Hiperbola are două axe de simetrie, axa XX' care trece prin focarele F și F' și axa YY' care este mediatoarea segmentului FF' . Punctul lor de intersecție notat cu O se numește *centrul de simetrie al hiperbolei*. Distanța de la fiecare focar la centrul de hiperbolă ($OF = OF' = e$) se numește *excentricitate*. Hiperbola intersectează axa principală XX' în vârfurile principale A și A' . Hiperbola are două asimptote ZZ' și WW' ; aceasta taie perpendicularele pe axa principală în vârfurile A și A' .

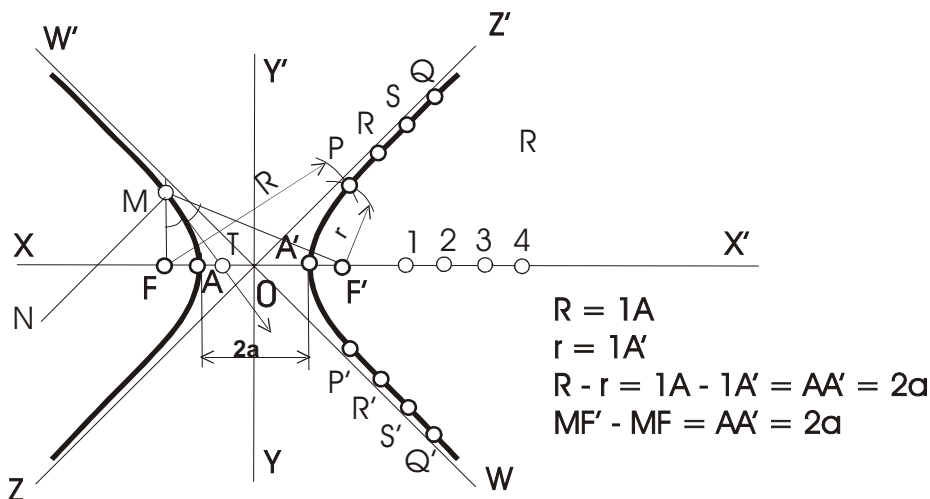


Fig. 14.16

Proprietăți:

- *Hiperbola are două axe de simetrie XX' și YY' ;*
- *Hiperbola are două vârfuri A și A' astfel încât $AA' = MF' - MF = 2a$;*
- *Hiperbola este o curbă deschisă cu două ramuri, care are vârfurile pe axa principală și ramurile se apropie la infinit de două asimptote ZZ' și WW' ;*
- *Tangenta într-un punct M al hiperbolei este bisectoarea interioară a unghiului FMF' .*

Tangenta într-un punct oarecare al hiperbolei este bisectoarea MT a unghiului FMF' format de dreptele ce unesc focarele F și F' cu punctul de tangență, iar normala MN este perpendiculara dusă pe tangenta MT în punctul M .

Pentru construcția hiperbolei când se cunosc distanța FF' dintre focare și distanța AA' dintre vârfuri se procedează conform Fig.14.16 astfel: se unește punctul F cu F' și se prelungește acest segment rezultând axa principală a hiperbolei XX' . Se duce mediatoarea segmentului FF' notată cu YY' rezultând ce-a de a doua axă de simetrie, iar punctul de intersecție se notează cu O și reprezintă centrul de simetrie al hiperbolei. Știind că vârfurile sunt simetrice, acestea se trasează de o parte și de alta a punctului O pe axa XX' astfel încât $OA = OA' = AA'/2$. Pe semidreptele $F'X'$ se ia un număr de segmente egale (de exemplu patru) obținându-se punctele de intersecție 1, 2, 3, 4, după care se trasează perechi de arce de cerc cu centrul în F' de rază $A'1$ ($A'2$, $A'3$, $A'4$) și în F de rază $A1$ ($A2$, $A3$, $A4$) care se intersectează de o parte și de alta a axei XX' . Unind punctele Q' , S' , R' , P' , A' , P , R , S , Q rezultă ramura dreaptă a hiperbolei. Ramura din stânga se construiește în mod similar cu observația că arcele de cerc

descrise cu centrul în F' au razele egale cu $A1$ ($A2, A3, A4$), iar cele descrise cu centrul în punctul F au razele egale cu $A'1$ ($A'2, A'3, A'4$). Unind punctele de intersecție ale arcelor de cerc rezultă ramura stângă a hiperbolei. Întrega construcție prezentată reprezintă hiperbola căutată.

14.1.4 Curbe ciclice

Curbele ciclice (de rostogolire) sunt curbe descrise fie de un punct fix ce aparține unei drepte și care se rostogolește fără alunecare pe circumferința unui cerc fie de un punct fix ce aparține unui cerc și care se rostogolește fără alunecare pe o dreaptă sau pe un arc de cerc.

Dreapta (cercul) pe care se găsește punctul (fix) care descrie curba se numește element generator (dreaptă generatoare sau cerc generator), iar dreapta (cercul) pe care se rostogolește elementul generator se numește element director (dreaptă directoare sau cerc director).

Construcția curbelor ciclice are ca aplicații în tehnică trasarea profilului danturii roților dințate ce formează angrenaje de transmitere a mișcării de rotație sau la trasarea profilelor camelor.

14.1.4.1 Construcția evolventei

Evolventa sau desfășurata cercului este curba descrisă de un punct al unei drepte (tangentă) generatoare care se rostogolește fără alunecare pe un cerc director (fix).

Pentru construcția evolventei conform Fig. 14.17 a. se procedează astfel: se împarte cercul director (O) într-un număr de părți egale, de exemplu în 12 părți rezultând punctele de împărțire $1, 2, \dots, 12$, prin care se trasează tangente la cerc. Din punctele de contact se trasează pe tangente segmente egale cu lungimile arcelor de cerc $0-1, 0-2, \dots, 0-12$, (Fig. 14.17.b) rezultând pe tangente punctele $1', 2', \dots, 12'$.

centru O_0 se împart în același număr de părți egale (de exemplu 8) rezultând punctele de împărțire $1, 2, \dots, 8$, respectiv $1', 2', \dots, 8'$.

Se ridică perpendiculare în punctele de împărțire $1', 2', \dots, 8'$ după care se trasează prin centrul cercului generator (O_0) o paralelă la AA' care intersectează aceste perpendiculare în punctele $O_1, O_2, \dots, O_8$. În continuare prin punctele de împărțire $1, 2, \dots, 8$ ale cercului generator (O_0) se trasează paralele la dreapta AA' ; astfel: arcul de cerc cu centrul în punctul O_1 și cu raza $O_1 1'$ intersectează paralela prin punctul 1 la AA' în punctul A_1 (punct al cicloidei) și tot așa luând ca centre succesive punctele $O_2, O_3, \dots, O_8$, se procedează în mod similar pentru obținerea celorlalte puncte ale cicloidei $A_2, A_3, \dots, A_8$. Unind aceste puncte printr-o linie curbă continuă trasată cu ajutorul florarului se obține cicloida căutată.

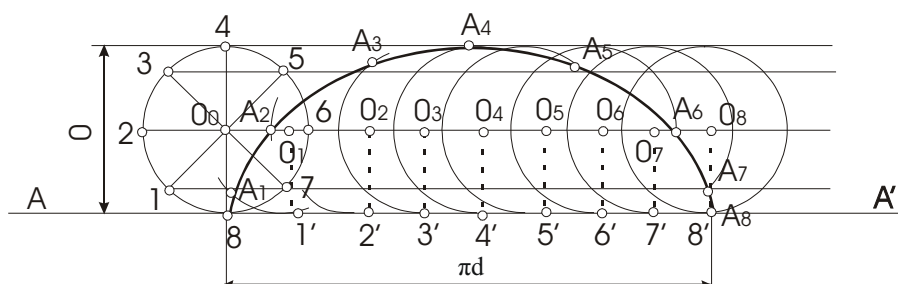


Fig. 14.18

14.1.4.3 Construcția epicloidei

Epicloida este curba descrisă de un punct fix de pe cercul generator, cerc care se rostogolește fără alunecare pe un cerc director.

Pentru construcția epicloidei atunci când se cunosc D_0 diametrul cercului generator și R raza cercului director conform Fig. 14.19 se procedează astfel: se trasează cercul de rază R cu centrul în O și tangent exterior cu acesta în punctul A_0 se trasează cercul de rază $R_0 = D_0/2$ cu

centrul în O_0 . Pe cercul de rază R se determină arcul ($A_0A_8 = \pi D_0$) de cerc egal cu lungimea cercului generator; pentru aceasta se determină unghiul la centru $\alpha^0 = 360^0 R_0 / R$. În continuare arcul A_0A_8 se împarte într-un număr de părți egale (de exemplu 8) rezultând punctele de împărțire $1', 2', \dots 8'$ după care acestea se unesc prin raze cu centrul O .

Se trasează un nou arc de cerc cu raza $R + R_0$ cu centrul în O iar prelungirile razelor trasate anterior intersectează acest cerc în punctele $O_1, O_2, \dots O_8$. De asemenea se împarte cercul de rază R_0 în opt părți egale rezultând punctele de intersecție $1, 2, \dots 8$, după care se construiesc cercurile concentrice de rază O_1, O_2, O_3, O_4 care trec prin punctele $4, 5, 6, 7$.

Cercul cu centrul în O_1 și cu raza O_1I' , intersectează cercul cu centrul în punctul O și cu raza OI în punctul A_1 (punct ce aparține elipsoidului) și tot așa rezultă punctele $A_2, \dots A_8$. Unind aceste puncte printr-o linie curbă continuă trasată cu ajutorul fluorarului rezultă epicycloida căutată.

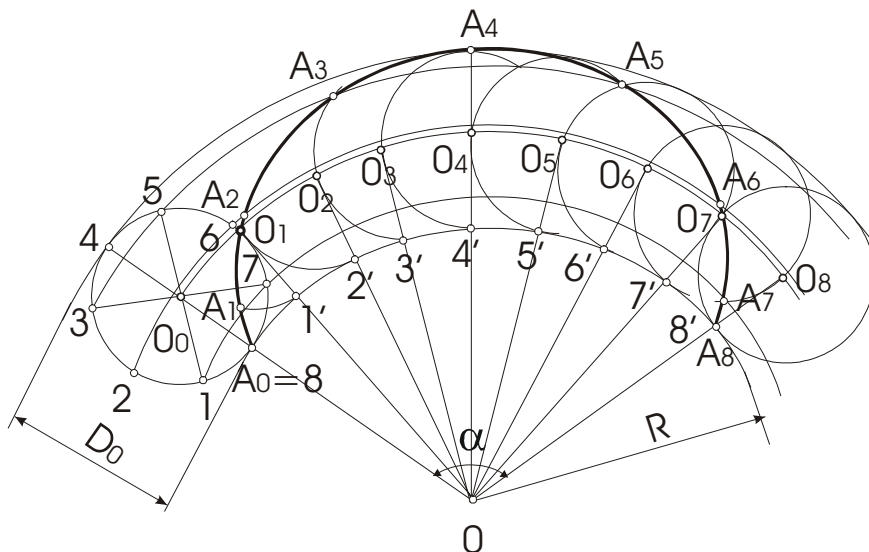


Fig. 14.19

14.1.4.4 Construcția hipocicloidei

Hipocicloida este curba descrisă de un punct fix de pe cercul generator care se rostogolește fără alunecare pe interiorul unui cerc director.

Construcția hipocicloidei atunci când se cunoaște D_0 diametrul cercului generator și R raza cercului director conform Fig. 14.20 este asemănătoare epicloidei cu deosebirea că după trasarea cercului de rază R cu centrul în O și a celui tangent interior cu acesta în punctul A_0 de rază $R_0 = D_0/2$ cu centrul în O_0 se trasează un cerc cu centrul în O de rază $R - R_0$ pentru determinarea punctelor $O_1, O_2, \dots, O_8$.

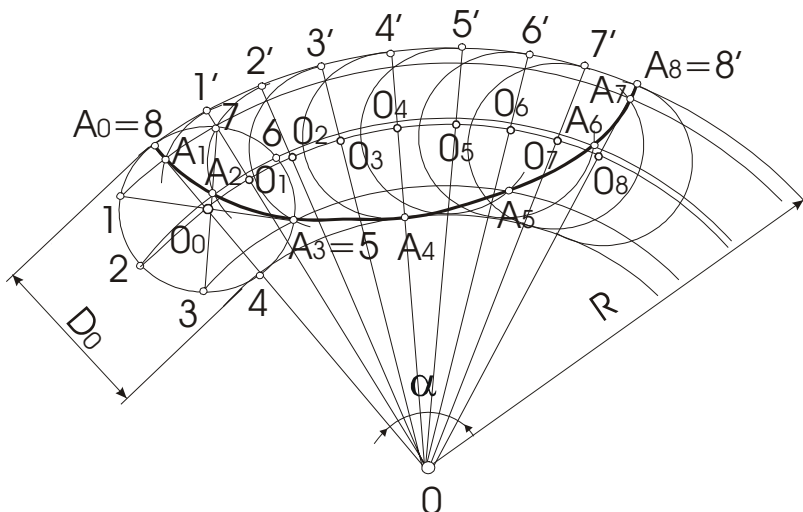


Fig. 14.20

14.2 Curbe în spațiu. Elicea

Elicea este o curbă în spațiu descrisă de un punct situat într-un plan meridian care are o mișcare uniformă de translație de-a lungul unei cilindru circular drept, sau a unui con, aflat în mișcare uniformă de rotație.

Pasul elicei notat cu p este distanța dintre două puncte consecutive ale elicei măsurată pe aceeași generatoare.

14.2.1 Construcția elicei cilindrice

Pentru construcția elicei cilindrice când se cunosc diametrul d al cilindrului și pasul $A'B$ al elicei conform Fig. 14.21 și 14.22 se procedează astfel: se construiește cercul de diametru d cât și proiecția verticală a cilindrului, după care se continuă din punctul A cu construcția triunghiului dreptunghic $AA'B$ care are ca laturi lungimea cercului și pasul elicei iar unghiul $\alpha = \angle AAB = Pas / \pi d$.

Se împarte atât cercul cât și lungimea cercului într-un număr de părți egale (de exemplu 8) rezultând punctele de împărțire $1, 2, \dots, 8$. Prin punctele de împărțire a cercului se trasează paralele la generatoarea cilindrului, iar prin punctele de împărțire ale lungimii cercului (AA') se ridică perpendiculare care intersectează dreapta AB cu înclinația α față de orizontală în punctele $1', 2', \dots, 8'$.

Prin punctele de împărțire $1', 2', \dots, 8'$ se duc paralele la AA' care intersectează paralelele la generatoare în punctele $1'', 2'', \dots, 8''$ puncte care aparțin elicei. Unind aceste puncte printr-o linie curbă continuă trasată cu ajutorul florarului se obține elicea cilindrică căutată.

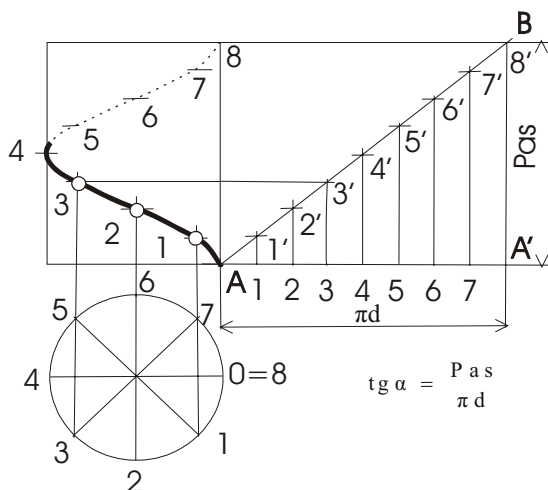


Fig. 14.21

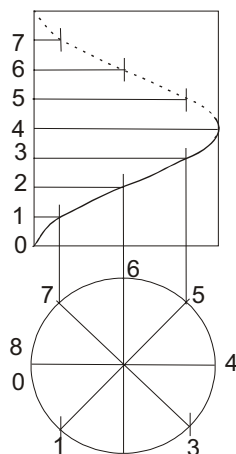


Fig. 14.22

14.2.2 Construcția elicei conice

Elicea conică este curba trasată prin intersecția unei drepte antrenate într-o mișcare elicoidală care alunecă fără frecare în lungul axei unui con de revoluție coaxială cu mărimi proporționale unghiului de rotație.

Pentru construcția elicei conice când se cunosc conul pe care este trasată elicea, pasul și sensul acesteia, conform Fig. 14.23 se procedează astfel: se reprezintă conul în cele două vederi, după care cercul de diametru AB se împarte într-un număr oarecare de părți egale (de exemplu 8) împreună cu raza OB . În planul de bază (care cuprinde cercul de bază al conului) proiecția elicei conice este o spirală arhimedică ale cărei puncte $I, II, \dots VIII$ rezultă din intersecția razelor $OI, O2, \dots O8$ duse prin diviziunile razei OB . În continuare se coboară din vârful S înălțimea $O'S$ a conului egală cu pasul elicei care se împarte în același număr de părți egale (de exemplu 8), rezultând punctele $I'', 2', \dots 8''$. Prin aceste puncte se duc perpendiculare la axa conului care prin intersectare (perpendicularele și paralelele de același număr) determină punctele de intersecție $I'', II'', \dots VIII''$. Unind aceste puncte printr-o curbă continuă trasată cu ajutorul fluorarului obținem elicea conică căutată.

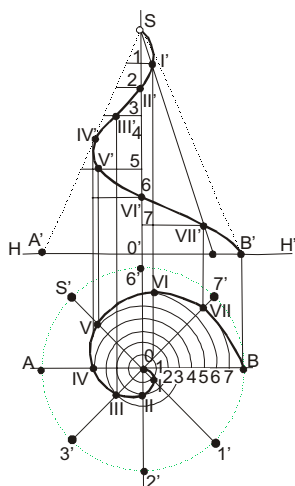


Fig. 14.23

Bibliografie

1. **Kh.A.Arustamov**, *Problems in Descriptive Geometrie*, Moscou, 1972;
2. **M.St.Botez**, , *Geometrie descriptivă*, București, Ed. Didactică și Pedagogică, 1965;
3. **V.Bunjulov**, *Desfășurările pieselor din tablă*, București, Ed. Tehnică, 1965;
4. **N.F.Cetveruhin**, *Geometrie proiectivă*, București, Ed. Tehnică, 1956;
5. **V.Dragomir, St. Teodorescu**, *Geometrie descriptivă*, București, Ed. Didactică și Pedagogică, 1963;
6. **J.Earle**, *Engineering design graphics*, Massachusetts, Addison – Wesley Publishing Co., 1970;
7. **A. Ene**, *Curs de geometrie descriptivă*, Craiova, Ed. Sitech, 1995, Vol.I și Vol.II;
8. **C.Florea**, ș.a., *Geometrie descriptivă. Suprafețe și corpuri cu aplicații in tehnică*, Cluj-Napoca, Ed. UTPres, 2002;
9. **S.Gordon**, *Geometrie descriptivă*, București, Ed. Tehnică, 1952;
10. **R.P.Hoelscher**, ș.a., *Graphics for engineers*, Illinois, Willey International Edition, 1968;
11. **T.Ivăceanu**, ș.a., *Geometrie descriptivă și desen tehnic*, București, Ed. Didactică și Pedagogică, 1982;
12. **A.Javary**, *Traité de Géométrie Descriptive*, Paris, Ed. Delagrave, 1921;

13. **Al.Matei, V.Gaba, T.Tacu**, *Geometrie descriptivă*, București, Ed. Tehnică, 1982;
14. **Al.Matei, ș.a.**, *Geometrie descriptivă. Culegere de probleme*, București, Ed. Didactică și Pedagogică, 1967;
15. **J.Moncea**, *Geometrie descriptivă și desen tehnic. Geometrie descriptivă*, București, Ed. Didactică și Pedagogică, 1982;
16. **J.Moncea, ș.a.**, *Desfășurarea suprafețelor*, București, Ed. Tehnică, 1966;
17. **A.I.Ostrovski**, *Geometrie descriptivă*, București, Ed. Tehnică, 1953;
18. **P.Precupețu, C.Dale, ș.a.** *Geometrie descriptivă și desen tehnic*, Partea I. Geometrie descriptivă, București, Litografia IPB, 1980;
19. **P.Precupețu, C.Dale**, *Probleme de geometrie descriptivă cu aplicații in tehnică*, București, Ed. Tehnică, 1987;
20. **R.Țițeica, ș.a.**, *Dicționar politehnic*, București, Ed. Tehnică, 1967;
21. **R. Răduleț, Șt. Bălan**, *Lexiconul Tehnic Român*, București, Ed. Tehnică, 1952, Vol. I V;
22. **A.Tănăsescu**, *Geometrie descriptivă*, București, Ed. Didactică și Pedagogică, 1965;
23. **A.Tănăsescu**, *Geometrie descriptivă, perspectivă, axonometrie*, București, Ed. Didactică și Pedagogică, 1975;
24. **I.Simion**, *Geometrie descriptivă*, București, Ed. Bren, 2002;
25. **H.W.Yankee**, *Engineering graphics*, Boston, PWS Publishers, 1985;
26. *** *Mică Enciclopedie Matematică*, traducere după *Klaine Enzyklopädie der Mathematik*, București, Ed. Tehnică, 1980;

CUPRINS

GEOMETRIE DESCRIPTIVA

Introducere	7
Cap. 1 Sisteme de proiecție	
1.1. Generalități	8
1.2. Sisteme de referință	10
1.3. Sisteme de reprezentare	12
Cap. 2 Punctul	
2.1. Reprezentarea punctului în epură	18
2.2. Punctul în diedre	18
2.3. Punctul în triedre	19
2.4. Puncte situate în planele bisectoare	21
2.5. Puncte situate pe linia de pământ	22
2.6. Puncte situate în planele de proiecție	22
2.7. Alfabetul punctului	23
Cap. 3 Dreapta	
3.1. Urmele drepte	26
3.2. Pozițiile remarcabile (particulare) ale unei drepte	26
3.2.1. Drepte paralele cu planele de proiecție	26
3.2.2. Drepte perpendiculare pe planele de proiecție	28
3.2.3. Drepte conținute în planele de proiecție	29
3.2.4. Drepte ce coincid cu una din axele de proiecție	30
3.3. Poziția relativă a două drepte	31
3.3.1. Drepte paralele	31
3.3.2. Drepte concurente	31
3.3.3. Drepte disjuncte (necoplanare, oarecare)	32
Cap. 4 Planul	
4.1. Reprezentarea și urmele planului	33
4.2. Pozițiile planului în raport cu planele de proiecție	34
4.2.1. Plan de poziție generală	34
4.2.2. Plane proiectante pe unul din planele de proiecție	35
4.2.3. Plane paralele cu un plan de proiecție și perpendiculare pe celelalte două	36
4.3. Drepte particulare ale planului	38

4.3.1. Orizontala planului	38
4.3.2. Frontala planului	38
4.3.3. Dreapta de profil a unui plan	39
4.3.4. Dreapta de cea mai mare pantă	39
4.3.5. Dreapta de cea mai mare înclinație	40
4.4. Pozițiile relative a două plane	40
4.4.1. Plane concurente	40
4.4.2. Plane paralele	41

Cap.5 Intersecția de plane și plăci

5.1. Vizibilitate	42
5.2. Intersecția figurilor plane	42
5.2.1. Intersecția unei drepte cu o placă triunghiulară	43
5.2.2. Intersecția a două plane definite de urmele lor	43
5.3. Intersecția a două plăci	44
5.3.1. Pătrunderea	44
5.3.2. Smulgerea	45
5.3.3. Intersecția a două plăci triunghiulare	46

Cap.6 Metodele geometriei descriptive

6.1. Metoda schimbării de plan	48
6.1.1. Generalități	48
6.1.2. Metoda schimbării de plan orizontal de proiecție	48
6.1.3. Metoda schimbării de plan vertical de proiecție	50
6.2. Metoda rotației	52
6.2.1. Generalități	52
6.2.2. Rotația de nivel	53
6.2.3. Rotația de front	55
6.2.4. Adevărata mărime a unei figuri plane prin metoda rotației	58
6.3. Metoda rabaterii	60
6.3.1. Generalități	60
6.3.2. Rabaterea unui plan pe planul orizontal de proiecție	61
6.3.3. Rabaterea unui plan pe planul vertical de proiecție	63
6.3.4. Adevărata mărime a unei figuri plane prin metoda rabaterii	63

Cap.7 Poliedre

7.1. Reprezentare	65
7.2. Secțiuni plane în poliedre	70
7.2.1. Intersecția unui plan cu o prismă	71
7.2.2. Intersecția unui plan cu o piramidă	73
7.3. Desfășuratele unor poliedre mai importante	75

Cap.8 Corpuri de rotație

8.1. Reprezentare	79
8.2. Secțiuni plane în solide de rotație	83
8.2.1. Secțiunea într-un cilindru circular drept	83
8.2.2. Secțiunea într-un con circular drept	84
8.3. Desfășuratele unor corpuri de rotație mai importante	85

Cap.9 Intersecții de corpuri; desfășuratele lor

9.1. Intersecția dintre doi cilindri cu diametre diferite și axe perpendiculare	90
9.2. Intersecția sub un unghi oarecare a doi cilindri de diametre diferite	90
9.3. Intersecția dintre un cilindru și o prismă	92
9.4. Intersecția dintre un cilindru și un con ce pătrunde oblic în cilindru	93
9.5. Intersecția dintre un cilindru și un poliedru	94
9.6. Intersecția unui cilindru cu o sferă	95
9.7. Intersecția dintre un con cu o sferă	97
9.8. Racordarea unei secțiuni circulare la o secțiune pătrată	98

Cap.10 Linii, suprafețe și corpuri elicoidale

10.1 Linii elicoidale	102
10.1.1. Elicea cilindrică	102
10.1.2. Elicea conică	103
10.1.3. Elicea sferică	104
10.2. Suprafețe elicoidale	105
10.2.1. Suprafața elicoidală strâmbă	106
10.2.2. Suprafața elicoidală strâmbă generată de o dreaptă care nu intersectează axa	108
10.2.3. Suprafața elicoidală dreaptă generată de un segment a cărui dreaptă face un unghi de 90^0 cu axa și este concurentă cu aceasta	109
10.2.4. Suprafața elicoidală generată de o dreaptă care nu este concurentă cu axa, dar face un unghi de 90^0 cu aceasta	110
10.3. Corpuri elicoidale (elipsoide)	111
10.4. Profilul filetelor	114

CONSTRUCTII GEOMETRIE

Cap.11 Noțiuni geometrice fundamentale

11.1.	Originea noțiunilor geometrice fundamentale	119
11.2.	Punctul și mulțimea de puncte	119
11.3.	Linii și tipuri de linii	120
11.3.1.	Linia dreaptă, linia frântă și linia curbă	120
11.3.2.	Drepte paralele	123
11.3.2.1.	Paralela la o dreaptă printr-un punct dat	123
11.3.2.2.	Paralela la o dreaptă cu o distanță dată	124
11.3.3.	Drepte perpendiculare	125
11.3.3.1.	Perpendiculara pe o dreaptă într-un punct dat	125
11.3.3.2.	Perpendiculara dintr-un punct exterior pe o dreaptă	126
11.3.3.3.	Perpendiculara la capătul dreptei	126
11.3.3.4.	Perpendiculara dintr-un punct dat situat deasupra și înafara dreptei	127
11.3.4.	Împărțirea unui segment de dreaptă	128
11.3.4.1.	Determinarea mijlocului unui segment	128
11.3.4.2.	Împărțirea unui segment în mai multe părți egale	128
11.3.4.3.	Reducerea unui segment de dreaptă într-un raport dat	129
11.3.4.4.	Împărțirea unui segment în părți proporționale cu două segmente date	130
11.4	Plan.Semiplan	130
11.5	Unghiuri	132
11.5.1.	Construcția unui unghi dat	132
11.5.2.	Construcția unui unghi oarecare egal cu un unghi dat	133
11.5.3.	Împărțirea unghiului în două părți egale	135
11.5.3.1.	Construcția bisectoarei unui unghi cu ajutorul compasului	135
11.5.3.2.	Împărțirea unghiului în două părți egale a unghiului al cărui vârf se situează în afara desenului	136
11.5.4.	Construcția unghiurilor cu valori consacrate	136
11.5.5.	Construcția unghiurilor ca sumă sau diferență de unghiuri	140
11.5.5.1.	Construcția unui unghi ca sumă a două unghiuri	141
11.5.5.2.	Construcția unui unghi ca diferență a două unghiuri	141
11.5.5.3.	Împărțirea unghiului într-un număr oarecare de părți egale	141
11.5.6.	Construcția unei drepte cu o înclinație dată față de o altă dreaptă	142
11.5.7.	Construcția unghiului de 180^0	143
11.5.8.	Construcția unghiului de 360^0	143

Cap.12 Cercul

12.1	Elementele cercului	144
12.2	Construcția grafică a cercului	145
12.2.1.	Construcția cercului când se cunosc poziția centrului și raza	145
12.2.2.	Construcția cercului când se cunosc două puncte situate pe cerc și raza	146
12.2.3.	Construcția cercurilor care trec prin două puncte	146
12.2.4.	Construcția cercului care trece prin trei puncte necoliniare	147
12.3.	Determinarea grafică a unora din elementele cercului	147
12.3.1.	Determinarea centrului unui punct dat	147
12.3.2.	Determinarea centrului unui cerc când se dă arcul AB	148
12.3.3.	Determinarea arcului de cerc cu centrul în afara planului de lucru cunoscând o coardă și săgeata	148
12.3.4.	Determinarea lungimii unui semicerc	149
12.3.5.	Determinarea săgeții când se cunoaște coarda și un punct de pe cerc	150
12.3.6.	Determinarea lungimii unui arc oarecare AB al unui cerc de rază R	150
12.4.	Împărțirea cercului în părți egale	151
12.4.1.	Împărțirea cercului în două în patru și în opt părți egale	151
12.4.2.	Împărțirea cercului în trei, în șase și în douăsprezece părți egale	152
12.4.3.	Împărțirea cercului în cinci și în zece părți egale	153
12.4.4.	Împărțirea cercului în șapte părți egale	154
12.4.5.	Împărțirea cercului în nouă și în douăzeci de părți egale	155
12.4.6.	Împărțirea cercului într-un număr oarecare de părți egale	155
12.5.	Tangenta. Cercuri tangente	156
12.5.1.	Tangenta la cerc	156
12.5.2.	Tangenta dintr-un punct exterior la cerc	157
12.5.3.	Tangente exterioare la două cercuri	158
12.5.4.	Tangente interioare la două cercuri	159
12.5.5.	Cercuri tangente interior	159
12.5.6.	Cercuri tangente exterior	160
12.6.	Cercuri concentrice	161
12.6.1.	Cercuri concentrice interior	161
12.6.2.	Cercuri concentrice exterior	161

Cap.13 Racordări

13.1.	Elementele racordării	162
13.2.	Racordarea a două drepte	163
13.2.1.	Racordarea a două drepte cu un arc de cerc de rază dată	163

13.2.1.1. Metoda paralelelor	163
13.2.1.2. Metoda bisectoarei	164
13.2.2. Racordarea a două drepte cu un arc de cerc fiind dat unul din punctele de racordare	164
13.2.3. Racordarea a două drepte paralele cu un arc de cerc fiind date punctele de racordare	165
13.2.4. Racordarea a două drepte perpendiculare cu un arc de cerc de rază dată	166
13.2.5. Racordarea a două drepte paralele prin două arce de cerc fiind date punctele de racordare	167
13.2.6. Racordarea a două perechi de drepte paralele egal depărtate între ele prin două arce de cerc fiind date punctele de racordare	167
13.3. Racordarea unei drepte cu un cerc dat	168
13.3.1. Racordarea unei drepte cu un cerc de rază dată	168
13.3.2. Racordarea unei drepte cu un cerc fiind dat punctul de racordare de pe dreaptă	169
13.3.3. Racordarea unei drepte cu un cerc fiind dat punctual de racordare de pe cerc	169
13.3.4. Racordarea unei drepte cu un cerc printr-un arc de cerc tangent exterior într-un punct dat de pe cerc	170
13.3.5. Racordarea unei drepte cu un cerc printr-un arc de cerc tangent interior într-un punct dat de pe cerc	171
13.4. Racordarea a două cercuri	172
13.4.1. Racordarea a două cercuri cu un arc de cerc de rază dată tangent exterior la cercurile date	172
13.4.2. Racordarea a două cercuri cu un arc de cerc de rază dată tangent interior la cercurile date	172
13.4.3. Racordarea a două cercuri cu un arc de cerc de rază dată tangent interior la unul și exterior la celălalt cerc	173

Cap.14 Curbe

14.1. Curbe plane	174
14.1.1. Curbe definite prin arce de cerc	174
14.1.1.1. Construcția ovoidului când se cunoaște axa mică	174
14.1.1.2. Construcția ovalului când se cunoaște axa mare	175
14.1.1.3. Construcția ovalului când se cunosc axele	176
14.1.1.4. Construcția ovalului prin metoda dreptunghiului	177
14.1.2. Spirale	177
14.1.2.1. Spirale definite prin arce de cerc	177
14.1.2.1.1. Construcția spiralei cu două centre	178
14.1.2.1.2. Construcția spiralei cu trei centre	178

14.1.2.1.3. Construcția spiralei cu patru centere	179
14.1.2.2. Spirale definite ca rotații	180
14.1.2.2.1. Construcția spiralei lui Arhimede când se cunoaște pasul spiralei	180
14.1.2.2.1. Construcția spiralei hiperbolice când se cunoaște distanța asimptotei față de originea coordonatelor	181
14.1.3. Curbe conice	182
14.1.3.1. Elipsa. Construcția elipsei când se cunosc axele	182
14.1.3.2. Parabola	184
14.1.3.2.1. Construcția parabolei când se cunosc vârful A, axa AX și un punct M	185
14.1.3.2.2. Construcția parabolei când se cunosc directoarea și focarul	186
14.1.3.3. Hiperbola. Construcția hiperbolei când se cunosc distanțele dintre focare și dintre vârfuri	187
14.1.4. Curbe ciclice	189
14.1.4.1. Construcția evolventei	189
14.1.4.2. Construcția cicloidei	190
14.1.4.3. Construcția epicloidei	191
14.1.4.4. Construcția hipocicloidei	193
14.2. Curbe în spațiu. Elicea	193
14.2.1. Construcția elicei cilindrice	194
14.2.2. Construcția elicei conice	195
Bibliografie	196
Cuprins	198