

Mecanica Fluidelor si Masini Hidraulice

Subiecte

1. Definitia fluidelor. Clasificare. Proprietati generale ale fluidelor.
2. Statica fluidelor. Ecuatiile de repaus ale fluidelor. Consecintele relatiei fundamentale a repausului fluidelor.
3. Aplicatii ale principiului lui Pascal. Repausul fluidelor in camp gravitational.
4. Actiunea fluidelor in repaus asupra suprafetelor plane.
5. Cinematica fluidelor. Metoda Lagrange. Metoda Euler. Ecuatiile liniilor de curent.
6. Cinematica fluidelor. Ecuatii de continuitate. Ecuatiile tubului de curent.
7. Dinamica fluidelor. Ecuatia de miscare a fluidelor ideale.
8. Experienta lui Reynolds. Regimuri de curgere. Ecuatii de miscare a fluidelor reale.

2.4.1. Compartimentele A și B ale rezervorului din figura 2.22 conțin aer. Să se determine presiunea indicată de manometrul metalic M dacă manometrul cu apă indică o denivelare $\Delta h_1 = 0,48 \text{ m}$, iar cel cu mercur indică $\Delta h_2 = 0,34 \text{ m}$. Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar densitatea mercurului este $\rho_{\text{Hg}} = 850 \text{ kg/m}^3$.

Rezolvare. Presiunea aerului din compartimentul B se determină aplicând relația (2.22) în punctul β , punctele α și β aflându-se în același plan izobar

$$p_B = p_\alpha = p_\beta = p_{at} + \rho g \Delta h_1.$$

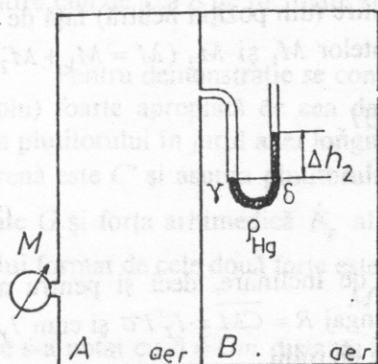


Fig. 2.22 - Rezervor cu aer

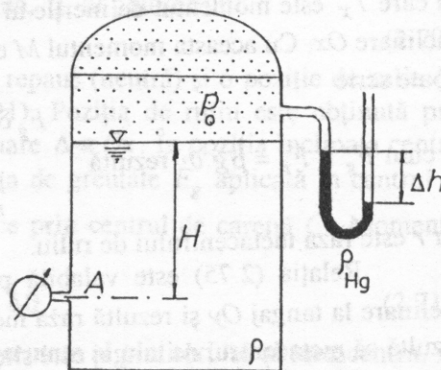


Fig. 2.23 - Rezervor cu ulei

Analog presiunea aerului din compartimentul A este

$$p_A = p_\gamma = p_\delta = p_B + \rho_{Hg} g \Delta h_2 = p_{at} + \rho g \Delta h_1 + \rho_{Hg} g \Delta h_2.$$

Presiunea indicată de manometrul metalic M este presiunea relativă din compartimentul A

$$p_A - p_{at} = \rho g \Delta h_1 + \rho_{Hg} g \Delta h_2 = 50 \cdot 10^3 \text{ Pa} = 50 \text{ kPa}.$$

2.4.2. Rezervorul din figura 2.23 conține ulei cu densitatea $\rho = 850 \text{ kg/m}^3$. Să se determine presiunea indicată de manometrul metalic plasat în punctul A dacă denivelarea manometrului cu mercur este $\Delta h = 0,25 \text{ m}$, iar adâncimea punctului A este $H = 3 \text{ m}$. Densitatea mercurului este $\rho_{Hg} = 13560 \text{ kg/m}^3$.

Rezolvare. Presiunea la suprafața liberă a uleiului este

$$p_0 = p_{at} - \rho_{Hg} g \Delta h,$$

iar presiunea în punctul A este

$$p_A = p_0 + \rho g H = p_{at} - \rho_{Hg} g \Delta h + \rho g H.$$

Deoarece manometrul metalic indică presiune relativă, acesta va arăta

$$p_{r,A} = p_A - p_{at} = \rho g H - \rho_{Hg} g \Delta h = -8240 \text{ Pa}.$$

deci este nevoie de un vacuummetru.

2.4.3. Să se determine forța de presiune dată de apă asupra unei stavile plane, verticale (fig. 2.24) de înălțime $H = 4 \text{ m}$ și de lățime $B = 10 \text{ m}$ și să se reprezinte diagrama de variație a presiunii pe perete.

Rezolvare. Deoarece presiunea atmosferică se exercită direct pe fața din dreapta a stavilei și, prin intermediul apei, pe fața din stânga, stavila este supusă unei suprapresiuni $p(y) = \rho g y$, a cărei repartiție este dată de triunghiul din figură. Cu aceasta forța de presiune este (2.51)

$$\vec{F}_p = -\rho g h_G A \vec{n} = -\rho g y_G A \vec{n},$$
 care are mărimea

$$F_p = \rho g H B H / 2 = 784800 \text{ N} \cong 785 \text{ kN}.$$

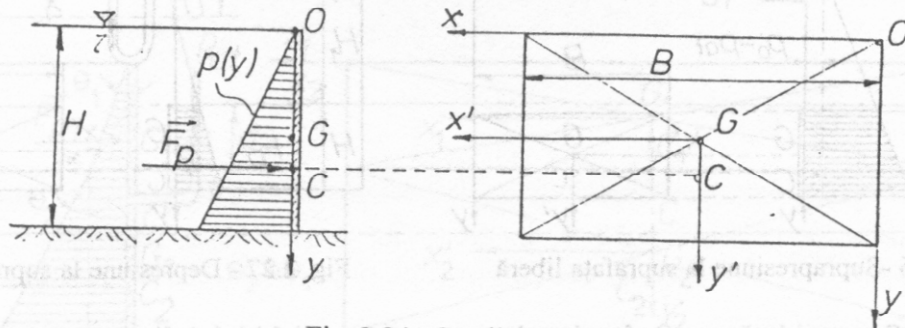


Fig. 2.24 - Stavilă plană

Coordonatele centrului de presiune C sunt (2.55) și (2.56)

$$x_C = x_G + \frac{I_{x',y'}}{A y_G} = \frac{B}{2} + 0 = 5 \text{ m}; \quad y_C = y_G + \frac{I_{x'}}{A y_G} = \frac{H}{2} + \frac{B H^3 / 12}{B H H / 2} = \frac{2}{3} H = 2,66 \text{ m}.$$

Se observă că centrul de presiune, în cazul panoului dreptunghiular se află la adâncimea $h_C = y_C = 2H/3$, adică în centrul de greutate al diagramei de presiune.

2.4.4. Peretele unui rezervor constă dintr-un panou plan, dreptunghiular, vertical, cu lățimea $B = 10 \text{ m}$ și înălțimea $H = 4 \text{ m}$. Muchia superioară a panoului se găsește la adâncimea $H = 5 \text{ m}$ sub nivelul suprafeței libere a apei din rezervor. Să se determine forța de presiune care solicită panoul, dacă presiunea la suprafața liberă a lichidului din rezervor este:

- $p_0 = p_{at}$ (fig. 2. 25);
- $p_0 = p_{at} + 3 \text{ mH}_2\text{O}$ (fig. 2.26);
- $p_0 = p_{at} - 2 \text{ mH}_2\text{O}$ (fig. 2.27).

Să se reprezinte diagrama de variație a presiunii pe panou în cele trei cazuri.

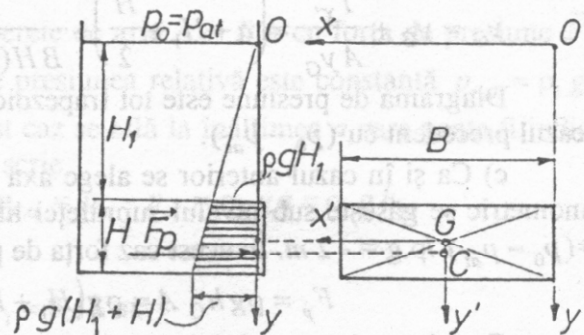


Fig. 2.25 - Rezervor cu perete plan

Rezolvare.a) Forța de presiune, dată de apă, asupra panoului este (2.51)

$$F_p = \rho g h_G A = \rho g (H_1 + H/2) B H \cong 2,75 \text{ MN}.$$

Coordonatele centrului de presiune sunt (2.55) și (2.56)

$$x_C = x_G + \frac{I_{x',y'}}{A y_G} = \frac{B}{2} + 0 = 5 \text{ m}; \quad y_C = y_G + \frac{I_{x'}}{A y_G} = \left(H_1 + \frac{H}{2} \right) + \frac{B H^3 / 12}{B H (H_1 + H/2)} \cong 7,19 \text{ m}.$$

Se observă că centrul de presiune se află foarte aproape de centrul de greutate și sub acesta. Excentricitatea centrului de presiune $e = I_{x'} / (A y_G)$ poate fi neglijată pentru $H_1 \geq 5H$ și în acest caz se consideră $y_C = y_G$, iar repartiția trapezoidală a presiunii este aproximată printr-o repartiție dreptunghiulară.

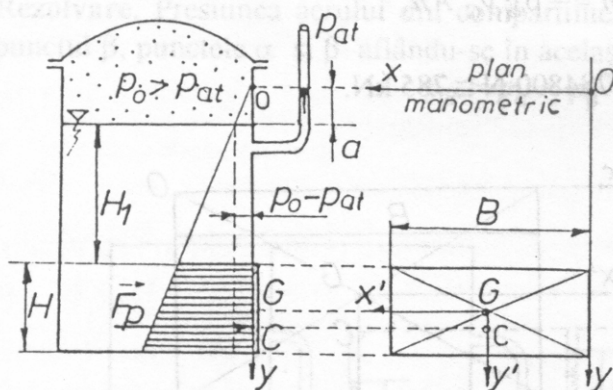


Fig. 2.26 -Suprapresiune la suprafața liberă

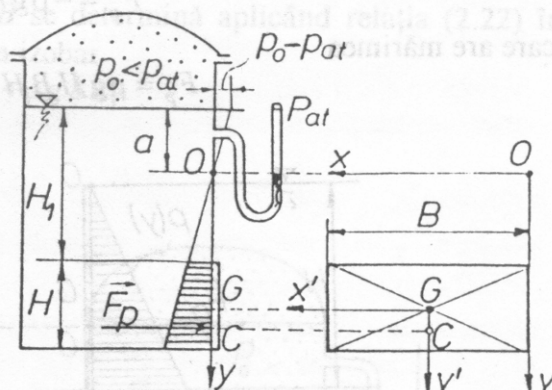


Fig. 2.27 - Depresiune la suprafața liberă

b) Se consideră axa Ox în planul manometric al lichidului din rezervor, adică situat la înălțimea $a = (p_0 - p_{at}) / (\rho \cdot g)$ deasupra nivelului suprafeței libere din rezervor. Poziția planului manometric este indicată de un tub piezometric deschis atașat rezervorului, în care apa se ridică la înălțimea a . Se poate scrie

$$a = (p_0 - p_{at}) / (\rho g) = 3 \text{ m.}$$

Forța de presiune (2.51) este

$$F_p = \rho g h_G A = \rho g (a + H_1 + H/2) B H \cong 3,92 \text{ MN,}$$

iar coordonatele centrului de presiune C sunt

$$x_C = x_G + I_{x',y'} / (A y_G) = B/2 + 0 = 5 \text{ m}$$

$$y_C = y_G + \frac{I_{x'}}{A y_G} = \left(a + H_1 + \frac{H}{2} \right) + \frac{B H^3 / 12}{B H (a + H_1 + H/2)} = (10 + 0,13) \text{ m} = 10,13 \text{ m.}$$

Diagrama de presiune este tot trapezoidală, iar bazele trapezului sunt mai mari decât în cazul precedent cu $(p_0 - p_{at})$.

c) Ca și în cazul anterior se alege axa Ox în planul manometric, în acest caz planul manometric se găsește sub nivelul suprafeței libere a apei din rezervor, adică a este negativ $a = (p_0 - p_{at}) / \rho \cdot g = -2 \text{ m}$. În acest caz forța de presiune (2.51) este

$$F_p = \rho g h_G A = \rho g (H_1 + H/2 - a) B H \cong 1,96 \text{ MN.}$$

Coordonatele centrului de presiune sunt $x_C = x_G = 5 \text{ m}$, respectiv

$$y_C = y_G + \frac{I_{x'}}{A y_G} = \left(H_1 + \frac{H}{2} - a \right) + \frac{B H^3 / 12}{B H (H_1 + H/2 - a)} = (5 + 0,26) \text{ m} = 5,26 \text{ m.}$$

Diagrama de presiune rămâne tot trapezoidală.

2.4.5. Să se determine forța de presiune care acționează asupra unui perete plan, dreptunghiular de lățime $B = 10 \text{ m}$ știind că aceasta este dată de două lichide nemiscibile de densități $\rho_1 = 800 \text{ kg/m}^3$ (ulei) și $\rho_2 = 1000 \text{ kg/m}^3$ (apă), înălțimile celor două straturi fiind $h_1 = 0,6 \text{ m}$, respectiv $h_2 = 1 \text{ m}$. Să se traseze diagrama de variație a presiunii pe perete și să se determine coordonatele centrului de presiune.

Rezolvare. Forța de presiune rezultantă $\vec{F}_p$ (fig. 2.28) este obținută prin însumarea forțelor de presiune $\vec{F}_{p,1}$ și $\vec{F}_{p,2}$ date de fiecare lichid în parte pe porțiunea de perete udată de acesta. Astfel uleiul va acționa cu forța

$$F_{p,1} = \rho_1 g h_{G_1} A_1 = \rho_1 g h_1 B h_1 / 2 \cong 14,13 \text{ kN.}$$

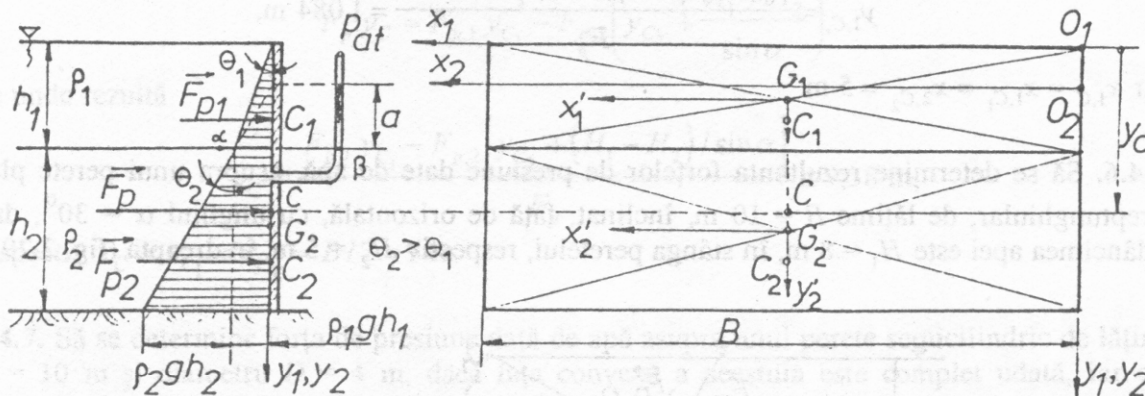


Fig. 2.28 - Perete plan ud de două lichide

Coordonatele centrului de presiune C_1 față de sistemul de referință $x_1 O_1 y_1$ sunt

$$x_{1,C_1} = x_{1,G_1} + I_{x'_1, y'_1} / (A_1 y_{1,G_1}) = B/2 + 0 = 5 \text{ m}$$

$$y_{1,C_1} = y_{1,G_1} + \frac{I_{x'_1}}{A_1 y_{1,G_1}} = \frac{h_1}{2} + \frac{B h_1^3 / 12}{B h_1 h_1 / 2} = \frac{2}{3} h_1 = 0,4 \text{ m.}$$

Apa acționează asupra porțiunii de perete de arie $A = B h$ cu forța de presiune $\vec{F}_{p,2}$. Pe suprafața de separație a celor două lichide presiunea relativă este constantă $p_{r,\alpha} = \rho_1 g h_1$. Planul manometric corespunzător apei în acest caz se află la înălțimea a care poate fi indicată de tubul piezometric (fig. 2.28). Se poate deci scrie

$$p_\alpha = p_\beta = p_{at} + \rho_2 g a, \quad p_{r,\alpha} = p_\alpha - p_{at} = \rho_2 g a = \rho_1 g h_1,$$

de unde rezultă

$$a = \frac{\rho_1}{\rho_2} h_1 = 0,48 \text{ m.}$$

Pentru apă se alege axa $O_2 x_2$ în planul manometric al apei și rezultă

$$F_{p,2} = \rho_2 g h_{G_2} A_2 = \rho g (a + h_2 / 2) B h_2 \cong 98140 \text{ N.}$$

iar coordonatele centrului de presiune sunt

$$x_{2,C_2} = x_{2,G_2} + \frac{I_{x'_2, y'_2}}{A_2 y_{2,G_2}} = \frac{B}{2} + 0 = 0,5 \text{ m,}$$

$$y_{2,C_2} = y_{2,G_2} + \frac{I_{x'_2}}{A_2 y_{2,G_2}} = \left(a + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{B h_2^3 / 12}{B h_2 (a + h_2 / 2)} = 1,065 \text{ m.}$$

Diagrama de presiune este triunghiulară pentru porțiunea udată de ulei și trapezoidală pentru cea udată de apă.

Forța de presiune rezultantă are valoarea

$$F_p = F_{p,1} + F_{p,2} = 112,27 \text{ kN.}$$

iar centrul de presiune C se determină aplicând teorema lui Varignon pentru cele două forțe

$$F_p y_{1,C} = F_{p,1} y_{1,C_1} + F_{p,2} (y_{2,C_2} + h_1 - a),$$

de unde rezultă

$$y_{1,C} = \frac{F_{p,1} y_{1,C_1} + F_{p,2} (y_{2,C_2} + h_1 - a)}{F_p} = 1,084 \text{ m,}$$

$$\text{iar } x_{1,C} = x_{1,C_1} = x_{2,C_2} = 5 \text{ m.}$$

2.4.6. Să se determine rezultanta forțelor de presiune date de apă, asupra unui perete plan, dreptunghiular, de lățime $B = 10 \text{ m}$, înclinat, față de orizontală, cu unghiul $\alpha = 30^\circ$, dacă adâncimea apei este $H_1 = 8 \text{ m}$, în stânga peretelui, respectiv $H_2 = 5 \text{ m}$, în dreapta (fig. 2.29).

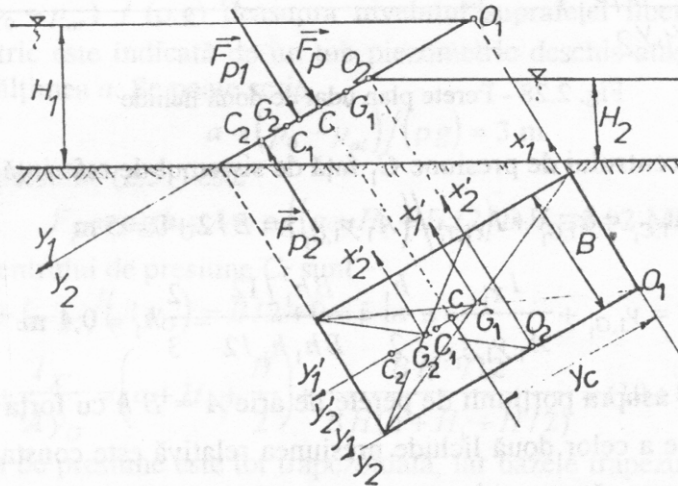


Fig. 2.29 - Perete înclinat udat de apă pe ambele fețe

Rezolvare. Pe fiecare față a peretelui apa acționează cu câte o forță de presiune $\vec{F}_{p,1}$, pe față din stânga, respectiv $\vec{F}_{p,2}$ pe fața din dreapta. Centrele de presiune ale celor două suprafețe sunt C_1 , respectiv C_2 , a căror adâncime este $2/3$ din adâncimea apei. Sistemele de referință în cele două cazuri sunt $x_1O_1y_1$, respectiv $x_2O_2y_2$ ca în figura 2.29.

Cu aceste cele două forțe de presiune și coordonatele centrelor de presiune au, respectiv, expresiile

$$F_{p,1} = \rho g h_{G_1} A_1 = \rho g \frac{H_1^2}{2 \sin \alpha} B \cong 6,28 \text{ MN}, \quad F_{p,2} = \rho g h_{G_2} A_2 = \rho g \frac{H_2^2}{2 \sin \alpha} B \cong 2,45 \text{ MN},$$

$$y_{C_1} = y_{G_1} + \frac{I_{1x'}}{A_1 y_{G_1}} = \frac{H_1}{2 \sin \alpha} + \frac{B H_1^3}{12 \sin^3 \alpha} \frac{2 \sin^2 \alpha}{H_1 B H_1} = \frac{2 H_1}{3 \sin \alpha} \cong 10,66 \text{ m,}$$

$$y_{C_2} = y_{G_2} + I_{2x'} / (A_2 y_{G_2}) = (2 H_2) / (3 \sin \alpha) \cong 6,66 \text{ m.}$$

Rezultanta celor două forțe este

$$F_p = F_{p,1} - F_{p,2} = \frac{\rho g B}{2 \sin \alpha} (H_1^2 - H_2^2) = 3,83 \text{ MN},$$

iar coordonatele centrului de presiune se determină aplicând teorema lui Varignon față de punctul O_1

$$F_p y_C = F_{p,1} y_{C_1} - F_{p,2} \left(y_{C_2} + \frac{H_1 - H_2}{\sin \alpha} \right),$$

de unde rezultă

$$y_C = \frac{F_{p,1} y_{C_1} - F_{p,2} \left[y_{C_2} + (H_1 - H_2) / \sin \alpha \right]}{F_p} \cong 9,38 \text{ m},$$

respectiv $x_C = x_{C_1} = x_{C_2} = B/2 = 5 \text{ m}$.

2.4.7. Să se determine forța de presiune dată de apă asupra unui perete semicilindric de lățime $B = 10 \text{ m}$ și diametru $D = 4 \text{ m}$, dacă fața convexă a acestuia este complet udată, iar cea concavă numai pe jumătate (fig. 2.30).

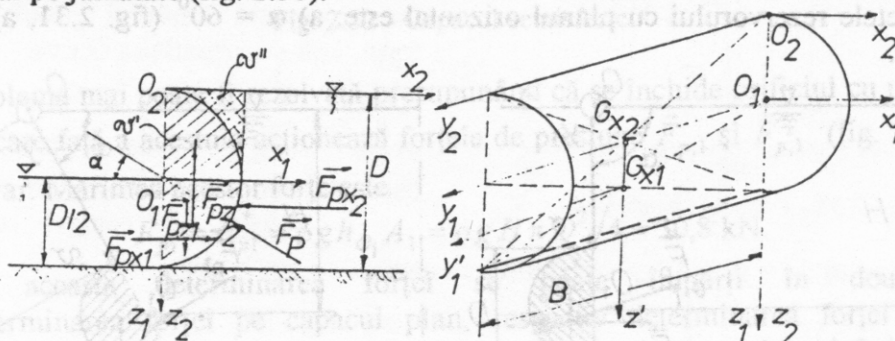


Fig. 2.30 - Perete semicilindric

Rezolvare. Pentru fiecare față a peretelui torsorul forțelor de presiune este înlocuit cu trei forțe $\vec{F}_{px,i}$, $\vec{F}_{py,i}$, $\vec{F}_{pz,i}$, $i = 1, 2$, care se pot compune în punctul considerat pentru reconstituirea torsorului.

Se consideră sistemele de coordonate $O_1 x_1 y_1 z_1$, pentru față concavă, respectiv $O_2 x_2 y_2 z_2$, pentru față convexă a peretelui. Pentru cele două cazuri rezultă mărimile forțelor (2.66) proiecția fiind o linie ca și în cazul precedent,

$$F_{px,1} = \rho g z_{G_{x,1}} A_{x,1} = \rho g \frac{D}{4} B \frac{D}{2} = 196,2 \text{ kN},$$

$$F_{px,2} = -\rho g z_{G_{x,2}} A_{x,2} = -\rho g \frac{D}{2} B D = -784,8 \text{ kN},$$

$$F_{py,1} = \rho g z_{G_{y,1}} A_{y,1} = 0, \quad (A_{y,1} = 0), \quad F_{py,2} = \rho g z_{G_{y,2}} A_{y,2} = 0, \quad (A_{y,2} = 0),$$

$$F_{pz,1} = \rho g \vartheta_1 = \rho g \frac{\pi D^2}{16} B = 308,2 \text{ kN}, \quad F_{pz,2} = -\rho g \vartheta_2 = -\rho g \frac{\pi D^2}{8} B = -616,4 \text{ kN},$$

unde ϑ_2 , reprezintă volumul dezlocuit de jumătatea de cilindru (fig. 2.30). Cu aceasta rezultă forțele pe întregul perete

$$F_{px} = F_{px,1} + F_{px,2} = -(3/8) \rho g B D^2 = -588,6 \text{ kN};$$

$$F_{py} = 0; \quad F_{pz} = F_{pz,1} + F_{pz,2} = -(\pi/16) \rho g B D^2 = -308,2 \text{ kN}.$$

Problema fiind plană (este identică în toate planele perpendiculare pe axa cilindrului, ceea ce a condus și la $F_{p,y} = 0$) forțele $F_{p,x}$ și $F_{p,z}$ sunt concurente și rezultanta lor

$$\vec{F}_p = F_{p,x} \vec{i} + F_{p,z} \vec{k}$$

trece prin axa cilindrului și are mărimea

$$F_p = \sqrt{F_{p,x}^2 + F_{p,z}^2} = 664,4 \text{ kN}.$$

Forța $\vec{F}_p$ face cu orizontala unghiul α , astfel încât

$$\operatorname{tg} \alpha = (F_{p,z} / F_{p,x}) = \pi/6; \quad \alpha = \operatorname{arctg}(\pi/6) = 27,6^\circ.$$

2.4.8. Să se determine forța de presiune dată de apă asupra capacului semisferic de diametru $D = 1 \text{ m}$, care închide orificiul circular al peretelui plan al unui rezervor, dacă centrul orificiului se găsește la adâncimea $H = 4 \text{ m}$ sub suprafața liberă a lichidului. Ungiul diedru α făcut de peretele rezervorului cu planul orizontal este: a) $\alpha = 60^\circ$ (fig. 2.31, a); b) $\alpha = 90^\circ$ (fig. 2.31, b).

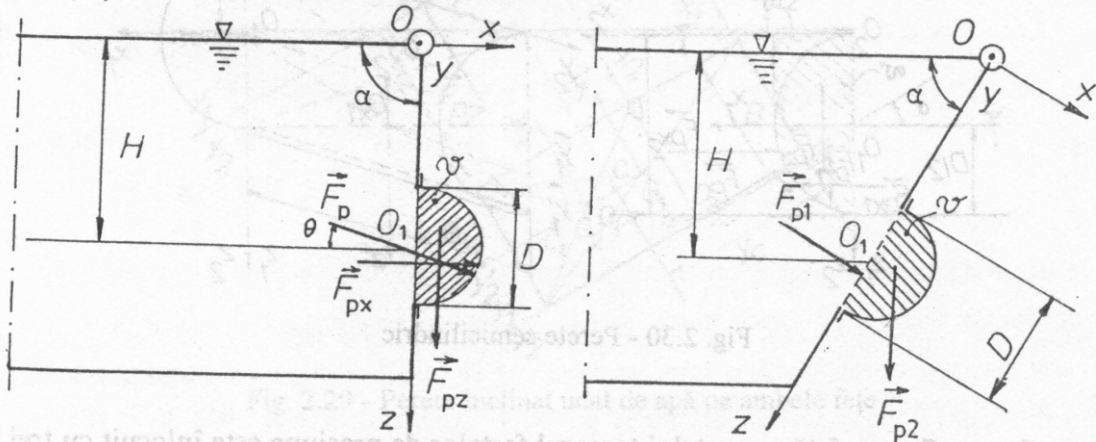


Fig. 2.31 - Capac semisferic care închide orificiul

Rezolvare. a) Se alege un sistem de referință $Oxyz$ și se scriu cele trei forțe de presiune dirijate după cele trei axe

$$F_{p,x} = \rho g z_{G_x} A_x = \rho g H \frac{\pi D^2}{4} = 30,8 \text{ kN}, \quad F_{p,y} = \rho g z_{G_y} A_y = 0 \quad (A_y = 0),$$

$$F_{p,z} = \rho g \vartheta = \rho g \frac{\pi D^2}{12} = 2,57 \text{ kN}.$$

Aria nulă $A_y = 0$ din planul xOz se explică prin proiecția dublă a suprafeței S pe aceeași urmă (cf. observația 3 de la paragraful 2.2.4). Datorită simetriei forțele $F_{p,x}$ și $F_{p,z}$ sunt coplanare, aparținând planului xOz care trece prin centrul sferei O . Deci există o rezultantă unică a forțelor de presiune a cărei mărime este

$$F_p = \sqrt{F_{p,x}^2 + F_{p,z}^2} = \rho g \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{H^2 + D^2/9} = 30,9 \text{ kN}.$$

Suportul forței $\vec{F}_p$ trece prin punctul O , aparține planului de simetrie și face cu orizontala unghiul θ , definit de relația

$$\theta = \arctg(F_{p,z}/F_{p,x}) = \arctg(D/3H) = \arctg(1/12) = 4,76^\circ.$$

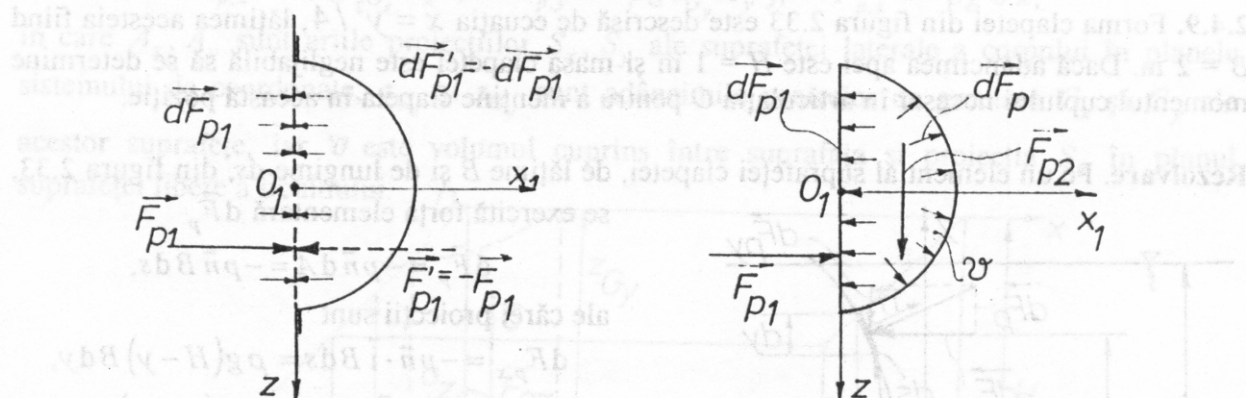


Fig. 2.32 - Capacul semisferic

Problema mai poate fi rezolvată presupunând că se închide orificiul cu un capac plan fictiv. Pe fiecare față a acestuia acționează forțele de presiune $\vec{F}_{p,1}$ și $\vec{F}_{p,1}^*$ (fig. 2.32) egale și de sens contrar. Mărimea acestor forțe este

$$F_{p1} = F_{p1}^* = \rho g h_{O1} A_1 = \rho g H \pi D^2 / 4 = 30,8 \text{ kN}.$$

Cu aceasta determinarea forței se poate împărți în două probleme distincte: determinarea forței pe capacul plan, respectiv determinarea forței de presiune reprezentând acțiunea fluidului pe suprafața închisă formată de capacul semisferic și de planul care închide orificiul. Analog principiului lui Arhimede (cf. paragraful 2.2.3) forța care solicită această suprafață închisă este greutatea lichidului din interiorul suprafeței și are mărimea

$$F_{p2} = \rho g \mathcal{V} = \rho g \pi D^3 / 12 = 2,57 \text{ kN}.$$

Se observă că s-au regăsit rezultatele anterioare de la rezolvarea clasică deoarece $F_{p,x} = F_{p,1}$ și $F_{p,z} = F_{p,2}$, deci și rezultanta lor este aceeași. Această soluție este mai comodă în cazul în care planul care închide suprafața curbă este înclinat și obținerea proiecțiilor este dificilă.

b) Pentru rezolvarea acestui caz se va folosi metoda a doua. Se obține astfel forța $\vec{F}_{p,1}$ perpendiculară pe perete și de mărime

$$F_{p,1} = \rho g h_{O1} A_1 = \rho g H (\pi D^2 / 4) = 30,8 \text{ kN},$$

respectiv greutatea apei din semisferă, verticală și îndreptată în jos, care are mărimea

$$F_{p,2} = \rho g \mathcal{V} = \rho g (\pi D^3 / 12) = 2,57 \text{ kN}.$$

Cele două forțe pot fi adunate vectorial sau se pot face proiecțiile acestora, astfel

$$F_{p,x} = F_{p,1} + F_{p,2} \cos \theta \approx 32 \text{ kN}, \quad F_{p,z} = F_{p,2} \sin \theta \approx 2,2 \text{ kN}.$$

Deci forța de presiune este $\vec{F}_p = F_{p,x} \vec{i} + F_{p,z} \vec{k}$ și are mărimea

$$F_p = \sqrt{F_{p,x}^2 + F_{p,z}^2} = 32,1 \text{ kN}.$$

Direcția acestei forțe este dată de unghiul θ făcut cu orizontala

$$\theta = \arctg(F_{p,z}/F_{p,x}) = \arctg(2,22/32) = 4^\circ.$$

De asemenea această forță se găsește în planul de simetrie al capacului sferic și trece prin centrul sferei.

2.4.9. Forma clapetei din figura 2.33 este descrisă de ecuația $x = y^2/4$, lățimea acesteia fiind $B = 2$ m. Dacă adâncimea apei este $H = 1$ m și masa clapetei este neglijabilă să se determine momentul cuplului necesar în articulația O pentru a menține clapeta în această poziție.

Rezolvare. Pe un element al suprafeței clapetei, de lățime B și de lungime ds , din figura 2.33,

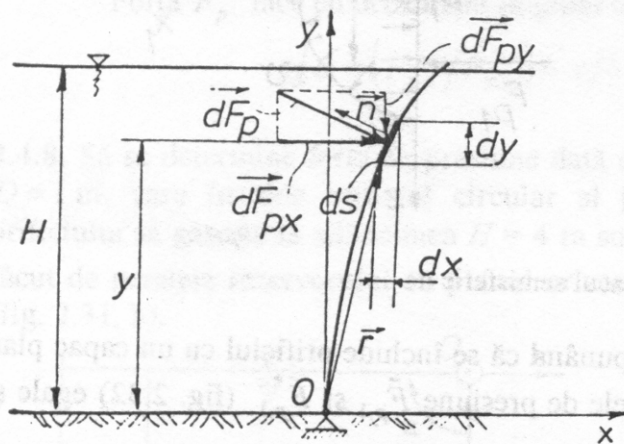


Fig. 2.33 - Clapetă parabolică

se exercită forța elementară $d\vec{F}_p$

$$d\vec{F}_p = -p\vec{n} dA = -p\vec{n} B ds,$$

ale cărei proiecții sunt

$$dF_{p,x} = -p\vec{n} \cdot \vec{i} B ds = \rho g(H-y) B dy,$$

$$dF_{p,y} = -p\vec{n} \cdot \vec{j} B ds = -\rho g(H-y) B dx,$$

iar momentul cuplului produs de aceasta forță, față de articulația O este

$$d\vec{M}_O = \vec{r} \times d\vec{F}_p,$$

unde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ este vectorul de poziție al centrului suprafeței elementare considerate.

Știind că ecuația clapetei este

$x = y^2/4$, rezultă $dx = y dy/2$ și momentul elementar se poate scrie

$$d\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ y^2/4 & y & 0 \\ \rho g B(H-y)dy & -\rho g B(H-y)ydy/2 & 0 \end{vmatrix},$$

adică

$$d\vec{M}_O = -\rho g B(H-y)(y^3/8 + y)dy\vec{k}.$$

Momentul resultant este

$$\vec{M}_O = \int_0^H d\vec{M}_O = -\rho g B\vec{k} \int_0^H (H-y)(y^3/8 + y)dy = -\rho g B(H^5/160 + H^3/6)\vec{k},$$

a cărui mărime este

$$M_O = \rho g B(H^5/160 + H^3/6) \approx 3,4 \cdot 10^3 \text{ Nm} = 3,4 \text{ kNm}.$$

Acest moment are tendința de a deschide clapeta. Pentru menținerea clapetei în poziția indicată este necesar să se aplice în articulație un cuplu de moment $\vec{M}_{R,O} = -\vec{M}_O$.

2.4.10. În colțul unui rezervor paralelipipedic care conține apă este așezat un corp având forma unei optimi de elipsoid de revoluție, cu semiaxele orizontale $a_x = a_y = 1$ m și semiaxa verticală $a_z = 2$ m (fig. 2.34). Adâncimea apei din rezervor este $H = 4$ m. Să se determine forțele de presiune, neconcurente $\vec{F}_{p,x}$, $\vec{F}_{p,y}$ și $\vec{F}_{p,z}$, care reprezintă acțiunea apei asupra suprafeței laterale a corpului.

Rezolvare. Pentru sistemul de axe din figura 2.34 relațiile (2.66) care exprimă cele trei forțe devin

$$\vec{F}_{p,x} = -\rho g z_{G_x} A_x \vec{i}, \quad \vec{F}_{p,y} = -\rho g z_{G_y} A_y \vec{j}, \quad \vec{F}_{p,z} = -\rho g \mathcal{V} \vec{k},$$

în care A_x, A_y sunt ariile proiecțiilor S_x, S_y ale suprafeței laterale a corpului în planele sistemului de coordonate, z_{G_x} și z_{G_y} sunt adâncimile centrelor de greutate G_x și G_y ale acestor suprafețe, iar $\mathcal{V}$ este volumul cuprins între suprafața și proiecția S_z în planul suprafeței libere a lichidului.

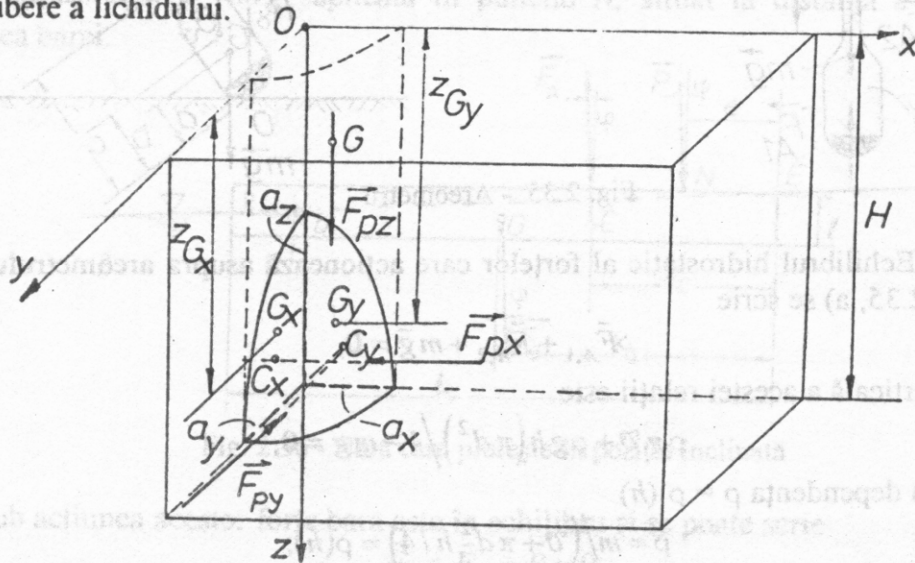


Fig. 2.34 - Rezervor cu elipsoid

Știind că adâncimile centrelor de greutate ale celor două proiecții S_x, S_y sunt $z_{G_x} = z_{G_y} = H - 4a_z / (3\pi)$, ariile acestor proiecții sunt $A_x = A_y = \pi a_x a_z / 4$, iar volumul $\mathcal{V}$ cuprins între suprafața corpului și proiecția ei în planul suprafeței libere a lichidului are valoarea $\mathcal{V} = \pi a_x^2 (H/4 - a_z/6)$, rezultă forțele de presiune

$$\vec{F}_{p,x} = -\rho g \left(H - \frac{4a_z}{3\pi} \right) \frac{\pi a_x a_z}{4} \vec{i}, \quad \vec{F}_{p,y} = -\rho g \left(H - \frac{4a_z}{3\pi} \right) \frac{\pi a_y a_z}{4} \vec{j},$$

$$\vec{F}_{p,z} = \rho g \pi a_x^2 \left(\frac{H}{4} - \frac{a_z}{6} \right) \vec{k},$$

ale căror mărimi sunt $F_{p,x} = F_{p,y} = -48,6 \text{ kN}$ și $F_{p,z} = 20,5 \text{ kN}$.

2.4.11. Pentru determinare densității unui lichid se folosește un areometru cu volumul $\mathcal{V} = 95 \text{ ml}$ și masa $m = 0,1 \text{ kg}$, având la partea superioară o tijă gradată cu diametrul $d = 10 \text{ mm}$ (fig. 2.35, a). Se cere să se determine:

a) relația dintre indicația h a areometrului și densitatea ρ a lichidului, stabilind domeniul de măsură în cazul în care gradația maximă este $h = 100 \text{ mm}$;

b) densitatea lichidului dacă aparatul atinge fundul vasului, iar indicația sa este $h' = 15 \text{ mm}$ (fig. 2.35, b).

Se cunoaște poziția centrului de greutate al areometrului, la $a = 20 \text{ mm}$, respectiv poziția centrului de greutate al volumului dezechilibrat, la $b = 20,5 \text{ mm}$, iar scara gradată începe la $c = 42 \text{ mm}$, distanțele fiind măsurate de la partea inferioară a areometrului.

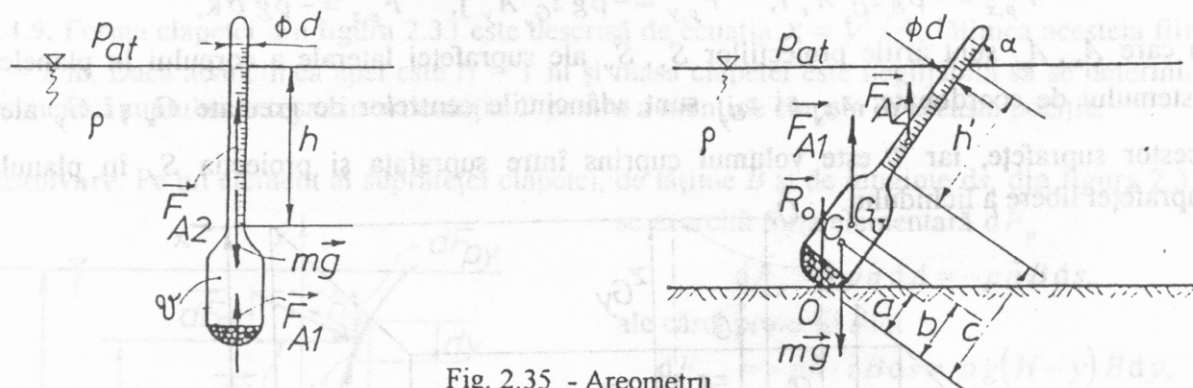


Fig. 2.35 - Areometru

Rezolvare. a) Echilibrul hidrostatic al forțelor care acționează asupra areometrului în poziție verticală (fig. 2.35, a) se scrie

$$\vec{F}_{A,1} + \vec{F}_{A,2} + m\vec{g} = 0,$$

iar proiecția verticală a acestei relații este

$$\rho g \vartheta + \rho g h (\pi d^2 / 4) - m g = 0,$$

de unde rezulta dependența $\rho = \rho(h)$

$$\rho = m / (\vartheta + \pi d^2 h / 4) = \rho(h).$$

Pentru $h = 0$ se obține densitatea maximă a lichidului

$$\rho_{\max} = m / \vartheta = 1052,6 \text{ kg/m}^3,$$

iar pentru $h = h_{\max}$ rezultă densitatea minimă

$$\rho_{\min} = m / (\vartheta + \pi d^2 h_{\max} / 4) = 972,2 \text{ kg/m}^3.$$

b) În cazul în care areometrul atinge fundul vasului, acesta se înclină cu unghiul α față de orizontală, indicația acestuia fiind h' (fig. 2.35, b). Valoarea densității se obține scriind ecuația de momente față de punctul de contact O

$$m g a \cos \alpha = F_{A1} b \cos \alpha + F_{A2} (c + h' / 2) \cos \alpha,$$

adică

$$m g a = \rho g \vartheta b + \rho g (\pi d^2 / 4) h' (c + h' / 2).$$

Deci densitatea fluidului este

$$\rho = \frac{m a}{\vartheta b + \pi d^2 h' (c + h' / 2) / 4} = 997,1 \text{ kg/m}^3.$$

2.4.12. O bară din lemn cu secțiunea pătrată, de latură $l = 300 \text{ mm}$ și de lungime L , având densitatea $\rho_1 = 500 \text{ kg/m}^3$, plutește într-un rezervor cu apă (fig. 2.36). Dacă se aplică o greutate suplimentară $\vec{P}$, de masă $m = 70 \text{ kg}$, în punctul N , la distanța $e = 0,6 \text{ m}$ de colțul E al barei, bara plutește înclinată astfel încât punctul E se găsește la suprafața liberă a apei. Să se determine lungimea L a barei.

Rezolvare. Asupra acestei bare acționează următoarele forțe:

-forța de greutate a acesteia $\vec{F}_g$, aplicată în centrul de greutate G al barei, situat la distanța $x_G = L/2$ de la extremitatea barei;

-forța arhimedică $\vec{F}_A$, aplicată în centrul de carenă C , care în poziția înclinată este situat la distanța

$$x_C = \frac{L}{3} \frac{2b+l}{b+l}$$

de la extremitatea barei;

-suprasarcina $\vec{P} = m\vec{g}$, aplicată în punctul N , situat la distanța $e = 0,6$ m de la extremitatea barei.

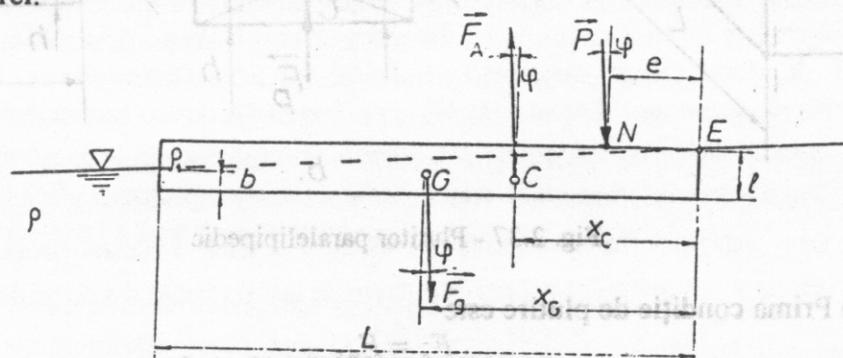


Fig. 2.36 - Bară care plutește în poziție înclinată

Sub acțiunea acestor forțe bara este în echilibru și se poate scrie

$$\vec{F}_g + \vec{F}_A + \vec{P} = 0$$

și prin proiecție pe verticală rezultă

$$\rho_1 g \mathcal{V}_{bară} - \rho g \mathcal{V} + m g = 0,$$

adică

$$\rho_1 L l^2 / 2 - \rho (b+l) L l / 2 + m = 0.$$

Pentru determinarea poziției de plutire se scrie ecuația de momente față de punctul E

$$F_g x_G \cos \varphi - F_A x_C \cos \varphi + P e \cos \varphi = 0,$$

adică

$$(\rho/12) l^2 L^2 - (\rho/3) b l L^2 + m e = 0,$$

de unde se poate obține b , baza mică a trapezului, reprezentând porțiunea imersată a secțiunii barei

$$b = 2m / (\rho l L)$$

și înlocuind în ecuația de momente rezultă ecuația

$$\rho l^2 L^2 - 8m L + 12m e = 0,$$

care, pentru datele problemei, admite soluțiile $L_1 = 5,13$ m, respectiv $L_2 = 1,10$ m.

2.4.13. Se consideră un plutitor paralelipipedic cu lungimea $L = 6$ m, lățimea $B = 3$ m și înălțimea H (fig. 2.37). Densitatea medie a plutitorului este $\rho_1 = 500 \text{ kg/m}^3$. Să se determine:

a) poziția centrului de carenă C , a razei metacentrice de ruluu r și a razei metacentrice de tangaj R dacă pescajul plutitorului este $h = 0,6$ m;

b) înălțimea maximă deasupra planului de plutire, pe care îl poate ocupa centrul de greutate G al plutitorului pentru ca plutirea să fie stabilă.

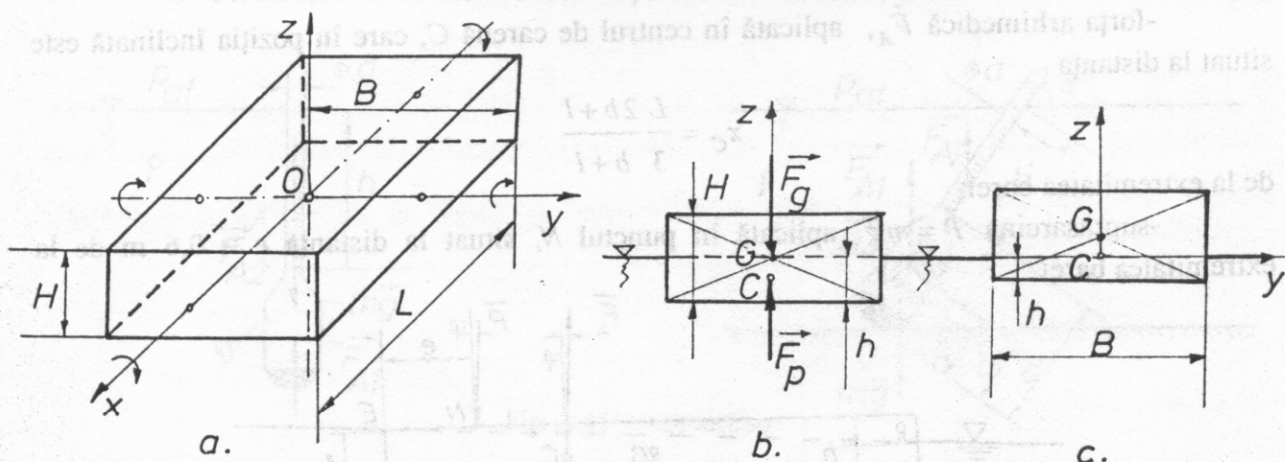


Fig. 2.37 - Plutitor paralelipedic

Rezolvare. a) Prima condiție de plutire este

$$F_g = F_p,$$

adică

$$\rho_1 g B L H = \rho g B L h,$$

de unde rezultă înălțimea H a plutitorului

$$H = h \rho / \rho_1 = 1,2 \text{ m}.$$

Centrul de carenă C al plutitorului se găsește la adâncimea $h / 2$ față de planul de plutire, iar raza metacentrică de rulu (2.70) este

$$r = \overline{Cm} = \frac{I_x}{\vartheta} = \frac{L B^3 / 12}{B L H / 2} = \frac{B^2}{6 H} = 1,25 \text{ m}.$$

În mod similar raza metacentrică de tangaj este

$$R = \overline{CM} = \frac{I_y}{\vartheta} = \frac{B L^3 / 12}{B L H / 2} = \frac{L^2}{6 H} = 5 \text{ m}.$$

b) Plutirea este stabilă, chiar dacă centrul de greutate G se găsește deasupra centrului de carenă C . În acest caz este suficient ca metacentrul să se găsească deasupra centrului de greutate. Deoarece metacentrul de rulu m este cel mai coborât, condiția de stabilitate (2.68) devine

$$\frac{I_y}{\vartheta} - \overline{CG} \geq 0,$$

de unde rezultă $\overline{CG} \leq I_x / \vartheta$, adică $\overline{CG} \leq 1,25 \text{ m}$. Deci centrul de greutate al plutitorului se poate găsi cel mult la 1,25 m mai sus decât centrul.