

ALGEBRA, GEOMETRIE ANALITICA ȘI DIFERENȚIALA

SINTEZE TEORETICE ȘI APLICAȚII

Acest material reprezintă un suport de curs destinat studenților din anul I ce cuprinde sinteze teoretice și probleme rezolvate desprinse din volumul „Elemente de algebră liniară, geometrie analitică și diferențială”, autori: Ion Vladimirescu, Luminița Grecu.

Grecu Luminița

I. SPAȚII VECTORIALE

I.1. Spațiul vectorial - definiție, proprietăți

Fie V o mulțime nevidă și K un corp comutativ.

Definiția I.1. Spunem că V are structură algebrică de spațiu vectorial (sau spațiu liniar) peste corpul K dacă este înzestrată cu două legi de compoziție:

- o lege de compoziție internă notată aditiv:

$$+ : V \times V \rightarrow V, \quad (\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow \bar{x} + \bar{y};$$

- o lege de compoziție externă notată multiplicativ:

$$\cdot : K \times V \rightarrow V, \quad (\alpha, \bar{x}) \rightarrow \alpha \cdot \bar{x}$$

care îndeplinesc următoarele proprietăți:

1) $(V, +)$ este grup.

2) i) $\alpha(\bar{x} + \bar{y}) = \alpha\bar{x} + \alpha\bar{y}, \quad (\forall)\bar{x}, \bar{y} \in V, (\forall)\alpha \in K;$

ii) $(\alpha + \beta) \cdot \bar{x} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{x}, \quad (\forall)\bar{x} \in V, (\forall)\alpha, \beta \in K;$

iii) $\alpha(\beta\bar{x}) = (\alpha\beta) \cdot \bar{x}, \quad (\forall)\bar{x} \in V, (\forall)\alpha, \beta \in K;$

iv) $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}, \quad (\forall)\bar{x} \in V.$

Vom nota această structură (V, K) .

Elementele lui V se numesc vectori, iar elementele lui K scalari. Operația „+” se va numi adunarea vectorilor iar operația „ $\cdot$ ” înmulțirea vectorilor cu scalari.

Notăm cu 1 elementul unitate al corpului K , iar cu $\bar{0}$ vectorul nul din V , adică elementul neutru al grupului $(V, +)$. Vectorii se notează cu bară deasupra $(\bar{x}, \bar{y}, \text{etc.})$, iar scalarii cu litere mici ale alfabetului grec ($\alpha, \beta, \lambda, \mu, \text{etc.}$) și uneori ale alfabetului latin.

Exemple:

1. Fie $M(m, n, K)$ mulțimea matricelor cu m linii și n coloane cu elemente din corpul K . Această mulțime formează un spațiu vectorial peste corpul K față de operațiile obișnuite de adunare a matricelor și înmulțire a matricelor cu scalari din K .

2. Fie $M(1, n, K)$ mulțimea matricelor cu o singură linie și cu n coloane, cu elemente din corpul K . Această mulțime se mai notează: $K^n = \{(x^1, x^2, \dots, x^n) \mid x^i \in K, i = 1, 2, \dots, n\}$. Elementele lui K^n se numesc *vectori linie n -dimensionali*. Operațiile de adunare a vectorilor linie n -dimensionali și de înmulțire a acestora cu scalari devin:

$$\begin{aligned} \bar{x} + \bar{y} &= (x^1 + y^1, x^2 + y^2, \dots, x^n + y^n) \\ \alpha\bar{x} &= (\alpha x^1, \alpha x^2, \dots, \alpha x^n), \quad \bar{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n), \quad \bar{y} = (y^1, y^2, \dots, y^n). \end{aligned}$$

Se verifică ușor că împreună cu aceste două operații K^n este un spațiu vectorial peste corpul K .

3. Fie $M(n, 1, K)$ mulțimea matricelor cu o singură coloană și n linii cu elemente din corpul K , ce se pot nota:

$$\tilde{K}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, x^i \in K, i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

Elementele lui $\tilde{K}^n$, în acest caz se numesc *vectori coloană n-dimensional*. Și în acest caz $(\tilde{K}^n, K)$ este spațiu vectorial.

Deoarece mulțimile $M(1,n,K)$ și $M(n,1,K)$ se deosebesc doar prin modul de scriere a elementelor, în practică se vorbește doar despre *vectori n-dimensional*, tipul acestora – linie sau coloană – subînțelegându-se din context.

Spațiul $(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ se numește *spațiul vectorial real n-dimensional*, iar $(\mathbf{C}^n, \mathbf{C})$ *spațiul vectorial complex n-dimensional*.

4. Mulțimea polinoamelor de o nedeterminată, cu coeficienți reali, de grad cel mult egal cu n , ($n \in \mathbf{N}$), formează spațiu vectorial peste corpul $\mathbf{R}$, față de operațiile obișnuite de adunare a polinoamelor și înmulțire a polinoamelor cu scalari reali. Se păstrează proprietatea dacă înlocuim corpul $\mathbf{R}$ cu K .

Mulțimea polinoamelor de o nedeterminată, de grad n , cu coeficienți din K , nu are structură de spațiu vectorial față de operațiile indicate în exemplul 4.

Terorema I.1. (Reguli de calcul în spațiul vectorial). În orice spațiu vectorial V peste K au loc afirmațiile:

1. $0 \cdot \bar{x} = \bar{0}$, $(\forall) \bar{x} \in V$;
2. $\alpha \cdot \bar{0} = \bar{0}$, $(\forall) \alpha \in K$;
3. $(-1) \cdot \bar{x} = -\bar{x}$, $(\forall) \bar{x} \in V$;
4. $\alpha \cdot \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \alpha = 0$ sau $\bar{x} = \bar{0}$;
5. $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$, $(\forall) \bar{x}, \bar{y} \in V$, deci $(V, +)$ este grup abelian.

Consecințe: Fie V un spațiu vectorial peste K . Sunt adevărate afirmațiile:

1. Dacă $\alpha \in K^*$ și $\bar{x}, \bar{y} \in V$, atunci $\alpha \bar{x} = \alpha \bar{y} \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$.
2. Dacă $\alpha, \beta \in K$, $\alpha \neq \beta$, atunci $\alpha \bar{x} = \beta \bar{x} \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$.

I.2. Dependență și independență liniară. Acoperirea liniară a unui sistem de vectori

Fie (V, K) un spațiu vectorial și $S = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$ un sistem de vectori din V .

Definiția I.2. Spunem că un vector $\bar{x} \in V$ este o combinație liniară de vectorii sistemului S dacă există $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n \in K$ astfel încât:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \alpha^i \bar{a}_i.$$

De exemplu, vectorul nul este o combinație liniară de vectorii lui S , oricare ar fi sistemul S din V .

Definiția I.3. Mulțimea tuturor combinațiilor liniare de vectori din S , se numește *acoperirea liniară a lui S* , și se notează $L(S)$.

În particular dacă $S = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$, atunci

$$L(S) = \left\{ \alpha^1 \bar{a}_1 + \dots + \alpha^n \bar{a}_n \mid \alpha^1, \dots, \alpha^n \in K \right\}.$$

În mod evident, $\bar{a}_i \in L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)$, $(\forall) i = \overline{1, n}$.

Propoziția I.1. Dacă $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_p\} \in L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)$, atunci

$$L(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_p) \subseteq L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n).$$

Demonstrație:

Deoarece $\bar{b}_i \in L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)$, $(\forall) i = \overline{1, p}$, $\Rightarrow \bar{b}_i = \sum_{j=1}^n \alpha_i^j \bar{a}_j$, $\alpha_i^j \in K$

$$\bar{x} \in L(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_p) \Rightarrow \bar{x} = \sum_{i=1}^p \alpha^i \bar{b}_i.$$

$$\text{Deci } \bar{x} = \sum_{i=1}^p \alpha^i \left(\sum_{j=1}^n \alpha_i^j \bar{a}_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^p \alpha^i \alpha_i^j \right) \bar{a}_j.$$

$$\text{Obținem astfel că: } L(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_p) \subseteq L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n).$$

Propoziția I.2. Dacă $\bar{a} \in L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)$, atunci $L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) = L(\bar{a}, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)$. În particular, $L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) = L(\bar{0}, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)$.

Justificarea este asemănătoare cu cea a propoziției anterioare.

Definiția I.4. Spunem că sistemul S este liniar dependent (sau că vectorii $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ sunt liniari dependenți), dacă există scalarii $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n \in K$, nu toți nuli, astfel încât:

$$\alpha^1 \bar{a}_1 + \dots + \alpha^n \bar{a}_n = \bar{0}.$$

Altfel spus, vectorii $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ sunt liniari dependenți dacă există cel puțin o combinație liniară nulă a lor cu nu toți scalarii nuli.

Definiția I.5. Spunem că sistemul S este liniar independent (sau că vectorii săi sunt liniar independenți) dacă S nu este liniar dependent.

Cu alte cuvinte, vectorii $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ sunt liniari independenți dacă din orice combinație liniară nulă a lor rezultă toți scalarii nuli.

Exemple.

1. În $\mathbf{R}^n$ vectorii $\bar{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$; $\bar{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $\bar{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$ sunt liniar independenți.

$$\alpha^1 \bar{e}_1 + \alpha^2 \bar{e}_2 + \dots + \alpha^n \bar{e}_n = \bar{0} \Leftrightarrow \alpha^1 = 0, \alpha^2 = 0, \dots, \alpha^n = 0.$$

2. În spațiul vectorial al polinoamelor cu coeficienți reali, de grad cel mult n , polinoamele: $1, X, X^2, \dots, X^n$ sunt liniar independente.

Într-adevăr, dacă $\alpha^0 \cdot 1 + \alpha^1 \cdot X + \dots + \alpha^n \cdot X^n = \bar{0}$ ($\bar{0} = 0 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 + \dots$), prin identificarea coeficienților rezultă $\alpha^0 = 0, \alpha^1 = 0, \dots, \alpha^n = 0$.

Propoziția I.3. Într-un spațiu vectorial au loc următoarele afirmații:

- 1) Orice sistem de vectori care conține vectorul nul este liniar dependent.
- 2) Orice subsistem al unui sistem liniar independent este liniar independent.
- 3) Orice suprasistem al unui sistem liniar dependent este liniar dependent.
- 4) Fie $\bar{a} \in V$. Sistemul $\{\bar{a}\}$ este liniar dependent dacă și numai dacă $\bar{a} = \bar{0}$.

Definiția I.6. Un sistem infinit de vectori ai lui V este liniar independent dacă orice subsistem finit al său este liniar independent.

Propoziția I. 4. Sistemul de vectori $S = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$ este liniar dependent dacă și numai dacă cel puțin unul dintre ei se scrie ca o combinație liniară a celorlalți.

Demonstrație:

Presupunem că S este liniar dependent. Deci, există $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n \in K$, nu toți nuli, astfel încât $\alpha^1 \bar{a}_1 + \dots + \alpha^n \bar{a}_n = \bar{0}$.

$$\bar{a}_k = -\alpha^1 (\alpha^k)^{-1} \bar{a}_1 - \dots - \alpha^{k-1} (\alpha^k)^{-1} \bar{a}_{k-1} - \alpha^{k+1} (\alpha_k)^{-1} \bar{a}_{k+1} - \dots - \alpha^n (\alpha_k)^{-1} \bar{a}_n.$$

Reciproc, presupunem că din sistemul S , vectorul $\bar{a}_k$ ($k \in \{1, 2, \dots, n\}$) se scrie ca o combinație liniară a celorlalți:

$$\bar{0} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \dots + \lambda_{k-1} \bar{a}_{k-1} + (-1) \bar{a}_k + \lambda_{k+1} \bar{a}_{k+1} + \dots + \lambda_n \bar{a}_n.$$

Definiția I.9. Spunem că spațiul vectorial (V, K) are dimensiunea finită n dacă există în V o bază formată din n vectori. Vom scrie $\dim V = n$.

În caz contrar spunem că spațiul V are dimensiunea infinită și scriem $\dim V = \infty$.

Dimensiunea spațiului vectorial nul, $\{\vec{0}\}$, este prin definiție 0.

Example:

1. Dimensiunea lui $\mathbf{R}^2$ este 2 (scriem $\dim \mathbf{R}^2 = 2$)

Vectorii $\vec{e}_1 = (1, 0)$ și $\vec{e}_2 = (0, 1)$ sunt liniar independenți deoarece:

$$\alpha^1 \vec{e}_1 + \alpha^2 \vec{e}_2 = \vec{0}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R} \Leftrightarrow (\alpha^1, \alpha^2) = (0, 0) \Leftrightarrow \alpha^1 = 0 \text{ și } \alpha^2 = 0.$$

$$\mathbf{R}^2 = L(\vec{e}_1, \vec{e}_2), \text{ întrucât pentru orice vector } \vec{v} = (v^1, v^2), \quad \vec{v} = v^1 \vec{e}_1 + v^2 \vec{e}_2.$$

Deci, vectorii $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ formează o bază pentru $\mathbf{R}^2$, astfel $\dim \mathbf{R}^2 = 2$.

2 $\dim \mathbf{R}^n = n$ (demonstrația fiind asemănătoare cu cea precedentă) iar baza formată din vectorii:

$$\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (0, 0, \dots, 1) \text{ poartă numele de bază canonică (naturală, standard) a lui } \mathbf{R}^n.$$

Observația I.1. Fie V un spațiu vectorial peste K de dimensiune finită n . Sunt adevărate următoarele afirmații:

- 1) Oricare $n+1$ vectori (sau mai mulți) din V sunt liniar dependenți.
- 2) Oricare n vectori din V liniar independenți formează o bază pentru V .
- 3) Oricare sistem de generatori pentru V , format din n vectori, este o bază pentru V .

Propoziția I.2. Într-un spațiu vectorial V , finit dimensional, orice sistem de vectori liniari independenți poate fi completat până la o bază a spațiului.

Teorema I.4. Fie V un spațiu vectorial și $B = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\} \subseteq V$. Atunci B este bază a lui V dacă și numai dacă orice vector al lui V se poate scrie în mod unic ca o combinație liniară de vectorii din B .

Demonstrație:

Fie $\vec{x} \in V$ un vector arbitrar. Presupunem ca scrierea lui în raport cu B nu este unică. Deci, există $\alpha^1, \dots, \alpha^n \in K$ astfel încât: $\vec{x} = \alpha^1 \vec{a}_1 + \alpha^2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha^n \vec{a}_n$

și există $\beta^1, \dots, \beta^n \in K$ astfel încât: $\vec{x} = \beta^1 \vec{a}_1 + \beta^2 \vec{a}_2 + \dots + \beta^n \vec{a}_n$.

$$\text{Obținem: } \vec{0} = (\alpha^1 - \beta^1) \vec{a}_1 + (\alpha^2 - \beta^2) \vec{a}_2 + \dots + (\alpha^n - \beta^n) \vec{a}_n.$$

$$\text{Cum } \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\} \text{ este liniar independent, rezultă } \begin{cases} \alpha^1 - \beta^1 = 0 \\ \alpha^2 - \beta^2 = 0 \\ \vdots \\ \alpha^n - \beta^n = 0 \end{cases}.$$

Deci, $\alpha^1 = \beta^1, \dots, \alpha^n = \beta^n$ și scrierea lui $\vec{x}$ în raport cu vectorii din B este unică.

Reciproc, presupunem că orice vector din V se scrie în mod unic ca o combinație liniară de vectorii lui B . În cazul vectorului nul obținem: $\vec{0} = 0 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{a}_n$, scriere unică. Astfel că, dacă facem o combinație liniară nulă de vectorii din B , toți scalarii ce apar trebuie să fie nuli, deci sistemul B este liniar independent. Deoarece orice vector din V se scrie ca o combinație liniară de vectorii lui B , rezultă că B formează o bază a lui V .

Astfel, scrierea unui vector într-o bază este unică. Scalarii ce apar în această reprezentare poartă numele de coordonatele vectorului $\vec{x}$ în raport cu baza considerată.

Vom nota prin $[\vec{x}]_B$, coloana coordonatelor lui $\vec{x}$ în raport cu baza B .

Dacă $\vec{x} = \alpha^1 \vec{a}_1 + \alpha^2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha^n \vec{a}_n$ și $B = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ este o bază pentru V , atunci $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n$ sunt coordonatele lui $\vec{x}$ în raport cu baza B .

Exemple:

1. În $\mathbb{R}^2$ fie baza $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$, $\bar{e}_1 = (1,0)$ și $\bar{e}_2 = (0,1)$ și $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$, $\bar{x} = (4,3)$. Cum $\bar{x} = 4\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2$ coordonatele lui $\bar{x}$ în baza B sunt 4 și 3.

2. În $\mathbb{R}^2$ fie baza $B = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2\}$, $\bar{f}_1 = (1,1)$, $\bar{f}_2 = (1,2)$ și $\bar{x} = (4,3)$. Deoarece $\bar{x} = 5\bar{f}_1 - \bar{f}_2$, coordonatele lui $\bar{x}$ în baza B sunt 5 și -1.

3. Fie P_n spațiul vectorial al polinoamelor cu coeficienți reali, de grad cel mult $n-1$. Mulțimea elementelor $1, t, \dots, t^{n-1}$ formează o bază în P_n .

Coordonatele unui polinom $P(t) = \alpha^0 t^{n-1} + \alpha^1 t^{n-2} + \dots + \alpha^{n-2} t + \alpha^{n-1}$ sunt coeficienții polinomului, $\alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^{n-1}$.

Dacă se consideră o altă bază, fie aceasta $1, t-t_0, \dots, (t-t_0)^{n-1}$, conform formulei lui Taylor, polinomul $P(t)$ poate fi scris:

$$P(t) = P(t_0) + \frac{P'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \dots + \frac{P^{(n-1)}(t_0)}{(n-1)!}(t-t_0)^{n-1}$$

Rezultă că în raport cu această bază, coordonatele lui $P(t)$ sunt:

$$P(t_0), P'(t_0), \dots, \frac{P^{(n-1)}(t_0)}{(n-1)!}.$$

5. În $M_2(\mathbb{R}) \Rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, formează o bază căci sunt evident liniar

independente, iar pentru orice matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$, avem: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = aA_1 + bA_2 + cA_3 + dA_4$, adică ele formează și un sistem de generatori pentru $M_2(\mathbb{R})$. Coordonatele lui A în această bază fiind tocmai elementele sale: a, b, c, d .

I.4. Schimbarea coordonatelor unui vector la o schimbare a bazei

Fie (V, K) un spațiu vectorial de dimensiune n , iar $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$, $B' = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$ două baze pentru V .

Considerăm un vector arbitrar $\bar{x} \in V$ ce are următoarele scrieri în cele două baze:

$$\bar{x} = x^1 \bar{e}_1 + \dots + x^n \bar{e}_n, x^i \in K, i = \overline{1, n}, \text{ respectiv}$$

$$\bar{x} = \beta^1 \bar{f}_1 + \dots + \beta^n \bar{f}_n, \beta^i \in K, i = \overline{1, n}.$$

Ne propunem să găsim relația de legătură între coordonatele $x^1, \dots, x^n$ și $\beta^1, \dots, \beta^n$.

Deoarece B este bază pentru V , iar $\bar{f}_k \in V, k = \overline{1, n}$, atunci fie:

$$\bar{f}_k = \alpha_k^1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_k^n \bar{e}_n, k = \overline{1, n},$$

scrierea acestor vectori în raport cu B .

Matricea ce se obține scriind coordonatele vectorilor $\bar{f}_k, k = 1, 2, \dots, n$ în baza B , pe coloane este:

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \alpha_n^n \end{pmatrix}$$

Această matrice se numește matricea de trecere de la baza B la baza B' .

$$\text{Avem: } \bar{x} = \sum_{k=1}^n \beta^k \bar{f}_k = \sum_{k=1}^n \beta^k \left(\sum_{i=1}^n \alpha_k^i \bar{e}_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \beta^k \alpha_k^i \right) \bar{e}_i.$$

De aici rezultă:
$$x^i = \sum_{k=1}^n \alpha_k^i \beta^k, (\forall) i = \overline{1, n},$$

adică:

$$\begin{cases} x^1 = \alpha_1^1 \beta^1 + \alpha_2^1 \beta^2 + \dots + \alpha_n^1 \beta^n \\ x^2 = \alpha_1^2 \beta^1 + \alpha_2^2 \beta^2 + \dots + \alpha_n^2 \beta^n \\ \vdots \\ x^n = \alpha_1^n \beta^1 + \alpha_2^n \beta^2 + \dots + \alpha_n^n \beta^n \end{cases}$$

sau în scriere matriceală:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \vdots \\ \beta^n \end{pmatrix},$$

adică $[\bar{x}]_B = M \cdot [\bar{x}]_{B'}$. Această egalitate este echivalentă cu egalitatea: $[\bar{x}]_{B'} = M^{-1} \cdot [\bar{x}]_B$.

Această egalitate se numește *formula de schimbare a coordonatelor unui vector când se trece de la baza B la baza B'* .

I.5. Lema substituției și aplicații

Teorema I.6. (Lema substituției) Fie (V, K) un spațiu vectorial de dimensiune finită n și fie $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ o

bază pentru V , iar $\bar{x} = x^1 \bar{e}_1 + \dots + x^i \bar{e}_i + \dots + x^n \bar{e}_n$, $x^i \in K$, $i = \overline{1, n}$, un vector din V . Atunci au loc următoarele afirmații:

1) $B' = \{\bar{e}_1, \dots, e_{i-1}, \bar{x}, \bar{e}_{i+1}, \dots, \bar{e}_n\}$ este o nouă bază pentru V dacă și numai dacă $x^i \neq 0$.

2) Dacă $\bar{a} = a^1 \bar{e}_1 + \dots + a^i \bar{e}_i + \dots + a^n \bar{e}_n, a^i \in K, i = \overline{1, n}$, este un alt vector din V , atunci coordonatele

$\alpha^1, \dots, \alpha^n$ ale vectorului $\bar{a}$ în baza $B' = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{i-1}, \bar{x}, \bar{e}_{i+1}, \dots, \bar{e}_n\}$ sunt date de formulele:

$$\begin{cases} \alpha^i = \frac{a^i}{x^i} \\ \alpha^k = a^k - \frac{x^k \cdot a^i}{x^i}, \text{ pentru } k \neq i, k = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Aplicații ale lemei substituției

Dintre cele mai importante aplicații ale lemei substituției amintim:

- aflarea coordonatelor vectorilor în diferite baze;
- aflarea inversei unei matrici;
- aflarea rangului unei matrici;
- rezolvarea sistemelor liniare;

Exemple:

1. Să se calculeze inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Notând cu $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ coloanele matricei A avem:

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccc|ccc} & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 & I_3 \\ \hline \bar{e}_1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \bar{e}_2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \bar{e}_3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccc|ccc} & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 & \\ \hline \bar{a}_1 & 1 & 3/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ \bar{e}_2 & 0 & -1/2 & 3/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ \bar{e}_3 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccc|ccc} & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 & \\ \hline \bar{a}_1 & 1 & 0 & 5 & -1 & 3 & 0 \\ \bar{a}_2 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ \bar{e}_3 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c|ccc|ccc} & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 & A^{-1} \\ \hline \bar{a}_1 & 1 & 0 & 0 & -6 & 3 & 5 \\ \bar{a}_2 & 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & -3 \\ \bar{a}_3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Astfel obținem: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Deoarece rangul unei matrice poate fi definit ca număr maxim de coloane sau linii liniar independente, se poate folosi lema substituției la calculul rangului unei matrice. De exemplu, pentru calculul rangului matricei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 & -6 \\ 2 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \text{ avem:}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 & \bar{a}_4 \\ \hline \bar{e}_1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ \bar{e}_2 & 2 & 3 & 3 & -6 \\ \bar{e}_3 & 2 & 2 & 2 & -4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 & \bar{a}_4 \\ \hline \bar{e}_1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ \bar{a}_1 & 1 & 3/2 & 3/2 & -3 \\ \bar{e}_3 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|cccc} & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 & \bar{a}_4 \\ \hline \bar{a}_2 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ \bar{a}_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{e}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Au fost introduse două coloane în noua bază, deci $\text{rang } A = 2$.

3. Lema substituției se poate folosi și la rezolvarea sistemelor liniare. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ -x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Notând cu $L = (1, 3, 0)^t$ coloana termenilor liberi și cu a^1, a^2, a^3, a^4 coloanele coeficienților necunoscutelor avem:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 & \bar{a}_4 & L \\ \hline \bar{e}_1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ \bar{e}_2 & 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ \bar{e}_3 & -1 & -7 & -2 & 2 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc|c} & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 & \bar{a}_4 & L \\ \hline \bar{a}_1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ \bar{e}_2 & 0 & -5 & -1 & 1 & 1 \\ \bar{e}_3 & 0 & -5 & -1 & 1 & 1 \end{array} \Rightarrow$$

	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	L
$\bar{a}_1$	1	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{7}{5}$
$\bar{a}_2$	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$
$\bar{e}_3$	0	0	0	0	0

Sistemul a devenit:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 = \frac{7}{5} \\ x_2 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

Matricea sistemului are rangul 2, ca și matricea extinsă, și deci sistemul este compatibil nedeterminat, necunoscutele principale fiind x_1 și x_2 .

Soluția sistemului este:

$$x_4 = \alpha, x_3 = \beta, x_2 = -\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\alpha - \frac{1}{5}\beta, x_1 = \frac{7}{5} + \frac{3}{5}\alpha - \frac{3}{5}\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

I.6. Subspații vectoriale

Fie (V, K) un spațiu vectorial.

Definiția I.9. Spunem că $V_1 \subset V$, $V_1 \neq \emptyset$ este subspațiu vectorial al lui V , dacă este spațiu vectorial față de aceleași legi în raport cu care V este spațiu vectorial.

Propoziția I.8. $V_1 \subset V, V_1 \neq \emptyset$ este subspațiu liniar al lui V dacă și numai dacă $(\forall)\alpha, \beta \in K$ și $(\forall)\bar{x}, \bar{y} \in V_1$ are loc $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in V_1$.

Exemple:

1. Fie $V = \mathbb{R}^n$. Atunci $V_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 = 0\}$ este subspațiu vectorial al lui $\mathbb{R}^n$.
2. Mulțimea $M_s = \{A \in M_n(\mathbb{R}) / A = A^t\}$ este subspațiu vectorial al lui $M_n(\mathbb{R})$ numit *subspațiul matricelor simetrice*.
3. Mulțimea matricelor antisimetrice, $M_{as} = \{A \in M_n(\mathbb{R}) / A = -A^t\}$, este subspațiu vectorial al lui $M_n(\mathbb{R})$.
4. Fie V un spațiu vectorial peste K . Atunci, mulțimile $\{\bar{0}\}$ și V sunt subspații vectoriale ale lui V , numite *subspații improprii*.

Propoziția I.10. Fie (V, K) un spațiu vectorial cu $\dim V = n$ și V_1 un subspațiu vectorial al lui V . Atunci $\dim V_1 \leq n$. Justificarea este imediată și se bazează pe Propoziția I.5

Observația I.9. Dacă V este spațiu vectorial peste K de dimensiune finită n , iar V_1 este un subspațiu vectorial al său cu $\dim V_1 = n$, atunci $V_1 = V$.

Observația I.10. Oricare ar fi $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\} \subset V$, mulțimea $L(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m)$ este subspațiu vectorial al lui V .

I.7. Operații cu subspații vectoriale

Fie V un spațiu vectorial și V_1, V_2 două subspații vectoriale ale sale. Notăm:

$$V_1 + V_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \mid \bar{x}_1 \in V_1 \text{ și } \bar{x}_2 \in V_2\}$$

$$V_1 \cap V_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{x} \in V \mid \bar{x} \in V_1 \text{ și } \bar{x} \in V_2\}$$

Teorema I.8. $V_1 + V_2$ și $V_1 \cap V_2$ sunt subspații vectoriale ale lui V .

Observația I.12. Teorema precedentă poate fi generalizată astfel: o sumă finită de subspații vectoriale ale aceluiași spațiu vectorial este subspațiu vectorial și o intersecție finită de subspații vectoriale ale aceluiași spațiu vectorial este subspațiu vectorial.

Observația I.13. Reuniunea a două (sau mai multe) subspații vectoriale nu este în general, subspațiu vectorial.

Justificarea acestei afirmații se poate face pe baza următorului contraexemplu.

$$\text{Avem: } V_1 \cup V_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{x} \in V \mid \bar{x} \in V_1 \text{ sau } \bar{x} \in V_2\}$$

Considerăm $V = \mathbf{R}^2$. Alegem următoarele două subspații vectoriale:

$$V_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbf{R}\} \text{ și } V_2 = \{(0, x) \mid x \in \mathbf{R}\}.$$

Vectorul $(1, 0) \in V_1$, vectorul $(0, 1) \in V_2$, dar suma lor $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$ nu aparține lui $V_1 \cup V_2$.

Tot de aici se poate observa că în general, $V_1 \cup V_2$ este diferit de $V_1 + V_2$.

Definiția I.20. Fie V_1 și V_2 două subspații vectoriale ale spațiului vectorial V . Spunem că V este sumă directă de V_1 și V_2 dacă fiecare vector din V se scrie în mod unic ca sumă dintre un vector din V_1 și un vector din V_2 , și notăm $V = V_1 \oplus V_2$.

Exemple:

1. Fie $V = \mathbf{R}^2$, $V_1 = \{(x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbf{R}\}$ și $V_2 = \{(0, x_2) \mid x_2 \in \mathbf{R}\}$. Atunci $\mathbf{R}^2 = V_1 \oplus V_2$.

Definiția I.21. Dacă $V = V_1 \oplus V_2$ și $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$, $\bar{x}_1 \in V_1, \bar{x}_2 \in V_2$, vectorul $\bar{x}_1$ se numește proiecția lui $\bar{x}$ pe subspațiul V_1 , paralelă cu V_2 , iar vectorul $\bar{x}_2$ se numește proiecția lui $\bar{x}$ pe subspațiul V_2 , paralelă cu V_1 .

Teorema I.12. Dacă V este un spațiu vectorial de dimensiune finită n , V_1 și V_2 două subspații vectoriale ale lui V , atunci $V = V_1 \oplus V_2$ dacă și numai dacă au loc relațiile:

$$1) V_1 \cap V_2 = \{\bar{0}\};$$

$$2) \dim V_1 + \dim V_2 = \dim V.$$

Teorema I.22. (teorema dimensiunii sau formula lui Grassmann)

Dacă V_1 și V_2 sunt subspații vectoriale ale spațiului vectorial finit dimensional (V, K) atunci:

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$

Propoziția I.11. Dacă V este un spațiu vectorial peste K , de dimensiune finită n și V_1, V_2 sunt subspații vectoriale ale lui V astfel încât $\dim V_1 + \dim V_2 > n$, atunci $V_1 \cap V_2 \neq \{\bar{0}\}$

Demonstrație:

$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$. Dar, $V_1 + V_2$ este subspațiu vectorial al lui V deci $\dim(V_1 + V_2) \leq n$ și relația anterioară devine $\dim V_1 + \dim V_2 \leq n + \dim(V_1 \cap V_2)$. Ținând seama de ipoteză putem scrie: $n < \dim V_1 + \dim V_2 \leq n + \dim(V_1 \cap V_2)$.

Rezultă $\dim(V_1 + V_2) > 0$, deci $V_1 \cap V_2 \neq \{\bar{0}\}$.

I.8. Probleme rezolvate

1) Să se determine în spațiul $\mathbf{R}^4$, subspațiul format din soluțiile sistemului omogen:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 18x_3 - 19x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 19x_3 - 22x_4 = 0 \end{cases}.$$

Soluție:

Determinantul principal al sistemului este $D_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Rezolvăm sistemul format din primele două ecuații în raport cu x_1 și x_2 - necunoscutele principale. Se obține

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_3 - \frac{7}{2}x_4 \text{ și } x_2 = -\frac{7}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4$$

Astfel, o soluție arbitrară a sistemului dat este $\left(-\frac{1}{2}\alpha - \frac{7}{2}\beta, -\frac{7}{2}\alpha - \frac{3}{2}\beta, \alpha, \beta\right)$ cu $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, iar spațiul

soluțiilor sistemului este

$$V = \left\{ \left(-\frac{1}{2}\alpha - \frac{7}{2}\beta, -\frac{7}{2}\alpha - \frac{3}{2}\beta, \alpha, \beta \right) / \alpha, \beta \in \mathbf{R} \right\} = L(\bar{a}_1, \bar{a}_2),$$

$$\text{unde } \bar{a}_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}, 1, 0 \right), \bar{a}_2 = \left(-\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 1 \right).$$

2) În $\mathbf{R}^3$ avem baza $\bar{a}_1 = (3, 1, -1)$, $\bar{a}_2 = (1, 2, -2)$, $\bar{a}_3 = (2, -1, 3)$ și vectorul $\bar{x} = 2\bar{a}_1 + 3\bar{a}_2 - \bar{a}_3$. Se cere să se calculeze coordonatele lui $\bar{x}$ față de baza $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3\}$, unde

$$\bar{b}_1 = 2\bar{a}_1 - \bar{a}_2 + \bar{a}_3$$

$$\bar{b}_2 = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 - \bar{a}_3$$

$$\bar{b}_3 = 3\bar{a}_1 + 3\bar{a}_2 + \bar{a}_3.$$

Soluție:

Determinăm matricea de trecere de la baza $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ la baza $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3\}$. Avem:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ cu } \det A = 12 \text{ și}$$

$$(A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} & -\frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow [\bar{x}]_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} & -\frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{6} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ adică}$$

$$\bar{x} = -\frac{1}{3}\bar{b}_1 + \frac{7}{6}\bar{b}_2 + \frac{1}{2}\bar{b}_3.$$

3) Să se precizeze dependența liniară a următoarelor sisteme de vectori:

a) $\bar{a}_1 = (1, 2, -1)$, $\bar{a}_2 = (-1, 0, 2)$, $\bar{a}_3 = (1, 6, 1)$ din $\mathbf{R}^3$.

b) $\bar{a}_1 = (1, 2, 1)$, $\bar{a}_2 = (-1, 1, 4)$, $\bar{a}_3 = (2, 1, 5)$ din $\mathbf{R}^3$.

c) $\bar{a}_1 = (1, 1, -1, 0)$, $\bar{a}_2 = (1, -1, -1, 1)$, $\bar{a}_3 = (1, 2, 1, 1)$, $\bar{a}_4 = (-1, 1, 0, 1)$ din $\mathbf{R}^4$.

Soluție:

a) Fie $\lambda^1 \bar{a}_1 + \lambda^2 \bar{a}_2 + \lambda^3 \bar{a}_3 = \bar{0}$

Obținem sistemul:
$$\begin{cases} \lambda^1 - \lambda^2 + \lambda^3 = 0 \\ 2\lambda^1 + 6\lambda^3 = 0 \\ -\lambda^1 + 2\lambda^2 + \lambda^3 = 0 \end{cases}.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 6 - 12 + 2 = 0$$

Rezultă că vectorii $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ sunt liniar dependenți. Să determinăm relația de dependență liniară. Sistemul este compatibil nedeterminat. Rezultă

$$\lambda_1 = -3\alpha, \lambda_2 = -2\alpha, \lambda_3 = \alpha, \alpha \in \mathbf{R}.$$

Pentru $\alpha = -1 \Rightarrow 3\bar{a}_1 + 2\bar{a}_2 - \bar{a}_3 = \bar{0}$, iar aceasta reprezintă o relație de dependență liniară între cei trei vectori.

Observație. Pentru a stabili rapid dependența liniară a unui sistem de n vectori din $\mathbf{R}^n$, dați prin coordonatele lor într-o bază, este suficient să calculăm determinantul ale cărui coloane reprezintă coordonatele acestor vectori. Dacă determinantul este diferit de zero vectorii sunt liniar independenți, altfel, ei sunt liniar dependenți. Mai mult, ei formează o bază a lui $\mathbf{R}^n$, deoarece dimensiunea lui $\mathbf{R}^n$ este n .

b) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 16 - 1 - 2 + 10 \neq 0$

Astfel vectorii $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ sunt liniar independenți. Deci, ei formează o bază în $\mathbf{R}^3$ deoarece numărul lor coincide cu dimensiunea spațiului vectorial $\mathbf{R}^3$.

c) Analog vectorii $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4\}$ sunt liniar independenți pentru că avem:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

4) În $\mathbf{R}^3$ se dau vectorii $\bar{a}_1 = (-1, -1, 2)$, $\bar{a}_2 = (0, 1, -1)$, $\bar{a}_3 = (2, 1, 1)$, $\bar{a}_4 = (-1, -1, 7)$

a) Să se arate că sistemul $S = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4\}$ este un sistem de generatori în $\mathbf{R}^3$.

b) Să se extragă din S un subsistem, S' , care să constituie o bază din $\mathbf{R}^3$.

Soluție:

a) Fie $\bar{x} \in \mathbf{R}^3$, $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$. Să arătăm că există scalarii $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4 \in \mathbf{R}$, astfel încât $x = \bar{x} = \alpha^1 \bar{a}_1 + \alpha^2 \bar{a}_2 + \alpha^3 \bar{a}_3 + \alpha^4 \bar{a}_4$.

Identificând componentele de același indice, rezultă:

$$(s): \begin{cases} x_1 = -\alpha^1 + 2\alpha^3 - \alpha^4 \\ x_2 = -\alpha^1 + \alpha^2 + \alpha^3 - \alpha^4 \\ x_3 = 2\alpha^1 - \alpha^2 + \alpha^3 + 7\alpha^4 \end{cases}$$

Se observă că matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ și rangul ei este 3.

Există determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2 - 4 - 1 = -4 \neq 0$

Deci, sistemul (s) cu necunoscutele $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ este compatibil simplu nederminat. Deci, orice $\bar{x} \in \mathbf{R}^3$ se scrie ca o combinație liniară de vectorii $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$, adică $\mathbf{R}^3 = L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4)$.

b) Vectorii $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ sunt exprimați în baza canonică:

$$\bar{a}_1 = -\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3, \quad \bar{a}_2 = \bar{e}_2 - \bar{e}_3, \quad \bar{a}_3 = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3.$$

Determinantul coordonatelor este $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, rezultă că sunt liniar independenți. Dimensiunea spațiului liniar $\mathbf{R}^3$

fiind 3, rezultă că ei formează o bază a acestui spațiu.

5) Fie spațiul vectorial $\mathbf{R}^3$ și vectorii $\bar{a}_1 = (2, 1, -1)$, $\bar{a}_2 = (1, 2, 1)$, $\bar{a}_3 = (3, 0, 3)$.

a) Să se arate că $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ constituie o bază în $\mathbf{R}^3$.

b) Se dă vectorul $\bar{x} = (1, -1, \lambda)$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Să se determine λ , astfel încât $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{x}\}$ să constituie o bază în $\mathbf{R}^3$.

c) Să se găsească matricea de trecere de la baza $B_1 = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ la $B_2 = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{x}\}$.

Soluție:

a) Se verifică faptul că determinantul corespunzător este nenul.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 3 + 6 - 3 = 18 \neq 0, \text{ deci } \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\} \text{ formează o bază în } \mathbf{R}^3.$$

b) Este suficient ca determinantul corespunzător să fie nenul, adică

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$\text{Rezultă că: } 4\lambda + 1 + 1 + 2 - \lambda + 2 = 3\lambda + 6 \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq -2.$$

c) Pentru a determina matricea de trecere de la B_1 la B_2 , exprimăm vectorii din baza B_2 în raport cu baza B_1 , și obținem:

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= 1 \cdot \bar{a}_1 + 0 \cdot \bar{a}_2 + 0 \cdot \bar{x} \\ \bar{a}_2 &= 0 \cdot \bar{a}_1 + 1 \cdot \bar{a}_2 + 0 \cdot \bar{x} \\ \bar{x} &= \lambda^1 \bar{a}_1 + \lambda^2 \bar{a}_2 + \lambda^3 \bar{a}_3 \end{aligned}$$

Determinăm coordonatele lui $\bar{x}$ în baza $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda^1 + \lambda^2 + 3\lambda^3 \\ -1 = \lambda^1 + 2\lambda^2 \\ \lambda = -\lambda^1 + \lambda^2 + 3\lambda^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \lambda = 3\lambda^1 \\ -1 = \lambda^1 + 2\lambda^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1+\lambda}{3} \\ 2\lambda_2 = -1 - \frac{1+\lambda}{3} = \frac{-4-\lambda}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{de unde } \begin{cases} \lambda^1 = \frac{1+\lambda}{3} \\ \lambda^2 = \frac{-4-\lambda}{6} \end{cases} \Rightarrow \lambda^3 = \frac{1-2\lambda^1-\lambda^2}{3} = \frac{2-\lambda}{6}$$

$$\bar{x} = \frac{1+\lambda}{3}\bar{a}_1 - \frac{4+\lambda}{6}\bar{a}_2 + \frac{2-\lambda}{6}\bar{a}_3$$

$$\text{Matricea de trecere de la } B_1 \text{ la } B_2 \text{ este } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1+\lambda}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4+\lambda}{6} \\ 0 & 0 & \frac{2-\lambda}{6} \end{pmatrix}.$$

6) În spațiul vectorial $\mathbf{R}^3$ se consideră baza $B_1 = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\} \subset \mathbf{R}^3$, unde $\bar{a}_1 = (2, -1, 2), \bar{a}_2 = (1, -1, 2), \bar{a}_3 = (0, 3, 2)$.

Se cere:

- Să se găsească coordonatele vectorului $\bar{x} = (-1, 2, 3)$ în baza B_1 ;
- Să se arate că $B_2 = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3\}$, unde $\bar{b}_1 = (0, -1, 1), \bar{b}_2 = (2, 1, 1), \bar{b}_3 = (-1, 2, 1)$, este o nouă bază în $\mathbf{R}^3$.
- Să se determine coordonatele lui $\bar{x}$ în raport cu baza B_2 .

Soluție:

- Verificăm faptul că $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ este o bază în $\mathbf{R}^3$.

$$\text{Avem } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Utilizăm formula $[\bar{x}]_{B_1} = (A)^{-1}[\bar{x}]_B$ unde B reprezintă baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$, iar

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se obține: $\bar{x} = -\frac{13}{8}\bar{a}_1 + \frac{9}{4}\bar{a}_2 + \frac{7}{8}\bar{a}_3$.

- Se calculează

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(6+2) = -8 \neq 0. \text{ Rezultă că vectorii } \bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3 \text{ sunt liniar independenți și formează o bază}$$

în $\mathbf{R}^3$.

- Avem formula $[\bar{x}]_{B_2} = (A')^{-1}[\bar{x}]_B$, unde

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x} = -\frac{5}{4}\bar{b}_1 + \frac{1}{4}\bar{b}_2 + \frac{3}{2}\bar{b}_3.$$

7) În spațiul vectorial $M_2(\mathbf{R})$ se dau vectorii: $\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \bar{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

și $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ scriși într-o bază oarecare.

a) Să se arate ca $B = \{ \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4 \}$ este o bază în $M_2(\mathbf{R})$.

b) Să se determine coordonatele vectorului $\bar{x}$ în baza B .

Soluție:

a) Verificăm dacă vectorii $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$ sunt liniar independenți.

Considerăm $\lambda^1 \bar{a}_1 + \lambda^2 \bar{a}_2 + \lambda^3 \bar{a}_3 + \lambda^4 \bar{a}_4 = \bar{0}$.

$$\text{Rezultă } \lambda^1 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \lambda^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + \lambda^3 \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \lambda^4 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rezultă } \begin{cases} 2\lambda^1 - \lambda^2 + 7\lambda^3 = 0 \\ -\lambda^1 + \lambda^3 + 2\lambda^4 = 0 \\ 5\lambda^2 + 3\lambda^3 = 0 \\ 3\lambda^1 + \lambda^2 + 2\lambda^3 + 2\lambda^4 = 0 \end{cases}$$

S-a obținut un sistem omogen care admite doar soluția banală, deoarece determinantul sistemului este diferit de zero.

Avem într-adevăr:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 9 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 2(-21 + 150 - 315) \neq 0$$

Rezultă că vectorii $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$ sunt liniar independenți.

Cum dimensiunea spațiului vectorial $M_2(\mathbf{R})$ este 4, rezultă că $\{ \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4 \}$ formează o bază în spațiul vectorial considerat.

b) Fie $\bar{x} = \alpha \bar{a}_1 + \beta \bar{a}_2 + \gamma \bar{a}_3 + \delta \bar{a}_4$. Din identificarea componentelor de același ordin, rezultă:

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta + 7\gamma = 1 \\ -\alpha + \gamma + 2\delta = -1 \\ 5\beta + 3\gamma = 2 \\ 3\alpha + \beta + 2\gamma + \delta = 0 \end{cases}$$

Sistemul este compatibil determinat deoarece determinantul este nenul, și ca urmare a aplicării formulei lui Cramer obținem:

$$\bar{x} = -\frac{5}{248} \bar{a}_1 + \frac{71}{248} \bar{a}_2 + \frac{47}{248} \bar{a}_3 - \frac{45}{62} \bar{a}_4.$$

8) Să se determine $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ astfel încât matricele $\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}, \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}, \bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ să fie liniar

independente.

Soluție:

Considerăm $\lambda^1 \bar{a}_1 + \lambda^2 \bar{a}_2 + \lambda^3 \bar{a}_3 = \bar{0}$ și impunem condiția ca sistemul ce se obține să admită doar soluția banală.

Sistemul ce se obține este:

$$\begin{cases} \lambda^1 + 2\lambda^2 = 0 \\ \lambda^2 - \lambda^3 = 0 \\ \alpha\lambda^1 + \lambda^2 + \lambda^3 = 0 \\ \lambda^1 + \beta\lambda^2 + 2\lambda^3 = 0 \end{cases}$$

Sistemul este omogen, are 4 ecuații și 3 necunoscute; pentru ca acest sistem să admită soluții, matricea sistemului trebuie să aibă rangul 3.

Avem:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \beta & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 1 - 2\alpha + 1 \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 1 \text{ sau}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & \beta & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 2 - 2 + \beta \neq 0 \Rightarrow \beta \neq 0 \text{ sau}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \beta & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow -\alpha\beta + 1 + 1 - 2\alpha \neq 0$$

$\alpha(\beta + 2) \neq 2 \Rightarrow$ pentru $\alpha = 1, \beta = 0 \Rightarrow \alpha(\beta + 2) = 2$, deci rangul nu mai este trei

Dacă $\alpha \neq 1$, rangul matricei este trei, dacă $\beta \neq 0$, la fel, și sistemul are doar soluția banală, $\lambda^1 = \lambda^2 = \lambda^3 = 0$, adică vectorii $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ sunt liniar independenți. Dacă $\alpha = 1, \beta = 0$ rangul matricei A este 2, deci sistemul admite și alte soluții, astfel că vectorii nu mai sunt liniar independenți.

9) Se dau în $\mathbf{R}^3$ vectorii $\bar{a} = (-2, 1, 1)$, $\bar{b} = (0, -1, 2)$, $\bar{c} = (-1, -1, 0)$. Constituie aceștia o bază pentru $\mathbf{R}^3$?

Soluție:

Ca acești vectori să formeze o bază, determinantul matricei formate cu coordonatele lor în baza canonică trebuie să fie $\neq 0$. Avem:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 - 3 - 0 + 2 + 2 = 2 \neq 0.$$

Astfel, vectorii considerați formează o bază în $\mathbf{R}^3$.

10) Folosind lema substituției, să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x - 2y + z = -1 \\ -3x + y - 2z = -3 \end{cases}.$$

Soluție:

Suntem în $\mathbf{R}^3$. Notăm cu $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ vectorii din $\mathbf{R}^3$ formați cu coeficienții necunoscutelor din sistem și cu $\bar{L}$ vectorul termenilor liberi. Scriem tabloul corespunzător și aplicând lema substituției avem:

B	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	L
e_1	2	-1	$\overline{1}$	2
e_2	1	-2	1	-1
e_3	-3	1	-2	-3

$\bar{a}_3$	2	-1	1	2
$\bar{e}_2$	-1	-1	0	-3
$\bar{e}_3$	$\overline{1}$	-1	0	1

$\bar{a}_3$	0	1	1	0
$\bar{e}_2$	0	$\overline{-2}$	0	-2
$\bar{a}_1$	1	-1	0	1

$\bar{a}_3$	0	0	1	-1
$\bar{a}_2$	0	1	0	1
$\bar{a}_1$	1	0	0	2

Soluția sistemului este $x = 2, y = 1, z = -1$.

II. APLICAȚII LINIARE

II.1. Aplicații liniare-definiție, exemple, proprietăți. Nucleul și imaginea unei aplicații liniare

Definiția II.1. Dacă X, Y sunt spații vectoriale peste corpul K atunci aplicația $U : X \rightarrow Y$ se numește aplicație liniară (sau morfism sau homomorfism de spații vectoriale) dacă:

- 1) $U(\bar{x} + \bar{y}) = U(\bar{x}) + U(\bar{y}), (\forall) \bar{x}, \bar{y} \in X$ (proprietatea de aditivitate)
- 2) $U(\alpha \bar{x}) = \alpha U(\bar{x}), (\forall) \alpha \in K, (\forall) \bar{x} \in X$ (proprietatea de omogenitate)

Propoziția II.1. Fie X și Y două K spații vectoriale. Atunci $U : X \rightarrow Y$ este aplicație liniară dacă și numai dacă are loc relația:

$$U(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y}) = \alpha U(\bar{x}) + \beta U(\bar{y}), (\forall) \alpha, \beta \in K, (\forall) \bar{x}, \bar{y} \in X.$$

Exemple:

1. Aplicația $f : R \rightarrow R, f(x) = ax, a \in R$, este liniară, pe când $g : R \rightarrow R, g(x) = ax + b, a, b \in R, b \neq 0$, nu mai este o aplicație liniară.
2. Aplicația $U : C[a, b] \rightarrow R, U(f) = \int_a^b f(t)dt$ unde $C[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow R \mid f \text{ funcție continuă}\}$, este liniară.
3. Fie $P_n(R)$ spațiul polinoamelor cu coeficienți reali de grad cel mult n . Aplicația $U : P_n(R) \rightarrow P_{n-1}(R), U(P) = P'$, unde P' este derivata polinomului P , este liniară.

Propoziția II.2. Dacă $U : X \rightarrow Y$ este aplicație liniară, atunci au loc:

- i) $U(\bar{0}_X) = \bar{0}_Y$,
- ii) $U(-\bar{x}) = -U(\bar{x}), (\forall) \bar{x} \in X$,
- iii) $U\left(\sum_{i=1}^n \alpha^i \bar{x}_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha^i U(\bar{x}_i), (\forall) \alpha^i \in K, \bar{x}_i \in X, i = \overline{1, n}.$

Definiția II.2. Fie $U : X \rightarrow Y$ aplicație liniară. Definim:

-nucleul aplicației liniare U prin $\text{Ker } U \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{x} \in X \mid U(\bar{x}) = \bar{0}_Y\}$,

-imaginea aplicației liniare U prin $\text{Im } U \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{y} \in Y \mid (\exists) \bar{x} \in X \text{ astfel încât } \bar{y} = U(\bar{x})\}.$

Propoziția II.3.

- i) $\text{Ker } U$ este subspațiu vectorial al lui X .
- ii) $\text{Im } U$ este subspațiu vectorial al lui Y .

Teorema II.1. O aplicație liniară $U : X \rightarrow Y$ este injectivă dacă și numai dacă $\text{Ker } U = \{\bar{0}_X\}$.

Teoremă II.2. O aplicație liniară injectivă duce un sistem de vectori liniari independenți într-un sistem de vectori liniari independenți.

Teorema II.3. Fie X și Y spații vectoriale peste $K, \dim X = n < \infty$. Dacă $U : X \rightarrow Y$ este o aplicație liniară atunci:

$$\dim X = \dim \text{Ker } U + \dim \text{Im } U.$$

Definiția II.3. Dimensiunea subspațiului $\text{Im } U$ se numește rangul aplicației liniare U , iar dimensiunea subspațiului $\text{Ker } U$ se numește defectul aplicației liniare U .

Observația II.1. Aplicația liniară $U : X \rightarrow Y$ este surjectivă dacă și numai dacă $\text{Im} U = Y$.

Propoziția II.4. Dacă aplicația liniară $U : X \rightarrow Y$ este bijectivă, atunci și inversa sa $U^{-1} : Y \rightarrow X$ este aplicație liniară.

II.2. Izomorfisme de spații vectoriale. Spațiul vectorial $\text{Hom}(X, Y)$

Definiția II.4. Două spații vectoriale X și Y se numesc izomorfe dacă există $U : X \rightarrow Y$ aplicație liniară și bijectivă, iar U se numește în acest caz izomorfism.

Fie X, Y două spații vectoriale peste K de dimensiuni finite n , respectiv m .

Teorema II.4. Fie $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ o bază a spațiului vectorial X , iar $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_m$ vectori arbitrari din Y . Atunci există o unică aplicație liniară $U : X \rightarrow Y$, astfel încât $U(\bar{e}_i) = \bar{f}_i, i = \overline{1, n}$.

Consecință. O aplicație liniară $U : X \rightarrow Y$ este complet determinată dacă se cunosc imaginile $U(\bar{e}_i), i = \overline{1, n}$ ale vectorilor unei baze $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ a lui X , prin U .

Teorema II.5. (teorema izomorfismului)

Două spații vectoriale X și Y de dimensiuni finite sunt izomorfe dacă și numai dacă $\dim X = \dim Y$.

Consecință Orice K -spațiu vectorial n -dimensional este izomorf cu K^n .

Fie X, Y două spații liniare peste corpul K .

Definiția II.5. Notăm prin $\text{Hom}(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \{U : X \rightarrow Y \mid U \text{ aplicație liniară}\}$ mulțimea tuturor aplicațiilor liniare definite pe X cu valori în Y . Uneori această mulțime se mai notează și cu $L(X, Y)$.

Dacă $X=Y$, atunci o aplicație liniară $U : X \rightarrow X$ se numește operator liniar (sau transformare liniară sau endomorfism).

Notăm prin $\text{End}(X) = \{U : X \rightarrow X \mid U \text{ aplicație liniară}\}$ mulțimea tuturor operatorilor liniari definiți pe spațiul vectorial X .

Dacă în plus, un endomorfism este bijectiv el se numește automorfism.

Notăm prin $\text{Aut}(X) = \{U : X \rightarrow X \mid U \text{ liniară și bijectivă}\}$ mulțimea tuturor automorfismelor definite pe X .

Teorema II.6. Mulțimea $\text{Hom}(X, Y)$ formează un K spațiu vectorial în raport cu operațiile:

$$+ : \text{Hom}(X, Y) \times \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(X, Y)$$

$$(U+V)(\bar{x}) = U(\bar{x}) + V(\bar{x}), \quad (\forall) U, V \in \text{Hom}(X, Y), (\forall) \bar{x} \in X;$$

$$\cdot : K \times \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(X, Y)$$

$$(\lambda \cdot U)(\bar{x}) = \lambda U(\bar{x}), \quad (\forall) U \in \text{Hom}(X, Y) \text{ și } (\forall) \lambda \in K.$$

Teorema II.7. Fie X, Y spații vectoriale peste același corp K , de dimensiuni finite m , respectiv n . Atunci $\dim \text{Hom}(X, Y) = n \cdot m$.

II.3. Descrierea unei aplicații liniare într-o pereche de baze

Fie X și Y spații vectoriale peste K , de dimensiuni finite, $\dim X = m$, $\dim Y = n$, $U : X \rightarrow Y$ o aplicație liniară, și fie $B_1 = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\}$ o bază pentru X și $B_2 = \{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n\}$ o bază pentru Y . Deoarece $U(\bar{e}_i) \in Y, i = \overline{1, m}$, acesta se va scrie în mod unic ca o combinație liniară a vectorilor bazei B_2 :

$$U(\bar{e}_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_i^j \bar{f}_j \quad i = \overline{1, m}.$$

Fie $\bar{x} \in X$, cu scrierea sa în baza B_1 : $\bar{x} = \sum_{i=1}^m x^i \bar{e}_i$. Atunci:

$$U(\bar{x}) = U\left(\sum_{i=1}^m x^i \bar{e}_i\right) = \sum_{i=1}^m x^i U(\bar{e}_i) = \sum_{i=1}^m x^i \left(\sum_{j=1}^n \alpha_i^j \bar{f}_j\right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m x^i \alpha_i^j\right) \bar{f}_j$$

Dar $U(\bar{x}) \in Y$ și deci el va admite o scriere în raport cu B_2 : $U(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n \eta^j \bar{f}_j$

Cum scrierea unui vector într-o bază este unică, vom avea: $\eta^j = \sum_{i=1}^m \alpha_i^j x^i \quad (\forall) j = \overline{1, n}$, adică:

$$\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \cdots & \alpha_m^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \cdots & \alpha_m^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix}$$

Folosind scrierea matriceală: $[U(\bar{x})]_{B_2} = A_{(B_1, B_2)} \cdot [\bar{x}]_{B_1}$.

Când bazele B_1, B_2 sunt fixate atunci ele se omit din scrierea anterioară și vom avea:

$$[U(\bar{x})] = A \cdot [\bar{x}] \quad (\forall) \bar{x} \in X$$

Definiția II.6. Matricea $A \in M(n, m, K)$ ce conține pe coloane coordonatele în baza B_2 ale imaginilor vectorilor bazei B_1 prin intermediul aplicației liniare U se numește matricea asociată aplicației liniare U în raport cu bazele B_1 și B_2 .

Exemple: Fie $U: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ definită prin $U(\bar{x}) = (2x^1 - x^3, x^1 + 4x^2 - x^3)$, oricare ar fi $\bar{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3$ (vectorii fiind scriși în raport cu bazele canonice din spațiile vectoriale $\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2$).

Evident $U \in \text{Hom}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2)$. Deoarece $U(\bar{e}_1) = (2, 1), U(\bar{e}_2) = (0, 4), U(\bar{e}_3) = (-1, -1)$ matricea aplicației U în raport cu bazele canonice este

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Observația II.2. Dacă $U: X \rightarrow X$ este un operator liniar și $\dim X = n$, atunci față de o bază din X , lui U îi corespunde o matrice pătratică de ordinul n .

Observația II.3. Fie $U: X \rightarrow Y$ și $V: X \rightarrow Y$ două aplicații liniare iar B_1 și B_2 baze pentru X , respectiv Y . Dacă matricele asociate aplicațiilor liniare U și V , în raport cu aceste baze, sunt A , și respectiv B , atunci matricele aplicațiilor $U + V$ și λU , în raport cu aceleași baze, sunt $A + B$, și respectiv λA .

Teorema II.8. Fie X, Y, Z spații vectoriale peste K , de dimensiuni finite, $\dim X = m, \dim Y = n, \dim Z = p$, B_1, B_2, B_3 baze pentru X , respectiv Y și Z , iar $U: X \rightarrow Y, V: Y \rightarrow Z$ aplicații liniare, cu $A = (\alpha_j^i) \in M(n, m, K)$ matricea asociată lui U în raport cu bazele B_1, B_2 , iar $B = (\beta_n^p) \in M(p, n, K)$ matricea asociată lui V în raport cu bazele

B_2, B_3 . Compunerea (produsul) aplicațiilor U și V , în ordinea VU , este tot o aplicație liniară definită de matricea produs $BA \in M(p, m, K)$, în raport cu bazele B_1, B_3 .

II.4. Schimbarea matricei unei aplicații liniare la schimbarea bazelor

Teorema II.9. Fie $U: X \rightarrow Y$ o aplicație liniară de spații vectoriale finit dimensionale, $\dim X = m$, $\dim Y = n$. Fie $B_1 = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\}$ și $B'_1 = \{\bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_m\}$ baze în X și $B_2 = \{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n\}$, $B'_2 = \{\bar{f}'_1, \dots, \bar{f}'_n\}$ baze în Y , iar $L = (\lambda_{ij}^i)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}$ și $M = (\mu_{kh}^h)_{\substack{1 \leq h \leq n \\ 1 \leq k \leq n}}$ matricele de trecere de la baza B_1 la baza B'_1 , respectiv de la baza B_2 la B'_2 . Fie de asemenea $A = (\alpha_i^h)_{\substack{1 \leq h \leq n \\ 1 \leq i \leq m}}$ matricea asociată aplicației liniare U în raport cu bazele B_1 și B_2 , iar $B = (\beta_j^k)_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ matricea lui U în raport cu bazele B'_1 și B'_2 . Atunci $B = M^{-1}AL$.

Consecință. Dacă A și B sunt matricele corespunzătoare operatorului liniar $U: X \rightarrow X$ în două baze diferite B și B' din X , atunci $B = L^{-1}AL$, unde L este matricea de trecere de la baza B la baza B' .

Observația II.4. Rangul matricei unei aplicații liniare $U: X \rightarrow Y$ se conservă la schimbarea bazelor în cele două spații vectoriale.

Definiția II.7. Rangul unei aplicații liniare $U: X \rightarrow Y$ coincide cu rangul matricei asociate în raport cu două baze arbitrare din X , respectiv Y .

Definiția II.8. Fie X un K spațiu vectorial și $U: X \rightarrow X$ un operator liniar. Un subspațiu vectorial S al lui X se numește invariant față de U dacă pentru orice $\bar{x} \in S$ avem $U(\bar{x}) \in S$ (altfel spus $U(S) \subset S$).

Exemple: Subspațiile improprii $\{\bar{0}_X\}$ și X sunt invariante față de orice operator liniar $U: X \rightarrow X$.

Propoziția II.5.

i) Suma unui număr finit de subspații invariante față de un operator liniar este un subspațiu invariant față de acel operator liniar.

ii) Intersecția unui număr finit de subspații invariante față de un operator liniar este un subspațiu invariant față de acel operator liniar.

Teorema II.9. Fie S un subspațiu vectorial al lui X și $B = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_p\}$ un sistem de generatori pentru S . Atunci, S este invariant în raport cu operatorul liniar $U: X \rightarrow X$ dacă și numai dacă $U(\bar{e}_i) \in S$ ($\forall i = \overline{1, p}$).

II.6. Valori și vectori proprii

Fie X un spațiu vectorial peste K și $U: X \rightarrow X$ un operator liniar.

Definiția II.9. Un scalar $\lambda \in K$ se numește valoare proprie a operatorului liniar U dacă există un vector $\bar{x} \in V$, $\bar{x} \neq \bar{0}$, astfel încât $U(\bar{x}) = \lambda \bar{x}$. Vectorul $\bar{x}$ se numește vector propriu pentru operatorul U corespunzător valorii proprii λ .

Propoziția II.5. Dacă $\bar{x}$ este un vector propriu pentru operatorul U corespunzător valorii proprii λ iar $\alpha \in K, \alpha \neq 0$, atunci $\alpha \bar{x}$ este vector propriu pentru U corespunzător valorii proprii λ .

Teorema II.10. Fie X un spațiu vectorial peste K , de dimensiune finită n și $A = (a_j^i) \in M_n(K)$ matricea operatorului $U \in \text{End}(X)$ în raport cu baza $B = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ a lui X . Atunci, un scalar $\lambda_0 \in K$ este valoare proprie pentru U dacă și numai dacă este rădăcină (în K) a polinomului

$$P_U(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) \quad (*).$$

Teorema II.11. Fie X un spațiu vectorial peste K , de dimensiune finită n și $U \in \text{End}(X)$. Dacă $A \in M_n(K)$ este matricea operatorului U în raport cu baza B_1 și B este matricea lui U în raport cu baza B_2 , atunci

$$\det(A - \lambda I_n) = \det(B - \lambda I_n).$$

Definiția II.10. Polinomul $(*)$ se numește polinomul caracteristic al operatorului liniar U , iar $\det(A - \lambda I_n) = 0$ se numește ecuația caracteristică a lui U .

Practic, pentru a determina valorile și vectorii proprii pentru operatorul liniar $U \in \text{End}(X)$, cu X de dimensiune finită n , procedăm astfel:

1. Se fixează o bază $B = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ a lui X ;
2. Se scrie matricea A a operatorului U în raport cu baza B ;
3. Determinăm polinomul caracteristic $P_U(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$;
4. Rezolvăm ecuația caracteristică $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Rădăcinile (în K) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, m \leq n$ ale acestei ecuații sunt valorile proprii ale lui U .

5. Vectorii proprii corespunzători valorii proprii λ_i sunt vectorii ale căror coordonate în raport cu baza B sunt soluțiile nenule ale sistemului

$$(A - \lambda_i I_n)[\bar{x}] = [\bar{0}].$$

Exemplu: Fie $U: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ un operator liniar care într-o bază din $(\mathbb{C}^3, \mathbb{C})$ este caracterizat de matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pentru a găsi valorile proprii și vectorii proprii asociați procedăm astfel:

1. Scriem ecuația caracteristică $|A - \lambda I_3| = 0$.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Obținem $(1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0$.

2. Rezolvăm ecuația caracteristică și găsim valorile proprii: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$.

3. Pentru fiecare valoare proprie găsim vectorii proprii asociați rezolvând sistemul: $(A - \lambda I_3)[\bar{x}] = [\bar{0}]$.

Pentru $\lambda = 1$ avem:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = -x_2 \end{cases}$$

Deci vectorii proprii corespunzatori valorii proprii $\lambda = 1$ sunt de forma $\bar{x} = (0, x_2, -x_2)^t, x_2 \in \mathbb{C}$. În particular, pentru $x_2 = 1$, $(0, 1, -1)$ este un vector propriu pentru $\lambda = 1$.

Pentru $\lambda = 2$ avem:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = x_1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Deci $(x_1, 0, x_1)$ cu $x_1 \in \mathbb{C}$ este un vector propriu corespunzător valorii proprii $\lambda = 2$. În particular, pentru $x_1 = 1$, obținem vectorul propriu $(1, 0, 1)$.

Observația II.5. Dacă λ este o valoare proprie a operatorului $U \in \text{End}(X)$, atunci mulțimea vectorilor proprii ai lui U corespunzătorii valorii proprii λ coincide cu mulțimea $\text{Ker}(U - \lambda 1_X) \setminus \{\vec{0}\}$, unde 1_X reprezintă endomorfismul identic al spațiului vectorial X .

Teorema II.12. Vectorii proprii ai unui operator liniar U , corespunzătorii la valori proprii distincte două câte două, sunt liniar independenți.

Consecință Dacă valorile proprii distincte două câte două ale unui operator liniar $U : X \rightarrow X$ sunt în număr de $n = \dim X$, atunci vectorii proprii asociați acestor valori proprii formează o bază pentru X , iar matricea asociată lui U în această bază este:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

unde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sunt cele n valori proprii distincte.

Definiția II.11. Spunem că un operator liniar este operator cu structură simplă sau diagonalizabil dacă există o bază în raport cu care matricea sa are formă diagonală.

Definiția II.12. Mulțimea valorilor proprii ale unui operator liniar se numește spectrul operatorului.

Teorema II.13. Condiția necesară și suficientă ca matricea operatorului $U \in \text{End}(V)$ să aibă forma diagonală în raport cu baza B , este ca toți vectorii din B să fie vectori proprii ai lui U .

Teorema II.14. (Teorema Cayley-Hamilton)

Fie X un spațiu vectorial peste K de dimensiune finită n și A matricea operatorului liniar $U : X \rightarrow X$ în raport cu baza B a lui X . Atunci $P_U(A) = \vec{0}$, unde $\vec{0}$ reprezintă matricea nulă de ordinul n . Altfel spus polinomul caracteristic al unui operator liniar este verificat de propria sa matrice.

Observația II.6. Dacă se cunoaște polinomul caracteristic, atunci din teorema Cayley-Hamilton putem determina A^{-1} , ca o sumă de puteri succesive ale lui A , în felul următor:

$$A[p_0 A^{n-1} + p_1 A^{n-2} + \dots + p_{n-1}] = -p_n I_n,$$

de unde $A^{-1} = \frac{1}{p_n} \sum_{i=0}^{n-1} p_i A^{(n-1)-i}$, cu $p_0 = (-1)^n$.

Definiția II.13. Fie λ_j o valoare proprie a operatorului liniar U . Mulțimea $S_j = \{\bar{x} \in X, U(\bar{x}) = \lambda_j \bar{x}\}$ se numește subspațiul propriu asociat valorii proprii λ_j .

Observația II.7. Subspațiul propriu S_j asociat valorii proprii λ_j reprezintă de fapt nucleul operatorului liniar $U - \lambda_j 1_X$ și este deci un subspațiu vectorial al lui X .

Propoziția II.6. Subspațiul propriu S_j asociat valorii proprii λ_j are proprietățile:

- a) S_j este invariant față de U ;
- b) $\dim S_j = n - r_j$, $n = \dim X$, $r_j = \text{rang}(A - \lambda_j I_n)$;
- c) $\dim S_j \leq m_j$, $m_j = \text{ordinul de multiplicitate al valorii proprii } \lambda_j$.

Teorema II.15. Fie λ_j , $j = \overline{1, k}$ valorile proprii ale operatorului liniar $U : X \rightarrow X$, unde $\dim X = n$, și fie m_j ordinul de multiplicitate al valorii proprii λ_j , $j = \overline{1, k}$. Pentru ca U să fie diagonalizabil este necesar și suficient ca $\dim S_j = m_j$, $j = \overline{1, k}$ și $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$. În acest caz există o bază $B \subset X$ față de care matricea operatorului U are forma:

$$S = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \lambda_j & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \lambda_j & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & 0 & & 0 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \lambda_k & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \lambda_k \end{bmatrix}, \quad (****)$$

unde λ_j figurează de m_j ori, $j = \overline{1, k}$.

Observația II.8. În condițiile acestei teoreme, spațiul vectorial X este suma directă a subspațiilor S_j , $j = \overline{1, k}$.

II.7. Probleme rezolvate

1) Fie $U : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definit de formula

$$U(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \bar{x}$$

unde $\bar{x} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Să se determine polinomul caracteristic, valorile și vectorii proprii și apoi să se decidă dacă este sau nu un operator diagonalizabil.

Soluție:

Acest sistem are soluție nebanală dacă și numai dacă $\lambda^2 + 1 = 0$

Ecuția caracteristică fiind $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1-\lambda \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ deducem că valorile proprii ale operatorului U sunt i și $-i$.

În plus $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ sunt vectorii proprii corespunzători valorilor proprii i , respectiv $-i$.

Se observă că matricea operatorului U în raport cu baza $E = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ a spațiului liniar $\mathbf{C}^2$ este diagonală:

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

2) Fie $U: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ operatorul liniar care în baza canonică din $\mathbf{R}^3$ are matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Să se determine valorile și vectorii proprii pentru operatorul U .

Soluție:

Ecuția caracteristică a operatorului liniar U este:

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

și are o singură rădăcină reală (deci o valoare proprie) $\lambda_1 = 2$, iar un vector propriu corespunzător este $\bar{x}_1 = (1, 1, 1)$.

3) Fie $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ matricea operatorului liniar $U: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$ în raport cu baza canonică $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$. Să se arate

că A este diagonalizabilă și să se determine o bază față de care matricea lui U are forma diagonală.

Soluție:

$$P_U(\lambda) = -(\lambda - 4)^2(\lambda + 2)$$

Valorile proprii ale operatorului liniar U sunt $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2$ cu $m_1 = 2$, $m_2 = 1$.

Subspațiul propriu asociat lui $\lambda_1 = 4$ este $S_1 = \text{Ker}(U - 4I)$.

Avem:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} = 0$$

care se reduce la o singură ecuație $\varepsilon_2 - \varepsilon_3 = 0$. Deci:

$$S_1 = \{ \bar{x} \in \mathbf{R}^3 / \bar{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbf{R} \}$$

Subspațiul propriu asociat lui $\lambda_2 = -2$ se reduce la mulțimea soluțiilor sistemului omogen

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = 0 \\ \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0 \end{cases}$$

Deci, $S_2 = \{ \bar{x} \in \mathbf{R}^3 / \bar{x} = (0, \beta, -\beta): \beta \in \mathbf{R} \}$.

Evident, $\dim S_1 = 2$, $\dim S_2 = 1$, deci U este diagonalizabil.

Vom alege în S , baza $B_1 = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2\}$ cu $\bar{a}_1 = (0,1,1)$, $\bar{a}_2 = (1,1,1)$ iar în S_2 baza $B_2 = \{\bar{a}_3\}$ unde $\bar{a}_3 = (0,1,-1)$.

Deoarece $U(\bar{a}_1) = \lambda_1 \bar{a}_1 = 4 \cdot \bar{a}_1$, $U(\bar{a}_2) = 4 \cdot \bar{a}_2$, $U(\bar{a}_3) = -2 \cdot \bar{a}_3$, matricea operatorului liniar U în baza $B = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ este:

$$S = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

4) Fie operatorul $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 + x_3, -x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 - x_2 + 2x_3)$, unde $\bar{x}$ și $f(\bar{x})$ sunt scriși în baza canonică $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ a lui $\mathbf{R}^3$. Să se demonstreze că este liniar. Să se arate că este diagonalizabilă și să se determine o formă diagonală a sa precum și o bază în raport cu care f are această formă.

Soluție:

Demonstrăm că f este operator liniar, adică

$$f(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y}) = \alpha f(\bar{x}) + \beta f(\bar{y}) \quad (\forall) \bar{x}, \bar{y} \in \mathbf{R}^3 \text{ și } (\forall) \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

$$\begin{aligned} f(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y}) &= (2(\alpha x_1 + \beta x_1) + (\alpha x_2 + \beta x_2) + (\alpha x_3 + \beta x_3), -(\alpha x_1 + \beta x_1) + 2(\alpha x_2 + \beta x_2) - (\alpha x_3 + \beta x_3), (\alpha x_1 + \beta x_1) - (\alpha x_2 + \beta x_2) + 2(\alpha x_3 + \beta x_3)) = \\ &= (2\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3, -\alpha x_1 + 2\alpha x_2 - \alpha x_3, \alpha x_1 - \alpha x_2 + 2\alpha x_3) + (2\beta x_1 + \beta x_2 + \beta x_3, -\beta x_1 + 2\beta x_2 - \beta x_3, \beta x_1 - \beta x_2 + 2\beta x_3) = \\ &= \alpha(2x_1 + x_2 + x_3, -x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 - x_2 + 2x_3) + \beta(2x_1 + x_2 + x_3, -x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 - x_2 + 2x_3) = \\ &= \alpha f(\bar{x}) + \beta f(\bar{y}) \end{aligned}$$

Astfel f este un operator liniar al lui $\mathbf{R}^3$.

Întrucât $f(\bar{e}_1) = f(1,0,0) = (2,-1,1)$, $f(\bar{e}_2) = f(0,1,0) = (1,2,-1)$, $f(\bar{e}_3) = f(0,0,1) = (1,-1,2)$, deducem că matricea lui f în raport cu baza B este :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

Determinăm polinomul caracteristic al lui f :

$$P_f(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3).$$

Rezolvăm ecuația caracteristică:

$$(2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1.$$

Deoarece $P_f(\lambda)$ are gradul 3 și 3 valori proprii distincte rezultă că f este diagonalizabil, adică, există o bază în raport cu care matricea atașată are forma:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Baza este formată din vectori proprii corespunzători valorilor proprii 2,3,1.

Procedând ca în exercițiile precedente obținem că

$$\bar{a}_1 = (-1, -1, 1), \bar{a}_2 = (0, -1, 1), \bar{a}_3 = (-1, 0, 1) \text{ sunt vectori proprii corespunzători valorilor proprii } 2, 3, 1.$$

O bază în raport cu care f are matricea diagonală $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ este $B' = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$.

5) Utilizând formula de schimbare a matricei atașate unui operator liniar la schimbarea bazei spațiului vectorial, să se deducă matricea atașată operatorului f din problema precedentă în baza B' .

Soluție:

Se știe că dacă A este matricea atașată operatorului f în baza B și L este matricea de trecere de la baza B la baza B' , atunci matricea atașată lui f în baza B' este dată de relația:

$$D = L^{-1} \cdot AL$$

Astfel, cunoscând $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ pentru a putea aplica formula precedentă avem nevoie de matricea

L , matricea de trecere de la baza B la B' .

$$B' = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\} \text{ cu } \bar{a}_1 = (-1, -1, 1), \bar{a}_2 = (0, -1, 1), \bar{a}_3 = (-1, 0, 1)$$

Deoarece B este baza canonică rezultă

$$[\bar{a}_1]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, [\bar{a}_2]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, [\bar{a}_3]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

și astfel matricea L este:

$$L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicând formula $L^{-1} = \frac{1}{\det L} L^*$, L^* fiind adjuncta lui L , se găsește expresia lui L^{-1}

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Astfel } D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6) Fie V un spațiu tridimensional peste $\mathbf{R}$ și aplicația $f: V \rightarrow V$ definită prin :
 $f(\bar{x}) = (x^1 - 2x^3, x^1 + 3x^2 + 2x^3, -x^1 + x^2 + x^3)$ oricare ar fi $\bar{x} = (x^1, x^2, x^3)$, unde $\bar{x}$ și $f(\bar{x})$ sunt scriși în raport cu $B = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ a lui V . Se cere:

a) Să se arate că $f \in \text{End}(V)$.

b) Să se arate că f este injectivă (deci și surjectivă).

c) Să se scrie matricea lui f în raport cu baza B .

d) Să se scrie matricea lui f în raport cu baza $B' = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3)$ unde

$$\bar{b}_1 = \bar{a}_1 - \bar{a}_2 + \bar{a}_3, \bar{b}_2 = 2\bar{a}_1 + \bar{a}_2 - \bar{a}_3, \bar{b}_3 = \bar{a}_1 + 2\bar{a}_2 - \bar{a}_3.$$

Soluție:

a) Arătăm că

$f(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) = \alpha f(\bar{x}) + \beta f(\bar{y}) = \alpha f(\bar{x}) + \beta f(\bar{y}), \quad (\forall) \bar{x}, \bar{y} \in V \quad \text{și} \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R},$ analog ca la punctul a) de la problema precedentă.

a) Pentru a arăta că f este injectivă calculăm $\text{Ker}f$ și folosim proprietatea f injectivă $\Leftrightarrow \text{Ker}f = \{\bar{0}_V\}$

Evident $\{\bar{0}_V\} \leq \text{Ker}f, \quad \text{Ker}f = \{\bar{x} \in V / f(\bar{x}) = \bar{0}_V\}$

$$\text{Fie } \bar{x} \in \text{Ker}f \Rightarrow f(\bar{x}) = \bar{0}_V \Leftrightarrow \begin{cases} x^1 - 2x^3 = 0 \\ x^1 + 3x^2 + 2x^3 = 0 \\ -x^1 + x^2 + x^3 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0.$$

Deoarece determinantul sistemului este nenul, deducem că el are numai soluția banală $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Astfel, $\text{Ker}f \leq \{\bar{0}_V\}$. Deci f este injectivă.

Observație: $\Delta \neq 0$ implică f surjectivă deoarece indiferent de termenii liberi, sistemul linear admite soluție (unică) dată de regula lui Cramer.

$$\text{c) Întrucât: } [\bar{a}_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [\bar{a}_2]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [\bar{a}_3]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

deducem că : $f(\bar{a}_1) = f(1,0,0) = (1,1,-1), \quad f(\bar{a}_2) = f(0,1,0) = (0,3,1), \quad f(\bar{a}_3) = f(0,0,1) = (-2,2,1)$

Astfel, matricea lui f în baza B este: $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

d) $A_{B'} = L^{-1} \cdot A_B \cdot L$, unde L este matricea de trecere de la baza B la B' , adică $L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$

$$\text{Obținem: } L^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Astfel, găsim:

$$A_{B'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

III. FORME BILINIARE

III.1. Forme biliniare-definiție, exemple

Fie V un spațiu vectorial real.

Definiția III.1. O funcție $b: V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ se numește formă biliniară dacă :

$$a) \quad b(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y}, \bar{z}) = \alpha b(\bar{x}, \bar{z}) + \beta b(\bar{y}, \bar{z}), (\forall) \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V ;$$

$$b) \quad b(\bar{x}, \alpha \bar{y} + \beta \bar{z}) = \alpha b(\bar{x}, \bar{y}) + \beta b(\bar{x}, \bar{z}), (\forall) \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V .$$

Observația III.1. Dacă b este o formă biliniară atunci :

$$1) \quad (\forall) \alpha^1, \dots, \alpha^n \in \mathbf{R}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{y} \in V \Rightarrow b\left(\sum_{i=1}^n \alpha^i \bar{x}_i, \bar{y}\right) = \sum_{i=1}^n \alpha^i b(\bar{x}_i, \bar{y}).$$

$$2) \quad (\forall) \beta^1, \dots, \beta^n \in \mathbf{R}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \bar{x} \in V \Rightarrow b\left(\bar{x}, \sum_{i=1}^n \beta^i \bar{y}_i\right) = \sum_{i=1}^n \beta^i b(\bar{x}, \bar{y}_i).$$

$$3) \quad b(\bar{0}, \bar{y}) = b(\bar{x}, \bar{0}) = 0, (\forall) \bar{x}, \bar{y} \in V .$$

Example:

1. Fie $a, b \in \mathbf{R}, a < b, \underbrace{C([a, b])}_V$ spațiul vectorial real al funcțiilor continue definite pe $[a, b]$ cu valori reale. Atunci,

$$\text{aplicația:} \quad b: V \times V \rightarrow \mathbf{R}, b(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx, \quad (\forall) f, g \in V = C([a, b]), \quad \text{este o formă biliniară.}$$

Într-adevăr proprietatea a) este satisfăcută:

$$\begin{aligned} (\forall) \alpha, \beta \in \mathbf{R}, f, g, h \in C([a, b]) &\Rightarrow b(\alpha f + \beta g, h) = \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))h(x)dx = \\ &= \alpha \int_a^b f(x)h(x)dx + \beta \int_a^b g(x)h(x)dx = \alpha b(f, h) + \beta b(g, h) \end{aligned}$$

Analog se verifică proprietatea b).

III.2. Expresia analitică a unei forme biliniare în raport cu o bază

Fie V un spațiu vectorial real cu $\dim V = n < \infty$, $B = \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$ o bază pentru V și $b: V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ o formă biliniară.

Fie $\bar{x}, \bar{y}$ arbitrari din V .

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x^i \bar{a}_i, \bar{y} = \sum_{j=1}^n y^j \bar{a}_j \in V \Rightarrow b(\bar{x}, \bar{y}) = b\left(\sum_{i=1}^n x^i \bar{a}_i, \sum_{j=1}^n y^j \bar{a}_j\right) =$$

$$\sum_{i=1}^n x^i b\left(\bar{a}_i, \sum_{j=1}^n y^j \bar{a}_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x^i y^j b(\bar{a}_i, \bar{a}_j).$$

$$\text{Deci, } b(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x^i y^j b(\bar{a}_i, \bar{a}_j)$$

Notând cu $a_{ij} = b(\bar{a}_i, \bar{a}_j), i, j = \overline{1, n}$, matricea $A = (a_{ij})_{i, j = \overline{1, n}}$, se numește *matricea formei biliniare b în raport cu baza B* .

Astfel, avem: $b(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x^i y^j$, expresie ce poartă numele de *expresia analitică a formei biliniare b în raport cu*

baza B .

Expresia lui b poate fi scrisă sub forma:

$$b(\bar{x}, \bar{y}) = [\bar{x}]_B^t \cdot A \cdot [\bar{y}]_B$$

Aceasta este *expresia matricială* a formei biliniare b în raport cu baza B .

Exemple:

1. Fie $b: R^3 \times R^3 \rightarrow R$, $b(\bar{x}, \bar{y}) = x^1 y^1 - 2x^1 y^2 + 3x^2 y^3 + 2x^3 y^3$, vectorii fiind scriși în baza canonică a lui R^3 .

Arătăm că b este liniară în primul argument

$$\begin{aligned} b(\alpha\bar{x} + \beta\bar{z}, \bar{y}) &= (\alpha x^1 + \beta z^1) y^1 - 2(\alpha x^1 + \beta z^1) y^2 + 3(\alpha x^2 + \beta z^2) y^3 + 2(\alpha x^3 + \beta z^3) y^3 \\ b(\alpha\bar{x} + \beta\bar{z}, \bar{y}) &= (\alpha x^1) y^1 - 2(\alpha x^1) y^2 + 3(\alpha x^2) y^3 + 2(\alpha x^3) y^3 + \\ &+ (\beta z^1) y^1 - 2(\beta z^1) y^2 + 3(\beta z^2) y^3 + 2(\beta z^3) y^3 = \alpha b(\bar{x}, \bar{y}) + \beta b(\bar{z}, \bar{y}). \end{aligned}$$

Analog se arată că b este liniară și în cel de-al doilea argument.

Calculăm elementele matricei lui b în raport cu baza canonică:

$$a_{11} = b(\bar{e}_1, \bar{e}_1) = 1$$

$$a_{12} = b(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = -2$$

$$a_{13} = b(\bar{e}_1, \bar{e}_3) = 0$$

$$a_{21} = b(\bar{e}_2, \bar{e}_1) = 0$$

$$a_{22} = b(\bar{e}_2, \bar{e}_2) = 0$$

$$a_{23} = b(\bar{e}_2, \bar{e}_3) = 3$$

$$a_{31} = b(\bar{e}_3, \bar{e}_1) = 0$$

$$a_{32} = b(\bar{e}_3, \bar{e}_2) = 0$$

$$a_{33} = b(\bar{e}_3, \bar{e}_3) = 2$$

Astfel, matricea sa în raport cu baza canonică este :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Să notăm cu $R_2[X]$ spațiul vectorial al funcțiilor polinomiale cu coeficienți reali de grad cel mult 2. Fie

$$b: R_2[x] \times R_2[x] \rightarrow R, \quad b(f, g) = \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx.$$

Vom scrie matricea lui b în raport cu baza $B = \{1, x, x^2\}$.

Elementele matricei sunt:

$$a_{11} = b(1, 1) = \int_{-1}^1 dx = x|_{-1}^1 = 2$$

$$a_{12} = b(1, x) = \int_{-1}^1 x dx = 0 = a_{21}$$

$$a_{13} = b(1, x^2) = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3} = a_{31}$$

$$a_{22} = b(x, x) = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$a_{23} = b(x, x^2) = \int_{-1}^1 x^3 dx = 0 = a_{32}$$

$$a_{33} = b(x^2, x^2) = \int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{2}{5}.$$

Astfel, matricea lui b în raport cu baza B este:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}$$

III.3. Schimbarea matricei unei forme biliniare la schimbarea bazei

Fie $B_1 = \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$ și $B_2 = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_n\}$ două baze ale lui V . Fie $C = (c_i^j)$ matricerea de trecere de la B_1 la B_2 , $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ matricea lui b în baza B_1 iar B matricea lui b în raport cu B_2 .

$$B = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}, \quad b_{ij} = b(\bar{b}_i, \bar{b}_j).$$

Avem:

$$b_{ij} = b(\bar{b}_i, \bar{b}_j) = b\left(\sum_{k=1}^n c_i^k \bar{a}_k, \sum_{s=1}^n c_j^s \bar{a}_s\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n c_i^k c_j^s b(\bar{a}_k, \bar{a}_s) = \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n c_i^k c_j^s a_{ks}, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Obținem că:

$$B = C^t A C.$$

Observația III. 2. Ținând seama de formula de schimbarea a matricei unei forme biliniare când se schimbă baza ($B = C^t A C$), deducem că rangul matricei unei forme biliniare este invariant la schimbarea bazei.

Definiția III.2. Rangul matricei unei forme biliniare în raport cu o bază oarecare a lui V se numește rangul forme biliniare b , sau simplu rangul lui b .

Definiția III.3. Fie V spațiu vectorial real și $b: V \times V \rightarrow \mathbf{R}$. Spunem că b este formă biliniară simetrică dacă:

$$b(\bar{x}, \bar{y}) = b(\bar{y}, \bar{x}), (\forall) \bar{y}, \bar{x} \in V.$$

Exemple:

1. Forma biliniară $b: \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin :

$$b(\bar{x}, \bar{y}) = 2x^1 y^1 - 3x^2 y^2 + 4x^1 y^2 + 4x^2 y^1, (\forall) \bar{x} = (x^1, x^2), \bar{y} = (y^1, y^2) \in \mathbf{R}^2,$$

este simetrică.

Forma biliniară $b: \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin :

$$b(\bar{x}, \bar{y}) = 2x^1 y^1 - x^2 y^2 + x^1 y^2 + 4x^2 y^1, (\forall) \bar{x} = (x^1, x^2), \bar{y} = (y^1, y^2) \in \mathbf{R}^2,$$

nu este simetrică.

Propoziția III.1. Fie V un spațiu vectorial real de dimensiune finită, $\dim V = n < \infty$, $B = \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$ o bază pentru V și $b: V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ o formă biliniară a cărei matrice în raport cu baza B este $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$. Atunci b este o formă biliniară simetrică dacă și numai dacă A este o matrice simetrică ($A^t = A$)

Justificarea este imediată căci dacă b este simetrică avem:

$$b(\bar{x}, \bar{y}) = b(\bar{y}, \bar{x}), (\forall) \bar{y}, \bar{x} \in V.$$

$$\text{Pentru } \bar{x} = \bar{a}_i, \bar{y} = \bar{a}_j \Rightarrow b(\bar{a}_i, \bar{a}_j) = b(\bar{a}_j, \bar{a}_i) \Rightarrow a_{ij} = a_{ji}, (\forall) i, j = \overline{1, n} \Rightarrow$$

A este simetrică.

Reciproc, dacă A este simetrică avem:

$$b(\bar{x}, \bar{y}) = [\bar{x}]_B^t A [\bar{y}]_B = \left([\bar{x}]_B^t A [\bar{y}]_B \right)^t = [\bar{y}]_B^t A^t [\bar{x}]_B = [\bar{y}]_B^t A [\bar{x}]_B = b(\bar{y}, \bar{x}), \text{ adică } b \text{ este simetrică.}$$

III.4. Forme pătratice

Fie V un spațiu vectorial real și $b: V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ o formă biliniară simetrică.

Definiția III.4. Aplicația $f: V \rightarrow \mathbf{R}$, $f(\bar{x}) = b(\bar{x}, \bar{x}), (\forall) \bar{x} \in V$ se numește forma pătratică asociată formei biliniare b .

Definiția III.5. Forma biliniară simetrică b poartă numele de polara formei pătratice f .

Definiția III.6. O formă biliniară $b: V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ se numește :

- a) pozitiv definită dacă $b(\bar{x}, \bar{x}) > 0, (\forall) \bar{x} \in V, \bar{x} \neq \bar{0}$;
- b) pozitiv semidefinită sau nenegativă dacă $b(\bar{x}, \bar{x}) \geq 0, (\forall) \bar{x} \in V$;
- c) negativ definită dacă $b(\bar{x}, \bar{x}) < 0, (\forall) \bar{x} \in V, \bar{x} \neq \bar{0}$;
- d) negativ semidefinită sau nepozitivă dacă $b(\bar{x}, \bar{x}) \leq 0, (\forall) \bar{x} \in V$;
- e) nedefinită dacă $(\exists) \bar{x}, \bar{y} \in V$ astfel încât $b(\bar{x}, \bar{x}) > 0$ și $b(\bar{y}, \bar{y}) < 0$.

Considerăm V finit dimensional, $\dim V = n < \infty, B = \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$, o bază a lui V și $A = (a_{ij})_{i, j = \overline{1, n}}$ matricea lui b în baza B . Atunci

$$(\forall) \bar{x} = \sum_{i=1}^n x^i \bar{a}_i \in V \Rightarrow \underbrace{f(\bar{x})}_{b(\bar{x}, \bar{x})} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x^i y^j$$

Egalitatea:

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x^i y^j,$$

reprezintă expresia analitică a formei pătratice f în raport cu baza B .

Matricea A se numește matricea formei pătratice f în raport cu baza B .

Egalitatea $f(\bar{x}) = [\bar{x}]_B^t A [\bar{x}]_B$ poartă denumirea de expresia analitică a formei pătratice f în scriere matricială.

Definiția III.7. Numim rang al formei pătratice f rangul formei biliniare din care ea provine:

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(b) = \text{rg}(A).$$

Observația III.3. Putem scrie expresia analitică a formei pătratice f astfel:

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} (x^i)^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x^i x^j.$$

Exemple:

1. Fie $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ o formă pătratică a cărei expresie analitică în raport cu baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$ este:

$$f(\bar{x}) = 2(x^1)^2 - 5x^1x^2 + \sqrt{2}x^1x^3 + 3x^2x^3 + (x^3)^2, (\forall) \bar{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3$$

Matricea lui f în raport cu baza canonică este:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5/2 & \sqrt{2}/2 \\ -5/2 & 0 & 3/2 \\ \sqrt{2}/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Fie forma pătratică $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^1x^2 + x^1x^3 + x^2x^3 + (x^3)^2$ unde $\bar{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3$.

Matricea asociată lui f în raport cu baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$ este :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observația III.4. Dacă se cunoaște forma pătratică f putem determina forma biliniară din care provine utilizând formula:

$$b(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2} [f(\bar{x} + \bar{y}) - f(\bar{x}) - f(\bar{y})], (\forall) \bar{x}, \bar{y} \in V.$$

Exemple:

1. Pentru forma pătratică dată în exemplul anterior, $f(\bar{x}) = x^1x^2 + x^1x^3 + x^2x^3 + (x^3)^2$, avem:

$$\begin{aligned} f(\bar{x} + \bar{y}) &= (x^1 + y^1)(x^2 + y^2) + (x^1 + y^1)(x^3 + y^3) + (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) + (x^3 + y^3)^2 = \\ &= x^1x^2 + x^1y^2 + x^2y^1 + y^1y^2 + x^1x^3 + x^1y^3 + x^3y^1 + y^1y^3 + x^2x^3 + x^2y^3 + x^3y^2 + y^2y^3 + (x^3)^2 + 2x^3y^3 + (y^3)^2 \end{aligned}$$

și de aici, continuând calculele găsim: $b(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2} (x^1y^2 + x^1y^3 + x^2y^1 + x^2y^3 + x^3y^1 + x^3y^2 + 2x^3y^3).$

Putem obține expresia analitică a lui b și altfel, și anume folosind faptul că matricea asociată ei în raport cu baza canonică este identică cu matricea atașată lui f , adică cu A :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Obținem: } b(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y^1 & y^2 & y^3 \end{pmatrix}^t.$$

$$b(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2} (x^1y^2 + x^1y^3 + x^2y^1 + x^2y^3 + x^3y^1 + x^3y^2 + 2x^3y^3).$$

III.5. Aducerea unei forme pătratice la o formă canonică

Fie V un spațiu vectorial real cu $\dim V = n < \infty$, $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$ o baza a lui V și $f: V \rightarrow \mathbf{R}$ o formă pătratică.

Spunem că forma pătratică a lui f are în raport cu baza B o expresie canonică, dacă

$$(\exists) \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R} \text{ astfel încât } f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x^i)^2, (\forall) \bar{x} = \sum_{i=1}^n x^i \bar{u}_i \in V.$$

Matricea lui f în raport cu o astfel de bază este în mod evident o matrice diagonală:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Astfel, $rg(f)=r$, unde r reprezintă numărul coeficienților nenuli dintr-o formă canonică a sa. Rangul unei forme pătratice este invariant la schimbarea bazei căci el este egal cu rangul polare sale, care este invariant la schimbarea bazei.

Cele mai cunoscute metode de aducere a unei forme pătratice la o formă canonică sunt: *metoda lui Gauss* și *metoda lui Jacobi*.

Metoda lui GAUSS

Teorema III.1. Fie V un spațiu vectorial real de dimensiune finită, $\dim V=n<\infty$, $f:V\rightarrow\mathbf{R}$ o formă pătratică și $B = \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$ o bază a lui V , în raport cu care f are expresia analitică:

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} (x^i)^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_{ij} x^i x^j$$

Atunci $(\exists) B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$, bază a lui V în raport cu care f are forma canonică:

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x^i)^2, (\forall) \bar{x} = \sum_{i=1}^n x^i \bar{a}_i.$$

Demonstrație (procedeul descris poartă numele de metoda lui GAUSS)

$$\text{Dacă } f(\bar{x}) = 0, (\forall) \bar{x} \in V, \text{ atunci } f(\bar{x}) = 0(x^1)^2 + \dots + 0(x^n)^2, (\forall) \bar{x} = \sum_{i=1}^n x^i \bar{a}_i.$$

Presupunem că f nu este forma nulă.

Dacă $a_{ii} = 0, (\forall) i = \overline{1, n}$, întrucât f nu este forma pătratică nulă, $(\exists) i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j, a_{ij} \neq 0$. Fără a micșora generalitatea putem considera că $a_{12} \neq 0$. În acest caz dacă facem următoarea schimbare de coordonate:

$$x^1 = t^1 + t^2$$

$$x^2 = t^1 - t^2$$

$$x^3 = t^3$$

$$\vdots$$

$$x^n = t^n$$

ajungem la cazul în care găsim cel puțin un pătrat în noua expresie, deoarece în raport cu noile coordonate expresia analitică a formei pătratice este

$$f(x) = 2a_{12} \underbrace{(t^1 + t^2)(t^1 - t^2)}_{(t^1)^2 - (t^2)^2} + \dots = \underbrace{\alpha_{11}}_{2a_{12}} (t^1)^2 + \underbrace{\alpha_{22}}_{-2a_{12}} (t^2)^2 + \dots$$

Considerăm $a_{11} \neq 0$. Atunci, avem:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= a_{11} (x_1^1)^2 + 2a_{12} x^1 x^2 + \dots + 2a_{1n} x^1 x^n + \underbrace{g(\bar{x})}_{\text{nu conține } x^1} = \\ &= a_{11} \left[(x^1)^2 + 2 \frac{a_{12}}{a_{11}} x^1 x^2 + \dots + 2 \frac{a_{1n}}{a_{11}} x^1 x^n \right] + g(\bar{x}) = \\ &= a_{11} \left[\left(x^1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x^2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x^n \right)^2 - \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} x^2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x^n \right)^2 \right] + g(\bar{x}) \end{aligned}$$

$$= a_{11} \left(x^1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x^2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x^n \right)^2 + \underbrace{\tilde{g}(\bar{x})}_{\text{nu contine } x^1}$$

Facem următoarea schimbare de coordonate:

$$y^1 = x^1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x^2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x^n$$

$$y^2 = x^2$$

$$\vdots$$

$$y^n = x^n$$

În raport cu noile variabile $y^1, \dots, y^n$ (deci în raport cu o nouă bază) expresia analitică a lui f este:

$$f(\bar{x}) = a_{11} (y^1)^2 + \underbrace{\tilde{g}(\bar{y})}_{\text{nu contine pe } y^1}$$

Se reia raționamentul pentru termenul $\tilde{g}(\bar{y})$. Astfel, după un număr finit de pași se obține expresia canonică a lui f .

Observația III.4. Forma canonică a unei forme biliniare nu este unică.

Afirmația de mai sus se poate justifica pe un exemplu concret considerând diverși coeficienți nenuli cu care începem procedeul descris anterior.

Exemple:

1. Fie $f: R^3 \rightarrow R, f(\bar{x}) = x^1 x^2 - 3x^1 x^3 + 2x^2 x^3, (\forall) \bar{x} = (x^1, x^2, x^3) \in R^3$, scrisă în raport cu baza canonică $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. Folosind metoda lui Gauss să se aducă f la o formă canonică.

Abordarea I. Considerăm drept coeficient nenul de start coeficientul termenului $x^2 x^3$, adică 2.

Atunci facem schimbarea de coordonate:

$$x^1 = t^1$$

$$x^2 = t^2 + t^3$$

$$x^3 = t^2 - t^3$$

În raport cu variabilele t^1, t^2, t^3 , avem:

$$\begin{aligned} f(x) &= t^1(t^2 + t^3) - 3t^1(t^2 - t^3) + 2\left((t^2)^2 - (t^3)^2\right) = t^1 t^2 + t^1 t^3 - 3t^1 t^2 + 3t^1 t^3 + 2(t^2)^2 - 2(t^3)^2 = \\ &= 2(t^2)^2 - 2(t^3)^2 - 2t^1 t^2 + 4t^1 t^3 = 2(t^2)^2 - 2t^1 t^2 + 4t^1 t^3 - 2(t^3)^2 \\ &= 2\left[(t^2)^2 - 2\frac{t^1}{2}t^2 + \left(\frac{t^1}{2}\right)^2 - \left(\frac{t^1}{2}\right)^2\right] + 4t^1 t^3 - 2(t^3)^2 \\ &= 2\left(t^2 - \frac{t^1}{2}\right)^2 - \frac{(t^1)^2}{2} + 4t^1 t^3 - 2(t^3)^2. \end{aligned}$$

Trecând la noile variabile:

$$\begin{cases} z^1 = t^1 \\ z^2 = t^2 - \frac{t^1}{2} \\ z^3 = t^3 \end{cases}$$

$$\text{obținem : } f(x) = 2(z^2)^2 - \frac{(z^1)^2}{2} + 4z^1 z^3 - 2(z^3)^2 =$$

$$= 2(z^2)^2 - 2\left[(z^3)^2 - 2z^1 z^3\right] - \frac{(z^1)^2}{2} = 2(z^2)^2 - 2(z^3 - z^1)^2 + 3\frac{(z^1)^2}{2}.$$

Notăm:

$$\begin{cases} u^1 = z^1 \\ u^2 = z^2 \\ u^3 = z^3 - z^1 \end{cases}$$

În raport cu u^1, u^2, u^3 avem: $f(\bar{x}) = 2(u^2)^2 - 2(u^3)^2 + \frac{3}{2}(u^1)^2$.

Abordarea II. Considerăm drept coeficient nenul de start coeficientul termenului $x^1 x^2$, adică 1.

$$f: R^3 \rightarrow R, f(\bar{x}) = x^1 x^2 - 3x^1 x^3 + 2x^2 x^3, (\forall) \bar{x} = (x^1, x^2, x^3) \in R^3$$

Atunci facem schimbarea de coordonate:

$$x^1 = t^1 - t^2$$

$$x^2 = t^1 + t^2$$

$$x^3 = t^3$$

În raport cu variabilele t^1, t^2, t^3 , avem:

$$\begin{aligned} f(x) &= (t^1 - t^2)(t^1 + t^2) - 3(t^1 - t^2)t^3 + 2(t^1 + t^2)t^3 = (t^1)^2 - (t^2)^2 - t^1 t^3 + 5t^2 t^3 \\ &= \left(t^1 - \frac{t^3}{2}\right)^2 - \frac{(t^3)^2}{4} + 5t^2 t^3 - (t^2)^2 = \left(t^1 - \frac{t^3}{2}\right)^2 - \left((t^2)^2 - 5t^2 t^3\right) - \frac{(t^3)^2}{4} = \\ &= \left(t^1 - \frac{t^3}{2}\right)^2 - \left((t^2)^2 - 2t^2 \frac{5t^3}{2}\right) - \frac{(t^3)^2}{4} = \left(t^1 - \frac{t^3}{2}\right)^2 - \left(t^2 - \frac{5t^3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}(t^3)^2 - \frac{(t^3)^2}{4} = \\ &= \left(t^1 - \frac{t^3}{2}\right)^2 - \left(t^2 - \frac{5t^3}{2}\right)^2 - \frac{13}{2}(t^3)^2 \end{aligned}$$

Efectuăm următoarea schimbare de variabile:

$$\begin{cases} z^1 = t^1 - \frac{t^3}{2} \\ z^2 = t^2 - 5\frac{t^3}{2} \\ z^3 = t^3 \end{cases}$$

$$\text{Obținem: } f(x) = (z^1)^2 - (z^2)^2 - \frac{13}{2}(z^3)^2$$

În raport cu z^1, z^2, z^3 avem astfel o altă formă canonică pentru f diferită de cea din cazul precedent.

Metoda lui JACOBI

Teorema III.2. Fie V un spațiu vectorial real de dimensiune finită, $\dim V = n < \infty$, $f: V \rightarrow R$ o formă patratică a cărei

expresie analitică în raport cu baza $B = \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$, este $f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x^i x^j$, $(\forall) \bar{x} = \sum_{i=1}^n x^i \bar{a}_i$.

Dacă toți minorii principali ai matricei :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

sunt nenuli, adică

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= |a_{11}| = a_{11} \neq 0 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \\ &\vdots \\ \Delta_i &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & & \\ a_{1i} & a_{2i} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \det A \neq 0\end{aligned}$$

atunci $(\exists) B' = \{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n\}$ în raport cu care:

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} (y^i)^2, (\forall) \bar{x} = \sum_{i=1}^n y^i \bar{b}_i, \Delta_0 = 1.$$

Vectorii $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n$ se construiesc ca în cele ce urmează.

Fie b polara lui f . Alegem: $\bar{b}_1 = \alpha_1^1 \bar{a}_1$ și determinăm scalarul real α_1^1 din condiția: $b(\bar{b}_1, \bar{a}_1) = 1$.

Propunem $\bar{b}_i = \alpha_i^1 \bar{a}_1 + \alpha_i^2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_i^i \bar{a}_i$, $i = \overline{2, n}$ și determinăm scalarii $\alpha_i^1, \alpha_i^2, \dots, \alpha_i^i$ din condițiile:

$$\begin{cases} b(\bar{b}_i, \bar{a}_1) = 0 \\ \vdots \\ b(\bar{b}_i, \bar{a}_{i-1}) = 0 \\ b(\bar{b}_i, \bar{a}_i) = 1. \end{cases}$$

Exemple:

1. Fie $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$, $f(\bar{x}) = (x^1)^2 - 2x^1x^2 + (2x^2)^2 + 3(x^3)^2$, în raport cu baza canonică $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ a lui $\mathbf{R}^3$. Vom stabili dacă se poate aplica metoda lui Jacobi și dacă da, vom determina expresia canonică a lui f și baza lui $\mathbf{R}^3$ în raport cu care f are forma canonică găsită.

Matricea atașată lui f în raport cu baza canonică este:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Astfel avem:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= |1| = 1 \neq 0 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0\end{aligned}$$

Deci metoda lui Jacobi se poate aplica, adică $(\exists) B' = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3\}$ bază a lui V^3 în raport cu care

$$\begin{aligned}f(\bar{x}) &= \frac{\Delta_0}{\Delta_1} (y^1)^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} (y^2)^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} (y^3)^2 = \frac{1}{1} (y^1)^2 + \frac{1}{1} (y^2)^2 + \frac{1}{3} (y^3)^2 = \\ &= (y^1)^2 + (y^2)^2 + \frac{1}{3} (y^3)^2, (\forall) \bar{x} = y^1 \bar{b}_1 + y^2 \bar{b}_2 + y^3 \bar{b}_3.\end{aligned}$$

Construim vectorii $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$.

$$\begin{aligned}
\bar{b}_1 &= \alpha_1^1 \bar{e}_1 \text{ astfel ca } b(\bar{b}_1, \bar{e}_1) = 1 \Leftrightarrow \\
b(\alpha_1^1 \bar{e}_1, \bar{e}_1) &= 1 \Leftrightarrow \alpha_1^1 b(\bar{e}_1, \bar{e}_1) = 1 \Rightarrow \alpha_1^1 = 1 \Rightarrow \bar{b}_1 = \bar{e}_1; \\
b_2 &= \alpha_2^1 \bar{e}_1 + \alpha_2^2 \bar{e}_2 \text{ astfel ca} \\
\begin{cases} b(\bar{b}_2, \bar{e}_1) = 0 \\ b(\bar{b}_2, \bar{e}_2) = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} b(\alpha_2^1 \bar{e}_1 + \alpha_2^2 \bar{e}_2, \bar{e}_1) = 0 \\ b(\alpha_2^1 \bar{e}_1 + \alpha_2^2 \bar{e}_2, \bar{e}_2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2^1 b(\bar{e}_1, \bar{e}_1) + \alpha_2^2 b(\bar{e}_2, \bar{e}_1) = 0 \\ \alpha_2^1 b(\bar{e}_1, \bar{e}_2) + \alpha_2^2 b(\bar{e}_2, \bar{e}_2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2^1 - \alpha_2^2 = 0 \\ -\alpha_2^1 - 2\alpha_2^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\begin{cases} \alpha_2^2 = 1 \\ \alpha_2^1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{b}_1 = \bar{e}_1 \\ \bar{b}_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Fie $\bar{b}_3 = \alpha_3^1 \bar{e}_1 + \alpha_3^2 \bar{e}_2 + \alpha_3^3 \bar{e}_3$ astfel că:

$$\begin{cases} b(\bar{b}_3, \bar{e}_1) = 0 \\ b(\bar{b}_3, \bar{e}_2) = 0 \\ b(\bar{b}_3, \bar{e}_3) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_3^1 - \alpha_3^2 = 0 \\ -\alpha_3^1 + 2\alpha_3^2 = 0 \\ 3\alpha_3^3 = 1 \end{cases}$$

$$\alpha_3^1 = 0, \alpha_3^2 = 0, \alpha_3^3 = \frac{1}{3} \Rightarrow \bar{b}_3 = \frac{1}{3} \bar{e}_3.$$

Teorema III.3. (Legea inerției a lui Sylvester). Numărul coeficienților nenuli, precum și numărul coeficienților pozitivi într-o formă canonică a unei forme pătratice nu depinde de baza în care este obținută acea formă canonică.

Definiția III.8. Numărul p din (*) se numește indicele pozitiv de inerție al lui f , iar q se numește indicele negativ de inerție al lui f .

Definiția III.9. Forma pătratică reală $f(\bar{x}) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} x^i x^j$ se numește pozitiv definită dacă pentru orice

$$\bar{x} \in V, f(\bar{x}) \geq 0, f(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}.$$

Teorema III.4. Forma pătratică reală $f(\bar{x}) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} x^i x^j$ este pozitiv definită dacă și numai dacă toți

determinanții $\Delta_p, p = \overline{1, n}$, unde

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{p1} & \dots & \alpha_{pp} \end{vmatrix}$$

sunt strict pozitivi.

III.7. Probleme rezolvate

1) Să se aducă la forma canonică forma pătratică (nou) $f: R^3 \rightarrow R$,

$$f(\bar{x}) = x_1^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 - x_2x_3.$$

Soluție:

$$\text{Avem } f(\bar{x}) = (x_1 + 2x_2)^2 - 4x_2^2 - x_2x_3 - 4x_3^2,$$

$$\begin{aligned}
&= (x_1 + 2x_2)^2 - 4\left(x_2^2 + \frac{1}{4}x_2x_3 + x_3^2\right) = \\
&= (x_1 + 2x_2)^2 - 4\left(x_2^2 + 2\frac{1}{8}x_2x_3 + \frac{1}{64}x_3^2 - \frac{1}{64}x_3^2 + x_3^2\right) = \\
&= (x_1 + 2x_2)^2 - 4\left(x_2 + \frac{1}{8}x_3\right)^2 - \frac{63}{16}x_3^2
\end{aligned}$$

Facem schimbarea de coordonate :

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + \frac{1}{4}x_2 \\ y_2 = x_2 + \frac{1}{8}x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

și obținem : $f(\bar{x}) = y_1^2 - 4y_2^2 - \frac{63}{16}y_3^2$, (y_1, y_2, y_3) fiind coordonatele lui $\bar{x}$ în noua bază.

2) Să se aducă la forma canonică forma pătratică $f : R^3 \rightarrow R$,

$$f(\bar{x}) = x_1^2 - 2x_3^2 + x_2^2 + 6x_1x_2 - 5x_1x_3.$$

Soluție:

$$\begin{aligned}
\text{Avem } f(\bar{x}) &= (3x_1 + x_2)^2 - 2x_3^2 - 5x_1x_3 = (3x_1 + x_2)^2 - 2\left(x_3^2 + \frac{5}{2}x_1x_3\right) = \\
&= (3x_1 + x_2)^2 - 2\left(x_3^2 + 2\frac{5}{4}x_1x_3 + \frac{25}{16}x_1^2 - \frac{25}{16}x_1^2\right) = \\
&= (3x_1 + x_2)^2 - 2\left(x_3 + \frac{5}{4}x_1\right)^2 + \frac{25}{8}x_1^2
\end{aligned}$$

Facem schimbarea de coordonate :

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 + 3x_1 \\ y_3 = x_3 + \frac{5}{4}x_1 \end{cases}$$

și obținem : $f(\bar{x}) = \frac{25}{8}y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2$.

2) Fie forma pătratică $f(\bar{x}) = 4x_1^2 + 4x_3^2 + x_1x_2 - x_2x_3$. Să se aducă la o formă canonică folosind metoda Gaus. Să se aplice metoda Jacobi, dacă este posibil, pentru a obține o formă canonică a ei, și baza în raport cu care are această formă. Să se verifice apoi rezultatul teoremei lui Sylvester.

Soluție:

$$f(\bar{x}) = 4x_1^2 + 4x_3^2 + x_1x_2 - x_2x_3 =$$

$$\begin{aligned}
&= 4\left(x_1^2 + \frac{1}{4}x_1x_2\right) + 4x_3^2 - x_2x_3 = 4\left(x_1^2 + 2x_1\frac{1}{8}x_2 + \frac{1}{64}x_2^2 - \frac{1}{64}x_2^2\right) + 4x_3^2 - x_2x_3 \\
&= 4\left(x_1 + \frac{1}{8}x_2\right)^2 - \frac{1}{16}x_2^2 + 4x_3^2 - x_2x_3 = 4\left(x_1 + \frac{1}{8}x_2\right)^2 + 4\left(x_3^2 - \frac{1}{4}x_2x_3\right) - \frac{1}{16}x_2^2 = \\
&= 4\left(x_1 + \frac{1}{8}x_2\right)^2 + 4\left(x_3^2 - 2\frac{1}{8}x_2x_3 + \frac{1}{64}x_2^2 - \frac{1}{64}x_2^2\right) - \frac{1}{16}x_2^2 = \\
&= 4\left(x_1 + \frac{1}{8}x_2\right)^2 + 4\left(x_3 - \frac{1}{8}x_2\right)^2 - \frac{1}{8}x_2^2
\end{aligned}$$

Facem schimbarea de coordonate :

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \frac{1}{8}x_2 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 - \frac{1}{8}x_2 \end{cases}$$

și obținem : $f(\bar{x}) = 4y_1^2 - \frac{1}{8}y_2^2 + 4y_3^2$.

Astfel există trei coeficienți nenuli dintre care doi pozitivi și unul negativ.

Matricea corespunzătoare ei în raport cu baza în care sunt precizate coordonatele vectorilor este :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 4 \end{pmatrix}$$

Avem $\Delta_0 = 1, \Delta_1 = 4, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}, \Delta_3 = \det A = -2$

Atunci o formă canonică a lui f este :

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{4}\omega_1^2 - 16\omega_2^2 + \frac{1}{8}\omega_3^2.$$

Se observă că numărul coeficienților pozitivi este doi, iar al celor negativi este unu, deci se verifică rezultatul teoremei lui Sylvester.

Pentru a determina baza $B' = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$ în care f are forma canonică anterioară procedăm astfel:

- determinăm $\bar{f}_1$ considerând $\bar{f}_1 = \alpha_1^1 \bar{e}_1$ și $b(\bar{f}_1, \bar{e}_1) = 1$, unde b reprezintă polara lui f Obținem : $4\alpha_1^1 = 1 \Rightarrow \alpha_1^1 = \frac{1}{4}$,

$$\bar{f}_1 = \frac{1}{4}\bar{e}_1$$

- determinăm $\bar{f}_2$ luând $\bar{f}_2 = \alpha_2^1 \bar{e}_1 + \alpha_2^2 \bar{e}_2$ și $\begin{cases} b(\bar{f}_2, \bar{e}_1) = 0 \\ b(\bar{f}_2, \bar{e}_2) = 1 \end{cases}$

Obținem :

$$\begin{cases} 4\alpha_2^1 + \frac{1}{2}\alpha_2^2 = 0 \\ \frac{1}{2}\alpha_2^1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2^1 = 2 \\ \alpha_2^2 = -16 \end{cases} \Rightarrow \bar{f}_2 = 2\bar{e}_1 - 16\bar{e}_2$$

-pentru a-l determina pe $\bar{f}_3$ alegem $\bar{f}_3 = \alpha_3^1 \bar{e}_1 + \alpha_3^2 \bar{e}_2 + \alpha_3^3 \bar{e}_3$ și impunem condițiile $\begin{cases} b(\bar{f}_3, \bar{e}_1) = 0 \\ b(\bar{f}_3, \bar{e}_2) = 0 \\ b(\bar{f}_3, \bar{e}_3) = 1 \end{cases}$

Obținem:

$$\begin{cases} 4\alpha_3^1 + \frac{1}{2}\alpha_3^2 = 0 \\ \frac{1}{2}\alpha_3^1 - \frac{1}{2}\alpha_3^3 = 0 \\ -\frac{1}{2}\alpha_3^2 + 4\alpha_3^3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_3^1 = \frac{1}{16} \\ \alpha_3^2 = -\frac{1}{2} \\ \alpha_3^3 = \frac{1}{32} \end{cases} \Rightarrow \bar{f}_3 = \frac{1}{16}\bar{e}_1 - \frac{1}{2}\bar{e}_2 + \frac{1}{16}\bar{e}_3.$$

3) Să se aducă la forma canonică următoarea formă pătratică:

$$f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R} \quad f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 3x_1x_3 + x_2x_3.$$

Soluție:

Vom aplica metoda lui Gauss (metoda Jacobi nu se poate aplica deoarece $\Delta_1 = 0$). Deoarece nu avem variabile la pătrat în expresia lui f facem mai întâi schimbarea de coordonate:

$$\begin{cases} x^1 = y^1 - y^2 \\ x^2 = y^1 + y^2 \\ x^3 = y^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^1 = \frac{x^1 + x^2}{2} \\ y^2 = \frac{x^2 - x^1}{2} \\ y^3 = x^3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= 2(y^1 - y^2)(y^1 + y^2) - 3(y^1 - y^2)y^3 + (y^1 + y^2)y^3 = \\ &= 2(y^1)^2 - 2(y^2)^2 - 3y^1y^3 + 3y^2y^3 + y^1y^3 + y^2y^3 = \\ &= 2(y^1)^2 - 2(y^2)^2 - 2y^1y^3 + 4y^2y^3 \end{aligned}$$

și se obține o formă pătratică pentru care $a_{11} \neq 0$.

Continuând procedeul dat de metoda lui Gauss obținem succesiv:

$$\begin{aligned} &2\left((y^1)^2 - y^1y^3\right) - 2(y^2)^2 + 4y^2y^3 = \\ &= 2\left((y^1)^2 - 2y^1\frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{4}(y^3)^2 - \frac{1}{4}(y^3)^2\right) - 2(y^2)^2 + 4y^2y^3 = \\ &= 2\left(y^1 - \frac{1}{2}y^3\right)^2 - \frac{1}{2}(y^3)^2 - 2(y^2)^2 + 4y^2y^3 = \\ &= 2\left(y^1 - \frac{1}{2}y^3\right)^2 - 2\left((y^2)^2 - 2y^2y^3 + (y^3)^2 - (y^3)^2\right) - \frac{1}{2}(y^3)^2 = \\ &= 2\left(y^1 - \frac{1}{2}y^3\right)^2 - 2(y^2 - y^3)^2 + 2(y^3)^2 - \frac{1}{2}(y^3)^2 = \\ &= 2\left(y^1 - \frac{1}{2}y^3\right)^2 - 2(y^2 - y^3)^2 + \frac{3}{2}(y^3)^2. \end{aligned}$$

Făcând schimbarea de coordonate :

$$\begin{cases} z^1 = y^1 - \frac{1}{2}y^3 \\ z^2 = y^2 - y^3 \\ z^3 = y^3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 2(z^1)^2 - 2(z^2)^2 + \frac{3}{2}(z^3)^2.$$

IV. SPAȚII EUCLIDIENE

IV.1. Spații euclidiene. Inegalitatea Cauchy-Schwarz

Fie E un spațiu vectorial peste corpul numerelor reale $\mathbf{R}$.

Definiția IV.1. Aplicația $\langle, \rangle : E \times E \rightarrow \mathbf{R}$ se numește produs scalar dacă:

1. $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle$, $(\forall) \bar{x}, \bar{y} \in E$; (proprietate de simetrie);
2. $\langle \lambda \bar{x}, \bar{y} \rangle = \lambda \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$, $(\forall) \lambda \in \mathbf{R}, (\forall) \bar{x}, \bar{y} \in E$; (proprietatea de omogenitate în primul argument);
3. $\langle \bar{x} + \bar{y}, \bar{z} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{z} \rangle$, $(\forall) \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in E$; (proprietatea de aditivitate în primul argument);
4. $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \geq 0$, $(\forall) \bar{x} \in E$ și $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$ (produsul scalar este pozitiv definit).

Definiția IV.2. Un spațiu vectorial real pe care s-a definit un produs scalar se numește spațiu euclidian.

Observația IV.1. Într-un spațiu euclidian au loc relațiile:

- i) $\langle \bar{x}, \bar{y}_1 + \bar{y}_2 \rangle = \langle \bar{x}, \bar{y}_1 \rangle + \langle \bar{x}, \bar{y}_2 \rangle$
- ii) $\langle \bar{x}, \lambda \bar{y} \rangle = \lambda \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$, $(\forall) \lambda \in \mathbf{R}, (\forall) \bar{x}, \bar{y} \in E$.

Astfel produsul scalar este aditiv și omogen și în al doilea argument.

Observația IV.2. Produsul scalar definit pe un spațiu vectorial real este o formă biliniară simetrică și pozitiv definită.

Definiția IV.3. Un spațiu vectorial real pe care s-a definit un produs scalar se numește spațiu euclidian (real).

Exemple:

1. Fie $E = C[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R} \mid f \text{ funcție continuă} \}$. Aplicația $\langle, \rangle : C[a, b] \times C[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx, \quad (\forall) f, g \in C[a, b] \text{ este un produs scalar.}$$

2. Fie $E = \mathbf{R}^n$. Aplicația $\langle, \rangle : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x^i y^i$, oricare ar fi $\bar{x} = (x^1, \dots, x^n)$, $\bar{y} = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbf{R}^n$, este un produs scalar. Despre $(\mathbf{R}^n, \langle, \rangle)$ spunem că este spațiul vectorial euclidian canonic.

Vom nota un spațiu euclidian cu $(E, \langle, \rangle)$, sau simplu cu E .

Definiția IV.4. Numim lungimea (norma) vectorului $\bar{x}$ scalarul real $\|\bar{x}\| = \sqrt{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle}$.

Teorema IV.1. În orice spațiu euclidian E are loc inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz:

$$|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|, \quad (\forall) \bar{x}, \bar{y} \in E \quad (*)$$

Observația IV.3. Relația precedentă se poate transcrie și astfel:

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^2 \leq \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \cdot \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle.$$

În cazul particular al produsului scalar $\langle, \rangle : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ definit prin $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x^i y^i$, inegalitatea Cauchy-Buniakovski-

Schwarz devine:

$$\left(\sum_{i=1}^n x^i y^i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n (x^i)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n (y^i)^2 \right).$$

Propoziția IV.1. Norma $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbf{R}$, $\|\bar{x}\| = \sqrt{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle}$, $(\forall) \bar{x} \in E$, E spațiu euclidian, are proprietățile:

- 1) $\|\bar{x}\| \geq 0$, $(\forall) \bar{x} \in E$, $\|\bar{x}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$;

$$2) \|\lambda \bar{x}\| = |\lambda| \cdot \|\bar{x}\|, \quad (\forall) \lambda \in R, (\forall) \bar{x} \in E;$$

$$3) \|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|, \quad (\forall) \bar{x}, \bar{y} \in E \text{ (inegalitatea triunghiului)}.$$

Observația IV. 4. Într-un spațiu euclidian E are loc relația:

$$\langle \bar{x}, \bar{0} \rangle = \langle \bar{0}, \bar{x} \rangle = 0, \quad \text{oricare ar fi}$$

$\bar{x} \in E$.

Definiția IV.5. Fie X o mulțime nevidă. O aplicație $d : X \times X \rightarrow R_+$ având proprietățile:

$$1) \quad d(x, x) = 0, \quad (\forall) x \in X;$$

$$2) \quad d(x, y) = d(y, x), \quad (\forall) x, y \in X;$$

$$3) \quad d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y;$$

$$4) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad (\forall) x, y, z \in X$$

se numește *metrică (distanță)* pe X . Mulțimea X înzestrată cu o metrică d se numește *spațiu metric*. Vom scrie (X, d) .

Teorema IV.2. Fie E un spațiu euclidian. Atunci funcția $d : E \times E \rightarrow R_+$ definită prin $d(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\|$, $(\forall) \bar{x}, \bar{y} \in E$ este o metrică pe E .

Observația IV. 5. Considerăm spațiul euclidian canonic R^n . Atunci:

$$d_m(\bar{x}, \bar{y}) = \max_{1 \leq i \leq n} |x^i - y^i|;$$

$$d_s(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n |x^i - y^i|;$$

$$d_e(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^2}, \quad (\forall) \bar{x} = (x^1, \dots, x^n), \bar{y} = (y^1, \dots, y^n).$$

sunt metrici. Metrica d_e se numește *metrica (distanța) euclidiană*.

IV.2. Baze ortogonale și baze ortonormate

Definiția IV.6. Vectorii $\bar{x}, \bar{y} \in E$ se numesc *ortogonali* dacă $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 0$ și notăm $\bar{x} \perp \bar{y}$.

Observația IV.6. Dacă $\bar{x} \perp \bar{y}$ atunci $\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 = \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2$ (teorema lui Pitagora în spații euclidiene).

Propoziția IV.2. Un sistem de m vectori $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m\}$ nenuli și ortogonali doi câte doi este liniar independent.

Definiția IV.7. O bază a spațiului euclidian E , cu vectorii (bazei) ortogonali doi câte doi se numește *bază ortogonală*.

Definiția IV.8. O bază a spațiului euclidian E , se numește *ortonormată* dacă este o bază ortogonală și norma fiecărui vector din bază este egală cu 1.

Teorema IV.3. (de existență a bazelor ortonormate). Fie $(E, \langle, \rangle)$ spațiu euclidian. Atunci, în E există cel puțin o bază ortonormată.

Demonstrație.

Fie $B = \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$ o bază a lui E , $\dim E = n$ (finită), $n \geq 1$. Vom construi o bază ortonormată pentru E pornind de la B în două etape:

Etapa I:

Construim o bază ortogonală $B' = \{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n\}$, format din vectori ortogonali doi câte doi și nenuli astfel:

$$\begin{aligned}\bar{b}_1 &= \bar{a}_1 \\ \bar{b}_2 &= \bar{a}_2 + \alpha_{21} \bar{b}_1\end{aligned}$$

Determinăm pe α_{21} astfel încât $\bar{b}_2 \perp \bar{b}_1$ adică

$$0 = \langle \bar{b}_2, \bar{b}_1 \rangle = \langle \bar{a}_2 + \alpha_{21} \bar{a}_1, \bar{a}_1 \rangle = \langle \bar{a}_2, \bar{a}_1 \rangle + \alpha_{21} \langle \bar{a}_1, \bar{a}_1 \rangle \Rightarrow$$

$$\alpha_{21} = \frac{-\langle \bar{a}_2, \bar{a}_1 \rangle}{\|\bar{a}_1\|^2}.$$

Evident $\bar{b}_2 \neq \bar{0}$. Dacă $\bar{b}_2 = \bar{0}$, atunci $\bar{a}_2 + \alpha_{21} \bar{a}_1 = \bar{0}$, ceea ce este fals pentru că $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ sunt liniar independenți.

Presupunem că am construit vectorii nenuli și ortogonali doi câte doi $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_k$:

$$\begin{aligned}\bar{b}_1 &= \bar{a}_1 \\ \bar{b}_2 &= \bar{a}_2 + \alpha_{21} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_3 &= \bar{a}_3 + \alpha_{31} \bar{b}_1 + \alpha_{32} \bar{b}_2 \\ &\dots\dots\dots \\ \bar{b}_k &= \bar{a}_k + \alpha_{k1} \bar{b}_1 + \alpha_{k2} \bar{b}_2 + \dots + \alpha_{kk-1} \bar{b}_{k-1}\end{aligned}$$

Arătăm că putem construi vectorul $\bar{b}_{k+1}$ ortogonal pe vectorii $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_k$ și nenul după regula:

$$\bar{b}_{k+1} = \bar{a}_{k+1} + \alpha_{k+1,1} \bar{b}_1 + \alpha_{k+1,2} \bar{b}_2 + \dots + \alpha_{k+1,k} \bar{b}_k.$$

Determinăm scalarii $\alpha_{k+1,1}, \dots, \alpha_{k+1,k}$ astfel încât:

$$\bar{b}_{k+1} \perp \bar{b}_1, \bar{b}_{k+1} \perp \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_{k+1} \perp \bar{b}_k.$$

Astfel,

$$\begin{aligned}0 &= \langle \bar{b}_{k+1}, \bar{b}_i \rangle = \langle \bar{a}_{k+1} + \alpha_{k+1,1} \bar{b}_1 + \dots + \alpha_{k+1,i} \bar{b}_i + \dots + \alpha_{k+1,k} \bar{b}_k, \bar{b}_i \rangle = \\ &\langle \bar{a}_{k+1}, \bar{b}_i \rangle + \alpha_{k+1,1} \langle \bar{b}_1, \bar{b}_i \rangle + \dots + \alpha_{k+1,i} \langle \bar{b}_i, \bar{b}_i \rangle + \dots + \alpha_{k+1,k} \langle \bar{b}_k, \bar{b}_i \rangle \\ &= \langle \bar{a}_{k+1}, \bar{b}_i \rangle + \alpha_{k+1,i} \langle \bar{b}_i, \bar{b}_i \rangle.\end{aligned}$$

Deci,

$$\alpha_{k+1,i} = -\frac{\langle \bar{a}_{k+1}, \bar{b}_i \rangle}{\|\bar{b}_i\|^2}, \quad \forall i = \overline{1, k}.$$

Deci, $\bar{b}_{k+1}$ este cunoscut, și în plus deducem că $\bar{b}_{k+1}$ este nenul. Într-adevăr, ținând seama de expresiile vectorilor $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_k$, deducem că $\bar{b}_{k+1}$ se scrie:

$$\bar{b}_{k+1} = \bar{a}_{k+1} + \nu^1 \bar{a}_1 + \dots + \nu^k \bar{a}_k$$

Dacă $\bar{b}_{k+1} = \bar{0}$, atunci $\bar{a}_{k+1} + \nu^1 \bar{a}_1 + \dots + \nu^k \bar{a}_k = \bar{0}$ adică $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{k+1}$ ar fi liniar dependenți, ceea ce este o contradicție pentru că ei făceau parte dintr-o bază. Rezultă că $\bar{b}_{k+1} \neq \bar{0}$.

În baza principiului inducției am construit vectorii $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n$ ortogonali doi câte doi și nenuli, de unde deducem că $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n$ sunt liniar independenți. Întrucât $\dim E = n$, deducem că B' este o bază ortogonală pentru E .

Etapă II:

Construim o bază ortonormată $B'' = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ cu vectorii ortogonali doi câte doi și fiecare cu norma unitară, pornind de la B' , astfel:

$$B'' = \left\{ \bar{u}_1 = \frac{1}{\|\bar{b}_1\|} \cdot \bar{b}_1, \bar{u}_2 = \frac{1}{\|\bar{b}_2\|} \cdot \bar{b}_2, \dots, \bar{u}_n = \frac{1}{\|\bar{b}_n\|} \cdot \bar{b}_n \right\}$$

$$\text{Avem: } \langle \bar{u}_i, \bar{u}_j \rangle = \langle \frac{1}{\|\bar{b}_i\|} \bar{b}_i, \frac{1}{\|\bar{b}_j\|} \bar{b}_j \rangle = \frac{1}{\|\bar{b}_i\|} \frac{1}{\|\bar{b}_j\|} \langle \bar{b}_i, \bar{b}_j \rangle = 0, (\forall) i \neq j, \text{ deci } \bar{u}_i \perp \bar{u}_j.$$

$$\|\bar{u}_i\| = \frac{1}{\|\bar{b}_i\|} \cdot \|\bar{b}_i\| = \frac{\|\bar{b}_i\|}{\|\bar{b}_i\|} = 1, \forall i \neq 1, n.$$

Deci, B'' este o bază ortonormată pentru E . Procedul de obținere a unei baze ortonormate pornind de la o bază dată, prezentat mai sus, se numește *procedul de ortonormare GRAM-SCHMIDT*.

◆

Observația IV.7. Într-o bază ortonormată $B = \{\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n\}$ coordonatele unui vector oarecare $\bar{x}$ coincid cu produsele scalare $\langle \bar{x}, \bar{g}_i \rangle, i = \overline{1, n}$.

Justificarea este imediată căci dacă $\bar{x} = \lambda^1 \bar{g}_1 + \dots + \lambda^n \bar{g}_n$ avem:

$$\langle \bar{x}, \bar{g}_i \rangle = \langle \lambda^1 \bar{g}_1 + \dots + \lambda^n \bar{g}_n, \bar{g}_i \rangle = \lambda^1 \langle \bar{g}_1, \bar{g}_i \rangle + \dots + \lambda^n \langle \bar{g}_n, \bar{g}_i \rangle = \lambda^i \langle \bar{g}_i, \bar{g}_i \rangle = \lambda^i$$

$$\text{Deci, } \bar{x} = \sum_{i=1}^n \langle \bar{x}, \bar{g}_i \rangle \cdot \bar{g}_i.$$

Example:

1. În $\mathbf{R}^3$ se consideră produsul scalar:

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^3 x^i y^i, \quad (\forall) \bar{x} = (x^1, x^2, x^3), \bar{y} = (y^1, y^2, y^3) \in R^3.$$

$$\text{Fie baza: } E = \{\bar{e}_1 = (-1, 1, 0), \bar{e}_2 = (1, 1, 0), \bar{e}_3 = (1, 2, 3)\}.$$

Construim baza ortogonală $F = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$ astfel:

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 &= \bar{e}_1 \\ \bar{f}_2 &= \bar{e}_2 + \alpha \bar{f}_1 \\ \bar{f}_3 &= \bar{e}_3 + \beta \bar{f}_1 + \gamma \bar{f}_2 \end{aligned}$$

Cu condițiile:

$$\begin{cases} \langle \bar{f}_2, \bar{f}_1 \rangle = 0 & (a) \\ \langle \bar{f}_3, \bar{f}_1 \rangle = 0 & (b) \\ \langle \bar{f}_3, \bar{f}_2 \rangle = 0 & (c) \end{cases}$$

$$\text{Din (a) obținem: } \langle \bar{e}_2, \bar{f}_1 \rangle + \alpha \langle \bar{f}_1, \bar{f}_1 \rangle = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{\langle \bar{e}_2, \bar{e}_1 \rangle}{\langle \bar{e}_1, \bar{e}_1 \rangle} = -\frac{0}{2} = 0$$

$$\text{Deci, } \bar{f}_2 = \bar{e}_2 = (1, 1, 0).$$

$$\text{Din (b) obținem: } \langle \bar{e}_3, \bar{f}_1 \rangle + \beta \langle \bar{f}_1, \bar{f}_1 \rangle + \gamma \langle \bar{f}_2, \bar{f}_1 \rangle = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{\langle \bar{e}_3, \bar{e}_1 \rangle}{\langle \bar{e}_1, \bar{e}_1 \rangle} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Din (c) obținem: } \langle \bar{e}_3, \bar{f}_2 \rangle + \beta \langle \bar{f}_1, \bar{f}_2 \rangle + \gamma \langle \bar{f}_2, \bar{f}_2 \rangle = 0 \Rightarrow \gamma = -\frac{\langle \bar{e}_3, \bar{e}_2 \rangle}{\langle \bar{e}_2, \bar{e}_2 \rangle} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Deci } \bar{f}_3 = \bar{e}_3 - \frac{1}{2}\bar{e}_1 - \frac{3}{2}\bar{e}_2 = (0,0,3).$$

Cum $\|\bar{f}_1\| = \sqrt{2}$, $\|\bar{f}_2\| = \sqrt{2}$, $\|\bar{f}_3\| = 3$ atunci vectorii:

$$\left\{ \bar{g}_1 = \frac{\bar{f}_1}{\|\bar{f}_1\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right); \bar{g}_2 = \frac{\bar{f}_2}{\|\bar{f}_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right); \bar{g}_3 = \frac{\bar{f}_3}{\|\bar{f}_3\|} = (0,0,1) \right\}$$

constituie o bază ortogonală în $\mathbf{R}^3$.

Coordonatele vectorului $\bar{x} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ în această bază vor fi:

- prima coordonată: $\langle \bar{x}, \bar{g}_1 \rangle = 0$
- a doua coordonată: $\langle \bar{x}, \bar{g}_2 \rangle = 2$
- a treia coordonată: $\langle \bar{x}, \bar{g}_3 \rangle = 1$.

IV.3. Expresia analitică a produsului scalar și a normei în raport cu o bază oarecare și în raport cu o bază ortonormată

Fie $(E, \langle, \rangle)$ spațiu euclidian și $B = \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$ o bază pentru E . Considerăm doi vectori arbitrari

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x^i \bar{a}_i, \quad \bar{y} = \sum_{j=1}^n y^j \bar{a}_j.$$

Avem:

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x^i \bar{a}_i, \sum_{j=1}^n y^j \bar{a}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x^i y^j \langle \bar{a}_i, \bar{a}_j \rangle.$$

Notând $a_{ij} = \langle \bar{a}_i, \bar{a}_j \rangle$, $i, j = \overline{1, n}$ obținem:

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x^i y^j a_{ij}$$

numită expresia analitică a produsului scalar în raport cu baza B.

Matricea $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$ $i, j = \overline{1, n}$, se numește *matricea produsului scalar în raport cu baza B*.

Expresia normei este:

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x^i x^j a_{ij}}, \quad (\forall) \bar{x} = \sum_{i=1}^n x^i \bar{a}_i \in E.$$

Dacă $B = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ este o bază ortonormată a lui E , avem:

$$\langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

De aici deducem o proprietate importantă, și anume: matricea produsului scalar în raport cu o bază ortonormată este matricea unitate de ordin $n = \dim E$. În acest caz, obținem pentru produsul scalar și pentru normă următoarele expresii :

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \sum_{i=1}^n x^i \bar{e}_i \\ \bar{y} &= \sum_{j=1}^n y^j \bar{e}_j \end{aligned} \right\} \text{rezultă că } \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x^i y^i; \quad \|\bar{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i)^2}.$$

Observația IV.8. Dacă $A = (a_{ij}) \in M_n(R)$ este matricea produsului scalar în raport cu o bază oarecare $B = \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$ avem:

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = (x^1, \dots, x^n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}. \quad \text{Dacă } B \text{ este o bază ortonormată, atunci: } \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = (x^1, \dots, x^n) \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}.$$

IV.4. Criteriul lui Gram de dependență liniară a vectorilor

Teorema IV.4. (Criteriul lui Gram) Fie E un spațiu euclidian. Condiția necesară și suficientă ca vectorii sistemului $S = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ să fie liniar dependenți este ca determinantul:

$$\Gamma_n = \begin{vmatrix} \langle \bar{x}_1, \bar{x}_1 \rangle & \dots & \langle \bar{x}_1, \bar{x}_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \bar{x}_n, \bar{x}_1 \rangle & \dots & \langle \bar{x}_n, \bar{x}_n \rangle \end{vmatrix},$$

numit determinantul Gram asociat sistemului S , să fie nul.

Observația IV.8. Sistemul S este liniar independent dacă și numai dacă $\Gamma_n \neq 0$.

Exemple:

1. Fie $V = C[0,1] = \{f : [0,1] \rightarrow R, f \text{ continuă}\}$ și $\langle \cdot, \cdot \rangle : C[0,1] \times C[0,1] \rightarrow R$ prin $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt \quad (\forall) f, g \in C[0,1]$.

Să se arate că funcțiile $\{1, t, t^2\}$ sunt liniar independente.

Aratăm că $\Gamma_{(1,t,t^2)} \neq 0$, unde:

$$\Gamma_{(1,t,t^2)} = \begin{vmatrix} \int_0^1 1 \cdot dt & \int_0^1 t \cdot dt & \int_0^1 t^2 \cdot dt \\ \int_0^1 t \cdot dt & \int_0^1 t^2 \cdot dt & \int_0^1 t^3 \cdot dt \\ \int_0^1 t^2 \cdot dt & \int_0^1 t^3 \cdot dt & \int_0^1 t^4 \cdot dt \end{vmatrix}$$

Calculând integralele, obținem:

$$\Gamma_{(1,t,t^2)} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} \neq 0.$$

IV.5. Probleme rezolvate

1) Se consideră aplicația $\langle, \rangle: \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$, care în raport cu baza canonică $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ a lui $\mathbf{R}^3$ are expresia analitică :

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = (x^1 - x^2)(y^1 - y^2) + 2x^2y^2 + (x^2 + x^3)(y^2 + y^3),$$

oricare ar fi $\bar{x} = (x^1, x^2, x^3), \bar{y} = (y^1, y^2, y^3) \in \mathbf{R}^3$.

Se cere:

- Să se arate că $(\mathbf{R}^3, \langle, \rangle)$ este un spațiu vectorial euclidian.
- Să se arate că vectorii $\bar{a} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$ și $\bar{b} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 - 2\bar{e}_3$ sunt ortogonali.
- Să se calculeze $\|\bar{a}\|$.
- Să se scrie matricea produsului scalar în raport cu baza $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.
- Pornind de la baza $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ să se scrie o bază ortonormată.

Soluție:

a) Vom arăta că aplicația $\langle, \rangle: \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ este un produs scalar verificând proprietăți din definiția produsului scalar (definiția V.1.).

1) $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbf{R}^3$ deoarece expresia este simetrică în $\bar{x}$ și $\bar{y}$.

$$\begin{aligned} 2) \langle \bar{x} + \bar{y}, \bar{z} \rangle &= (a' - a^2)(z' - z^2) + 2a^2z^2 + (a^2 + a^3)(z^2 + z^3) = \\ &= (x^1 + y^1 - (x^2 + y^2))(z^1 - z^2) + 2(x^2 + y^2)z^2 + (x^2 + y^2 + (x^3 + y^3))(z^2 + z^3) = \\ &= (x^1 - x^2)(z^1 - z^2) + (y^1 - y^2)(z^1 - z^2) + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 + (x^2 + x^3)(z^2 + z^3) + \\ &+ (y^2 + y^3)(z^2 + z^3) = \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{z} \rangle \forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbf{R}^3. \end{aligned} \quad 3)$$

$$\begin{aligned} \langle \alpha \bar{x}, \bar{y} \rangle &= (\alpha x^1 - \alpha x^2)(y^1 - y^2) + 2\alpha x^2y^2 + (\alpha x^2 + \alpha x^3)(y^2 + y^3) = \\ &= \alpha(x^1 - x^2)(y^1 - y^2) + \alpha \cdot 2x^2y^2 + \alpha(x^2 + x^3)(y^2 + y^3) = \\ &\alpha \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle, (\forall) \alpha \in \mathbf{R} \quad \bar{x}, \bar{y} \in \mathbf{R}^3. \end{aligned}$$

$$4) \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = (x^1 - x^2)^2 + 2(x^2)^2 + (x^2 + x^3)^2 \geq 0. \quad (\forall) \bar{x} \in \mathbf{R}^3$$

$$\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^1 - x^2 = 0 \\ x^2 = 0 \\ x^2 + x^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^1 = 0 \\ x^2 = 0 \\ x^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \bar{x} = 0.$$

b) Pentru a arăta că vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sunt ortogonali calculăm produsul lor scalar.

Coordonatele vectorilor $\bar{a}$ și $\bar{b}$ în baza dată sunt:

$\bar{a} = (1, 1, 1), \bar{b} = (1, 1, -2) \in \mathbf{R}^3$. Astfel produsul lor scalar este:

$$\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = (1-1)(1-1) + 2 \cdot 1 \cdot 1 + (1+1)(1-2) = 0 \Rightarrow \bar{a} \perp \bar{b}.$$

$$c) \|\bar{a}\| = \sqrt{\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle} = \sqrt{(1-1)^2 + 2 + (1+1)^2} = \sqrt{6}.$$

d) Matricea produsului scalar este $A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbf{R}), a_{ij} = \langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle$.

Fiind o matrice din $M_3(R)$ conține nouă elemente, dar produsul scalar fiind real rezultă că matricea e simetrică. Vom calcula astfel doar 6 elemente.

$$\begin{aligned} \langle \bar{e}_1, \bar{e}_1 \rangle &= 1 \\ \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle &= -1 \\ \langle \bar{e}_1, \bar{e}_3 \rangle &= 0 \\ \langle \bar{e}_2, \bar{e}_3 \rangle &= 1 \quad \Rightarrow \\ \langle \bar{e}_2, \bar{e}_2 \rangle &= 4 \\ \langle \bar{e}_3, \bar{e}_3 \rangle &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

f) Mai întâi căutăm o bază ortogonală $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 &= \bar{e}_1 \\ \bar{f}_2 &= \bar{e}_2 + \alpha \bar{f}_1 \\ \bar{f}_3 &= \bar{e}_3 + \beta \bar{f}_1 + \gamma \bar{f}_2 \end{aligned}$$

Punând condițiile :

$$\langle \bar{f}_1, \bar{f}_2 \rangle = 0, \langle \bar{f}_1, \bar{f}_3 \rangle = 0, \langle \bar{f}_2, \bar{f}_3 \rangle = 0,$$

obținem un sistem cu necunoscutele α, β, γ .

Rezolvând acest sistem găsim : $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = -\frac{1}{3}$.

Deci $\bar{f}_1 = \bar{e}_1, \bar{f}_2 = \bar{e}_2 + \bar{e}_1 = (1, 1, 0), \bar{f}_3 = \bar{e}_3 - \frac{1}{3}\bar{f}_2 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$ formează baza $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$, care este o bază ortogonală.

Baza ortonormată căutată este deci:

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{\bar{f}_1}{\|\bar{f}_1\|}, \frac{\bar{f}_2}{\|\bar{f}_2\|}, \frac{\bar{f}_3}{\|\bar{f}_3\|} \right\} \\ \|\bar{f}_1\| &= \sqrt{\langle \bar{f}_1, \bar{f}_1 \rangle} = \sqrt{1} = 1 \\ \|\bar{f}_2\| &= \sqrt{\langle \bar{f}_2, \bar{f}_2 \rangle} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \\ \|\bar{f}_3\| &= \sqrt{\langle \bar{f}_3, \bar{f}_3 \rangle} = \sqrt{\frac{11}{9}} = \frac{\sqrt{11}}{3} \end{aligned}$$

Baza ortonormată este formată cu vectorii unitari, ortogonali doi câte doi:

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= (1, 0, 0) \\ \bar{y}_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \\ \bar{y}_3 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}} \right) \end{aligned}$$

Deci $\left\{ (1, 0, 0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(\frac{-1}{\sqrt{11}}, \frac{-1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}} \right) \right\}$ este o bază ortonormată.

2) Să se arate că aplicația $\langle, \rangle: \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin :

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = x^1 y^1,$$

oricare ar fi $\bar{x} = (x^1, x^2, x^3)$ și $\bar{y} = (y^1, y^2, y^3) \in \mathbf{R}^3$, nu este produs scalar pe $\mathbf{R}^3$.

Soluție:

Observăm că $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow x^1 = 0$, restul componentelor putând fi nenule.

Deci, $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = 0$ și pentru $\bar{x}_0 = (0, 1, 1)$ nu doar pentru $\bar{x} = \bar{0}$, și astfel rezultă că proprietatea din definiția produsului scalar nu este îndeplinită.

Astfel aplicația dată nu este un produs scalar.

3) a) Să se arate că în spațiul vectorial real $M_2(\mathbf{R})$ matricele :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ determină o bază}$$

b) Definim aplicația $\langle, \rangle: M_2(\mathbf{R}) \times M_2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ prin

$$\langle A, B \rangle = x^1 v^1 + x^2 v^2 + x^3 v^3 + x^4 v^4, \quad (\forall) A, B,$$

$$A = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 \\ x^3 & x^4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} v^1 & v^2 \\ v^3 & v^4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$$

Să se arate că $(M_2(\mathbf{R}), \langle, \rangle)$ este un spațiu vectorial euclidian real.

c) Să se arate că matricele din enunț sunt liniar independente folosind determinantul Gram

Soluție:

a) Arătăm că matricele A_i , $i = \overline{1, 4}$ sunt liniar independente și că

$$M_2(\mathbf{R}) = L(A_1, A_2, A_3, A_4)$$

$$\text{Fie } \alpha^1 A_1 + \alpha^2 A_2 + \alpha^3 A_3 + \alpha^4 A_4 = 0_4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha^1 + 2\alpha^2 - \alpha^3 = 0 \\ 2\alpha^1 + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0 \\ -\alpha^1 + \alpha^2 + 2\alpha^3 - \alpha^4 = 0 \\ \alpha^1 - 2\alpha^3 + 3\alpha^4 = 0 \end{cases}$$

Determinantul sistemului este

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 28 \neq 0.$$

Sistemul fiind liniar și omogen admite doar soluția banală:

$$\alpha^1 = \alpha^2 = \alpha^3 = \alpha^4 = 0.$$

Astfel matricele date sunt liniar independente.

Arătăm că matricele date constituie un sistem de generatori pentru $M_2(\mathbf{R})$, demonstrând că oricare ar fi matricea $A \in M_2(\mathbf{R})$ ea se poate reprezenta ca o combinație liniară de matricele A_1, A_2, A_3, A_4 .

Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Căutăm numerele reale $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ astfel încât:

$$A = \alpha^1 A_1 + \alpha^2 A_2 + \alpha^3 A_3 + \alpha^4 A_4.$$

Obținem pentru determinarea numerelor $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ sistemul liniar:

$$\begin{cases} \alpha^1 + 2\alpha^2 - \alpha^3 = a \\ 2\alpha^1 + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = b \\ -\alpha^1 + \alpha^2 + 2\alpha^3 - \alpha^4 = c \\ \alpha^1 - 2\alpha^3 + 3\alpha^4 = d \end{cases}$$

Deoarece determinantul sistemului este nenul sistemul are soluție unică dată de regula lui Cramer:

$$\alpha_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = \overline{1,4}, \text{ unde } \Delta_i \text{ reprezintă determinantul obținut din } \Delta \text{ prin înlocuirea coloanei } i \text{ cu coloana termenilor}$$

liberi.

Astfel am obținut că $M_2(\mathbf{R}) = L(A_1, A_2, A_3, A_4)$.

Deci $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ constituie o bază pentru $M_2(\mathbf{R})$.

b) Verificăm că sunt adevărate proprietățile produsului scalar real.

1. $\langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle$, $(\forall) A, B \in M_2(\mathbf{R})$ datorită faptului că expresia sa este simetrică în x^i și v^i ;

$$\begin{aligned} 2. \langle A + B, C \rangle &= (x^1 + y^1)v^1 + (x^2 + y^2)v^2 + (x^3 + y^3)v^3 + (x^4 + y^4)v^4 = \\ &= x^1v^1 + y^1v^1 + x^2v^2 + y^2v^2 + x^3v^3 + y^3v^3 + x^4v^4 + y^4v^4 = \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle; \end{aligned}$$

$$\langle \alpha A, B \rangle = \alpha x^1v^1 + \alpha x^2v^2 + \alpha x^3v^3 + \alpha x^4v^4 = \alpha \langle A, B \rangle$$

$$4. \langle A, A \rangle = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 \geq 0, (\forall) A \in M_2(\mathbf{R}) \quad \langle A, A \rangle = 0 \Leftrightarrow x^1 = x^2 = x^3 = x^4 \Leftrightarrow A = 0$$

Aplicația dată este deci un produs scalar pe $M_2(\mathbf{R})$. Astfel $(M_2(\mathbf{R}), \langle, \rangle)$ este un spațiu vectorial euclidian.

c) Construim, cu ajutorul produsului scalar, determinantul Gram asociat sistemului

$$\{A_1, A_2, A_3, A_4\}.$$

Avem:

$$\langle A_1, A_1 \rangle = 1 + 4 + 1 + 1 = 7$$

$$\langle A_1, A_2 \rangle = 2 + 2 - 1 = 3$$

$$\langle A_1, A_3 \rangle = -1 + 2 - 2 - 2 = -3$$

$$\langle A_1, A_4 \rangle = 2 + 1 + 3 = 6$$

$$\langle A_2, A_2 \rangle = 4 + 1 + 1 = 6$$

$$\langle A_2, A_3 \rangle = -2 + 1 - 2 = 1$$

$$\langle A_2, A_4 \rangle = 1 - 1 = 0$$

$$\langle A_3, A_3 \rangle = 1 + 1 + 4 + 4 = 10$$

$$\langle A_3, A_4 \rangle = 1 - 2 - 6 = -7$$

$$\langle A_4, A_4 \rangle = 1 + 1 + 9 = 11.$$

Astfel obținem:

$$\Gamma = \begin{vmatrix} 7 & 3 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 10 & -7 \\ 6 & 0 & -7 & 11 \end{vmatrix} = 784 \neq 0.$$

Determinantul fiind nenul, conform criteriului Gram, regăsim rezultatul de la punctul a), adică faptul că vectorii dați sunt liniar independenți.

4) Fie $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ spațiul vectorial euclidian canonic. Să se arate că vectorii:

$\bar{x} = (1, 0, 2, 1)$, $\bar{y} = (-1, -2, 0, 1)$, $\bar{z} = (0, 1, 2, -2)$ și $\bar{u} = (0, -1, -1, 1) \in \mathbb{R}^4$ sunt liniar independenți, folosind determinantul Gram asociat.

Soluție:

Construim cu ajutorul produselor scalare determinantul Gram asociat.

Avem:

$$\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = 6, \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 0, \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle = 2, \langle \bar{x}, \bar{u} \rangle = -1$$

$$\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle = 6, \langle \bar{y}, \bar{z} \rangle = -4, \langle \bar{y}, \bar{u} \rangle = 3$$

$$\langle \bar{z}, \bar{z} \rangle = 9, \langle \bar{z}, \bar{u} \rangle = -5, \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle = 3$$

$$\Gamma = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & -4 & 3 \\ 2 & -4 & 9 & -5 \\ 1 & 3 & -5 & 3 \end{vmatrix} = -128 \neq 0$$

Conform consecinței criteriului Gram vectorii din enunț sunt liniar independenți.

V. VECTORI LIBERI ÎN SPAȚIU

V.1. Vectori liberi. Expresii analitice ale operațiilor cu vectori

Definiția V.1. Numim *vector* un segment de dreaptă orientat.

Elementele caracteristice ale unui vector sunt:

1. direcție- dată de dreapta suport
2. sens –dat de modul de parcurgere a segmentului
3. mărime (sau modul) –dată de lungimea segmentului
4. origine

Notăția folosită: $\overrightarrow{AB}$, unde A este originea, B extremitatea (sensul de parcurs fiind de la A la B). Mărimea vectorului se notează cu $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Vectorii mai pot fi notați pentru simplitate cu o singură literă astfel: $\vec{a}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots$

Un vector cu mărimea egală cu unitatea poartă numele de vector unitar.

Vectorul pentru care extremitatea coincide cu originea se numește vector nul. Mărimea sa este deci zero, direcția și sensul fiind nedeterminate. El se notează cu $\vec{0}$.

Clasificarea vectorilor

Vectorii se împart în trei mari categorii:

1. Legați - au originea într-un punct fix din spațiu; de exemplu viteza unui punct material în mișcarea pe traiectorie.
2. Alunecători - originea se poate deplasa în lungul dreptei suport; de exemplu forța care acționează asupra unui solid rigid, deoarece punctul de aplicație al acesteia poate fi situat oriunde pe dreapta suport, efectul este același.
3. Liberi- originea poate fi situată oriunde în spațiu.

Definiția V.2. Doi vectori sunt egali dacă au aceeași, direcție, același sens și același modul. În cazul vectorilor legați ei trebuie să aibă și aceeași origine.

Definiția V.3. Doi vectori se numesc *paraleli* dacă au aceeași direcție.

Definiția V.4. Doi vectori se numesc *coliniari* dacă au ca suport aceeași dreaptă.

Observația V.1. Pentru cazul vectorilor liberi cele două noțiuni coincid (a spune că doi vectori sunt paraleli este echivalent cu a spune că sunt coliniari).

Definiția V.5. Doi vectori se numesc *echipolenți* dacă au aceeași direcție, același sens și același modul, cu alte cuvinte dacă pot fi suprapuși printr-o mișcare de translație.

Observația V.2. Pentru cazul vectorilor liberi noțiunea de echipolență este echivalentă cu cea de egalitate.

Definiția V.6. Doi vectori se numesc *opuși* dacă au aceeași direcție, același modul și sensuri diferite. În cazul vectorilor legați ei trebuie să aibă și aceeași origine.

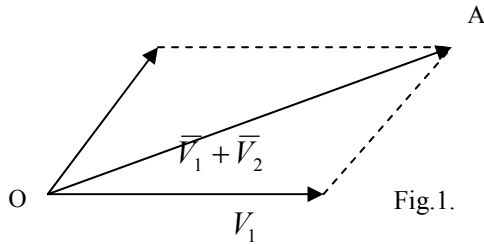
Opusul unui vector $\vec{v}$ se notează $-\vec{v}$.

Vectorii cu care operăm în continuare snt considerați vectori liberi. Dacă avem mai mulți vectori liberi ei pot fi aduși astfel încât să aibă aceeași origine.

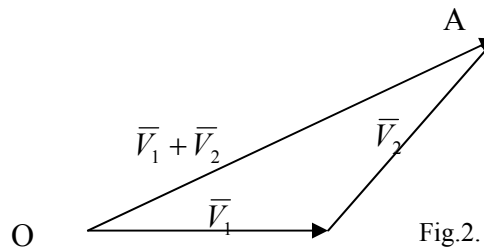
Operații cu vectori

Definiția V.7. (Regula paralelogramului) Fie $\vec{V}_1$ și $\vec{V}_2$ doi vectori dați având originea în punctul O . Se numește *sumă* a vectorilor $\vec{V}_1$ și $\vec{V}_2$, vectorul $\vec{OA}$, unde A este vârful opus lui O în paralelogramul construit cu ajutorul celor doi vectori (fig.1). Notăția folosită este:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{OA}$$



Definiția V.8. (Regula liniei poligonale închise) Se numește *sumă* a vectorilor $\vec{V}_1$ și $\vec{V}_2$, vectorul $\vec{OA}$, unde O este originea primului vector, iar A este extremitatea celui de-al doilea, acesta din urmă având originea în extremitatea primului (fig.2.).



Această regulă este echivalentă cu regula paralelogramului, dar prezintă avantajul că poate fi ușor aplicată cazului în care avem de făcut suma a n vectori $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

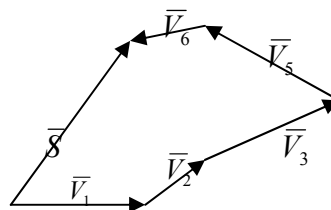


Fig.3.

$$\vec{S} = \sum_{i=1}^6 \vec{V}_i.$$

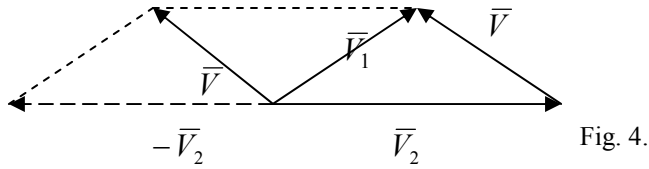
Propoziția V.1. Adunarea vectorilor are următoarele proprietăți

1. $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$ (comutativitate).
2. $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) + \vec{V}_3 = \vec{V}_1 + (\vec{V}_2 + \vec{V}_3)$ (asociativitate).

$$3. \overline{V}_1 + \overline{0} = \overline{V}_1$$

$$4. \overline{V}_1 + (-\overline{V}_1) = \overline{0}$$

Definiția V.9. Diferența dintre vectorii $\overline{V}_1$ și $\overline{V}_2$ este un vector, $\overline{V}$, ce reprezintă de fapt suma dintre primul vector și opusul celui de-al doilea: $\overline{V} = \overline{V}_1 - \overline{V}_2 = \overline{V}_1 + (-\overline{V}_2)$.



Se observă că vectorul diferență are originea în extremitatea scăzătorului și extremitatea în cea a descăzutului.

Definiția V.10. Se numește *produs dintre scalarul a și vectorul $\overline{V}$* un alt vector, notat $a\overline{V}$, care are aceeași direcție cu vectorul dat, același sens sau sens opus cu $\overline{V}$ după cum a este strict pozitiv, sau strict negativ, iar modulul este dat de relația: $\|a\overline{V}\| = |a|\|\overline{V}\|$

Observația V.4. Prin înmulțirea unui scalar nul cu orice vector se obține vectorul nul.

Propoziția V.2. Înmulțirea vectorilor cu scalari are următoarele proprietăți:

1. $(a + b)\overline{V} = a\overline{V} + b\overline{V}$ (este distributivă față de adunarea scalarilor).
2. $a(\overline{V}_1 + \overline{V}_2) = a\overline{V}_1 + a\overline{V}_2$ (este distributivă față de adunarea vectorilor).
3. $a(b\overline{V}) = (ab)\overline{V}$.

Definiția V.11. Se numește *versor* al unui vector un vector unitar care are aceeași direcție și același sens cu vectorul dat.

Versorul vectorului $\overline{V}$ se notează cu $\text{vers}\overline{V}$ și este dat de relația: $\text{vers}\overline{V} = \frac{\overline{V}}{\|\overline{V}\|}$.

Descompunerea unui vector după două direcții concurente din plan

Fie d_1, d_2 două direcții în plan ce se intersectează în punctul O . Considerăm vectorul dat, $\overline{V}$, situat în planul celor două direcții, având originea în O și extremitatea în punctul A (Fig.5). Din A se duc paralele la d_1 și d_2 și se notează cu A_1, A_2 punctele de intersecție.

Avem relația: $\overline{V} = \overline{OA} = \overline{OA_1} + \overline{OA_2}$. Vectorii $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}$ se numesc componentele vectoriale ale vectorului dat față de direcțiile d_1, d_2 .

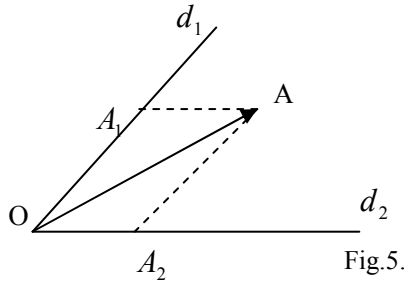


Fig. 5.

Descompunerea unui vector după trei direcții concurente necoplanare.

Fie d_1, d_2, d_3 cele trei direcții concurente în O și $\vec{V}$ vectorul dat, având originea în punctul O (fig. 6).

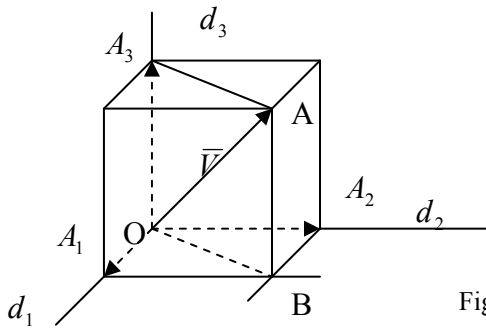


Fig. 6.

Din extremitatea A a vectorului dat, ducem o paralelă la dreapta d_3 până când aceasta intersectează planul format de d_1, d_2 în B . Din B ducem apoi paralele la d_1, d_2 și notăm cu A_2, A_1 aceste intersecții, iar din A ducem o paralelă la OB și notăm cu A_3 intersecția ei cu d_3 .

Notând $\vec{V}_1 = \overrightarrow{OA_1}$, $\vec{V}_2 = \overrightarrow{OA_2}$, $\vec{V}_3 = \overrightarrow{OA_3}$, obținem:

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3,$$

iar $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ poartă numele de componentele vectorului dat după cele trei direcții.

Propoziția 6.3. Dacă vectorii $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ sunt coliniari atunci între ei există relația $\alpha\vec{V}_1 + \beta\vec{V}_2 = \vec{0}$, cu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$.

Observația V.5. Doi vectori $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ sunt coliniari dacă și numai dacă există un scalar $a \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\vec{V}_1 = a\vec{V}_2$.

Proiecția unui vector pe o axă

Prin axă înțelegem o dreaptă pe care s-a stabilit un sens pozitiv de parcurgere a punctelor sale. Vectorial o axă este caracterizată de un versor.

Definiția V.12. Numim *unghi* a doi vectori $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ unghiul din intervalul $[0, \pi]$ format de sensurile lor pozitive, pe care-l notăm prin $(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$.

Considerăm un vector $\overrightarrow{AB} = \vec{V}$ și o axă D , de versor $\vec{u}$

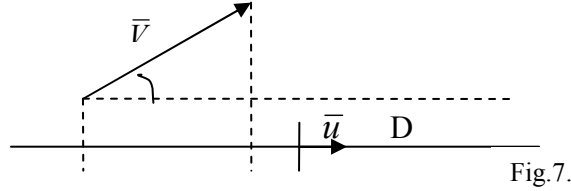


Fig.7.

Definiția V.13. Numim *proiecție a vectorului $\vec{V}$ pe axa D* un scalar egal cu produsul dintre modulul vectorului considerat și cosinusul unghiului format de acest vector cu axa D . Notăm:

$$pr_D \vec{V} = \|\vec{V}\| \cos(\vec{V}, D) \text{ sau } pr_{\vec{u}} \vec{V} = \|\vec{V}\| \cos(\vec{V}, \vec{u}).$$

Proiecția unui vector pe o axă este un scalar pozitiv sau negativ, după cum unghiul dintre vector și versorul axei este ascuțit sau obtuz.

Expresia analitică a vectorilor

Să considerăm trei drepte D_1, D_2, D_3 , concurente într-un punct O , și ortogonale două câte două. Orientăm aceste trei drepte cu ajutorul versorilor $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ astfel încât triedrul $O(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ să fie direct, adică un observator situat de-a lungul versorului $\vec{k}$, cu capul în sensul lui $\vec{k}$ să observe suprapunerea versorului $\vec{i}$ peste $\vec{j}$ de la dreapta spre stânga după un unghi de 90° . Figura geometrică astfel construită se numește reper cartezian ortogonal, iar axele se notează de obicei cu Ox, Oy, Oz .

Să considerăm un punct M în spațiu.

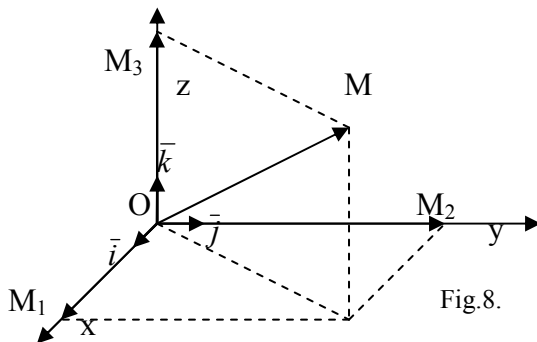


Fig.8.

Vectorul $\overline{OM}$ se numește vector de poziție al punctului M . Descompunem acest vector după direcțiile axelor Ox, Oy, Oz . Astfel obținem:

$$\overline{OM} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2} + \overline{OM_3}.$$

$\overline{OM_1}, \overline{OM_2}, \overline{OM_3}$ poartă numele de *componentele vectoriale ale vectorului $\overline{OM}$* .

Componentele vectorului de poziție al lui M fiind coliniare cu versorii acestora există scalarii x, y, z astfel încât $\overline{OM_1} = x\vec{i}, \overline{OM_2} = y\vec{j}, \overline{OM_3} = z\vec{k}$ și deci

$$\overline{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Definiția V.14. Scalarii care apar poartă numele de *componentele sau coordonatele scalare ale vectorului* $\overline{OM}$.

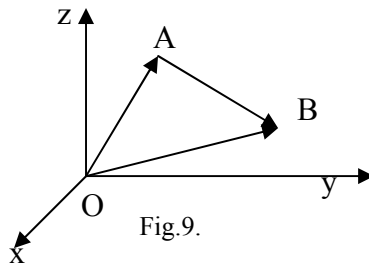
O notație echivalentă pentru vectorul $\overline{OM}$ este aceea care precizează doar componentele scalare ale vectorului, adică: $\overline{OM}(x, y, z)$

Relația $\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ poartă numele de *expresia analitică a vectorului* $\overline{OM}$. Scalarii x, y, z se numesc *coordoanatele carteziene* ale punctului M ; x poartă numele de *abscisă*, y se numește *ordonata* iar z *cota* punctului M . Fiecărui punct din spațiu îi corespunde în mod unic un triplet (ordonat) de numere reale, coordonate carteziene ale sale, și reciproc.

Considerăm acum un vector oarecare determinat de coordonatele extremităților sale $A(x_1, y_1, z_1)$ (origine), și $B(x_2, y_2, z_2)$.

Avem: $\overline{V} = \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$. Dar $\overline{OA} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$, iar $\overline{OB} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$, astfel că obținem:

$$\overline{V} = \overline{AB} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}.$$



Scalarii $(x_2 - x_1)$, $(y_2 - y_1)$, $(z_2 - z_1)$ se numesc *componentele scalare ale vectorului* $\overline{AB}$.

Transcrierea analitică a operațiilor studiate.

Considerăm doi vectori dați prin expresiile lor analitice:

$$\overline{V}_1 = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k} \text{ și } \overline{V}_2 = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}.$$

$$\overline{V}_1 = \overline{V}_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2;$$

$$a\overline{V}_1 = ax_1\bar{i} + ay_1\bar{j} + az_1\bar{k}.$$

$$\overline{V} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2, \text{ are expresia analitică: } \overline{V} = (x_1 + x_2)\bar{i} + (y_1 + y_2)\bar{j} + (z_1 + z_2)\bar{k}.$$

În cazul sumei a n vectori avem relația: $\overline{V} = \sum_{m=1}^n \overline{V}_m = \left(\sum_{m=1}^n x_m \right) \bar{i} + \left(\sum_{m=1}^n y_m \right) \bar{j} + \left(\sum_{m=1}^n z_m \right) \bar{k}.$

$$\overline{V} = \overline{V}_1 - \overline{V}_2, \text{ are expresia analitică: } \overline{V} = (x_1 - x_2)\bar{i} + (y_1 - y_2)\bar{j} + (z_1 - z_2)\bar{k}.$$

Observația V.6. Doi vectori $\overline{V}_1, \overline{V}_2$ sunt paraleli (coliniari) dacă și numai dacă $\exists \alpha \in R$ astfel încât:

$$\overline{V}_1 = \alpha \overline{V}_2 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Produsul scalar

Definiția V.14. Se numește *produsul scalar* a doi vectori $\vec{V}_1, \vec{V}_2$, un scalar notat $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$, egal cu produsul dintre modulele celor doi vectori și cosinusul unghiului format de aceștia, adică

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\| \|\vec{V}_2\| \cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2).$$

În cazul particular al vectorilor egali obținem: $\|\vec{V}\| = \sqrt{\vec{V} \cdot \vec{V}}$.

Propoziția V.4. Produsul scalar a doi vectori are următoarele proprietăți:

1. Produsul scalar este nul în următoarele situații:

- a) Dacă cel puțin unul dintre vectori este vectorul nul
- b) Când vectorii, fiind nenuli, sunt ortogonali, deoarece în acest caz cosinusul unghiului dintre ei este egal cu zero.

De aici putem deduce următoarea propoziție: condiția necesară și suficientă ca doi vectori nenuli să fie ortogonali este ca produsul lor scalar să fie nul.

2. Produsul scalar a doi vectori este egal cu produsul dintre modulul unui vector și proiecția celui alt pe el, adică:

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\| (pr_{\vec{V}_1} \vec{V}_2), \text{ sau schimbând rolurile vectorilor, } \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \|\vec{V}_2\| (pr_{\vec{V}_2} \vec{V}_1).$$

3. Proiecția unui vector pe o axă este egală cu produsul scalar dintre vectorul dat și versorul axei.

4. Este comutativ, adică $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1$.

5. Este distributiv față de adunarea vectorilor, adică:

$$\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3.$$

6. Dacă a, b sunt scalari, avem: $(a\vec{V}_1) \cdot (b\vec{V}_2) = (ab)(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)$.

Observăm că avem următoarele relații:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

Considerăm $\vec{V}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ și $\vec{V}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$.

Expresia analitică a produsului scalar este:

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

În cazul particular al vectorilor egali obținem:

$$\vec{V} \cdot \vec{V} = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \|\vec{V}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Deducem formula cu ajutorul căreia putem calcula cosinusul unghiului format de doi vectori (direcții) și apoi expresia analitică a sa. Avem:

$$\cos(\bar{V}_1, \bar{V}_2) = \frac{\bar{V}_1 \cdot \bar{V}_2}{\|\bar{V}_1\| \|\bar{V}_2\|} \Rightarrow$$

$$\cos(\bar{V}_1, \bar{V}_2) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Observația V.7. O condiție necesară și suficientă ca doi vectori să fie ortogonali este:

$$\bar{V}_1 \perp \bar{V}_2 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0.$$

Definiția V.15. Cosinusurile unghiurilor pe care le face un vector cu axele reperului cartezian poart numele de *cosinusurile directe* al vectorului considerat.

Fie α, β, γ unghiurile pe care le face $\bar{V} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ cu axele de coordonate, atunci:

$$\cos \alpha = \cos(\bar{V}, \bar{i}) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \beta = \cos(\bar{V}, \bar{j}) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos \gamma = \cos(\bar{V}, \bar{k}) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Expresia analitică a versorului lui $\bar{V}$ este: $\bar{u} = \frac{\bar{V}}{\|\bar{V}\|} = \frac{x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \cos \alpha \bar{i} + \cos \beta \bar{j} + \cos \gamma \bar{k}.$

Exemple:

1. Se dau vectorii $\bar{V}_1 = 2\bar{i} + 3\bar{j} - 4\bar{k}$ și $\bar{V}_2 = 2\bar{j} - \bar{k}$. Să se determine produsul lor scalar, modulele și versorii lor precum și unghiul dintre cei doi vectori.

Soluție: Produsul lor scalar este: $\bar{V}_1 \cdot \bar{V}_2 = 6 + (-1)(-4) = 10$

Modulele lor sunt: $\|\bar{V}_1\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{56}$, $\|\bar{V}_2\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

Versorii celor doi vectori sunt:

$$\bar{u}_1 = \frac{\bar{V}_1}{\|\bar{V}_1\|} = \frac{2}{\sqrt{56}} \bar{i} + \frac{3}{\sqrt{56}} \bar{j} - \frac{4}{\sqrt{56}} \bar{k}, \quad \bar{u}_2 = \frac{\bar{V}_2}{\|\bar{V}_2\|} = \frac{2}{\sqrt{5}} \bar{j} - \frac{1}{\sqrt{5}} \bar{k}$$

Unghiul dintre cei doi vectori este determinat cu ajutorul cosinusului său:

$$\cos(\bar{V}_1, \bar{V}_2) = \frac{\bar{V}_1 \cdot \bar{V}_2}{\|\bar{V}_1\| \|\bar{V}_2\|} \Rightarrow \cos(\bar{V}_1, \bar{V}_2) = \frac{10}{\sqrt{56} \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}}.$$

2. Pentru ce valori ale numărului real m vectorii $\bar{V}_1 = m\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$ și $\bar{V}_2 = \bar{i} + m\bar{j} - 3\bar{k}$ sunt ortogonali?

Soluție: $\bar{V}_1 \perp \bar{V}_2 \Leftrightarrow \bar{V}_1 \cdot \bar{V}_2 = 0$, și deci $3m - 3 = 0 \Rightarrow m = 1.$

Produsul vectorial.

Definiția V.16. Produsul vectorial a doi vectori $\vec{V}_1, \vec{V}_2$, considerați în această ordine, este un vector notat $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$, perpendicular pe vectorii $\vec{V}_1, \vec{V}_2$, orientat astfel încât triedul $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_1 \times \vec{V}_2$ să fie drept (orientarea este dată de regula mâinii drepte sau a burghiului, adică este sensul de înaintare a burghiului astfel încât vectorul $\vec{V}_1$ să se suprapună peste $\vec{V}_2$ pe drumul cel mai scurt), iar modulul este dat de relația:

$$\|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\| = \|\vec{V}_1\| \|\vec{V}_2\| \sin(\vec{V}_1, \vec{V}_2).$$

Propoziția V.5. Produsul vectorial are următoarele proprietăți:

1. Modulul produsului vectorial este un scalar reprezentând aria paralelogramului construit pe cei doi vectori;

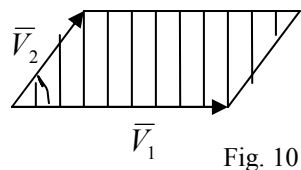


Fig. 10

De aici putem deduce o formulă pentru calculul ariei unui triunghi ABC. Avem:

$$\sigma_{ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\|$$

2. Produsul vectorial se anulează în următoarele situații:

$$\vec{V}_1 = \vec{0} \text{ sau } \vec{V}_2 = \vec{0} \text{ sau } \vec{V}_1 = \vec{V}_2 = \vec{0},$$

$$\sin(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = 0 \Rightarrow (\vec{V}_1, \vec{V}_2) = 0 \text{ sau } (\vec{V}_1, \vec{V}_2) = \pi;$$

3. $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \times \vec{V}_1$ (este anticomutativ);
4. $(a\vec{V}_1) \times (b\vec{V}_2) = (ab)(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2)$, pentru orice scalari a, b ;
5. $\vec{V}_1 \times (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \times \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \times \vec{V}_3$ (este distributiv față de adunarea vectorilor).

Expresia analitică a produsului vectorial

Pornind de la relațiile evidente: $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j},$$

obținem următoarea expresie analitică a produsului vectorial al lui $\vec{V}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ cu $\vec{V}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, în această ordine:

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Exemple:

1. Se dau vectorii $\vec{V}_1 = 4\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ și $\vec{V}_2 = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$. Să se determine versorul unei direcții perpendiculare pe planul determinat de cei doi vectori.

Soluție: Vectorii dați sunt necoliniari $\left(\frac{4}{3} \neq \frac{3}{2}\right)$ și deci direcțiile lor determină într-adevăr un plan. Toate dreptele perpendiculare pe planul determinat de vectorii dați sunt paralele între ele. Astfel, există două direcții (drepte orientate) cu proprietatea din enunț, una având drept versor versorul lui $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$ și cealaltă versorul opus.

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$$

Astfel unul din versori este: $\vec{u} = -\frac{4}{\sqrt{42}}\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{42}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{42}}\vec{k}$.

Celălalt versor este: $-\vec{u} = \frac{4}{\sqrt{42}}\vec{i} - \frac{5}{\sqrt{42}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{42}}\vec{k}$.

2. Fiind date punctele $A(-1,3,1)$, $B(1,1,1)$ și $C(0,-1,2)$ să se determine perimetrul și aria triunghiului pe care aceste îl determină.

Soluție: Calculăm lungimile laturilor triunghiului. Avem:

$$\overline{AB} = 2\vec{i} - 2\vec{j} \Rightarrow \|\overline{AB}\| = \sqrt{8}, \quad \overline{AC} = \vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \|\overline{AC}\| = \sqrt{18},$$

$$\overline{BC} = -\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \|\overline{BC}\| = \sqrt{6}.$$

$$\text{Astfel } P_{ABC} = \sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{6}.$$

Aria este dată de: $\sigma_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overline{AB} \times \overline{AC}\|$.

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k} \Rightarrow \|\overline{AB} \times \overline{AC}\| = \sqrt{44}, \text{ deci } \sigma_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{44} = \sqrt{11}$$

Produsul mixt

Definiția V.17. Produsul mixt a trei vectori $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$, considerați în această ordine, este un scalar, notat $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$, egal cu produsul scalar dintre vectorii $\vec{V}_1$ și $\vec{V}_2 \times \vec{V}_3$, adică,

$$(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \times \vec{V}_3).$$

Observația V.7. Valoarea absolută a produsului mixt este egală cu volumul paralelipipedului construit pe cei trei vectori.

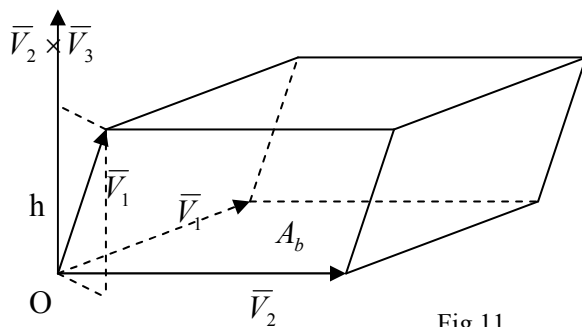


Fig.11

Produsul mixt a trei vectori $\vec{V}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{V}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, $\vec{V}_3 = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$, are următoarea expresie analitică:

$$(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Propoziția V.5. Produsul mixt are următoarele proprietăți:

1. $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) = (\vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_1) = (\vec{V}_3, \vec{V}_2, \vec{V}_1)$,
2. $(a\vec{V}_1, b\vec{V}_2, c\vec{V}_3) = (abc)(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$,
3. Este aditiv în oricare dintre argumentele sale, de exemplu $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3 + \vec{V}_4) = (\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) + (\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_4)$, deoarece
4. $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \lambda\vec{V}_2) = 0$, $(\forall)\lambda \in R$.
5. Trei vectori: $\vec{V}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{V}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ și $\vec{V}_3 = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$ sunt coplanari dacă și numai dacă

$$(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Exemple:

1. Se dau trei forțe: $\vec{F}_1 = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{F}_2 = -\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{F}_3 = -3\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}$. Să se arate că toate acționează în același plan.

Soluție: Folosim condiția necesară și suficientă ca trei vectori să fie coplanari:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & -6 & 2 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Dublul produs vectorial.

Definiția V.18. *Dublul produs vectorial* a trei vectori $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$, considerați în această ordine, este un vector, notat cu $\vec{V}$, dat de egalitatea: $\vec{V} = \vec{V}_1 \times (\vec{V}_2 \times \vec{V}_3)$.

Propoziția V.6. Vectorul $\vec{V} = \vec{V}_1 \times (\vec{V}_2 \times \vec{V}_3)$ este coplanar cu vectorii $\vec{V}_2, \vec{V}_3$ și verifică relația:

$$\vec{V} = \vec{V}_1 \times (\vec{V}_2 \times \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3) \vec{V}_2 - (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) \vec{V}_3,$$

aceasta purtând numele de formula de descompunere a dublului produs vectorial.

V.2. Probleme rezolvate

1. Fie $A(1,2,-1)$, $B(1,0,1)$, $C(-2,1,2)$

Să se calculeze:

- Perimetrul triunghiului ABC;
- Aria triunghiului ABC;
- Unghiul B al triunghiului ABC;
- Versorul direcției vers $(\vec{AC} \times \vec{CB})$;
- Volumul tetraedrului OABC.

Soluție:

a) Perimetrul triunghiului ABC este $P_{\Delta ABC} = \|\vec{AB}\| + \|\vec{AC}\| + \|\vec{BC}\|$

Avem:

$$\vec{AB} = (1-1)\vec{i} + (0-2)\vec{j} + (1+1)\vec{k} = -2\vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow$$

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$\vec{AC} = (-2-1)\vec{i} + (1-2)\vec{j} + (2+1)\vec{k} = -3\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} \Rightarrow$$

$$\|\vec{AC}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{9+1+9} = \sqrt{19}$$

$$\vec{BC} = (-2-1)\vec{i} + (1-0)\vec{j} + (2-1)\vec{k} = -3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \Rightarrow$$

$$\|\vec{BC}\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}.$$

Astfel obținem: $P_{\Delta ABC} = \sqrt{8} + \sqrt{19} + \sqrt{11}$

b) Aria triunghiului ABC este dată de relația:

$$\sigma_{ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\|, \quad \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 6\vec{j} - 6\vec{k}.$$

$$\|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2 + (-6)^2} = \sqrt{16+36+36} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}.$$

$$\sigma_{ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{1}{2} 3\sqrt{10}$$

$$c) \quad \cos \hat{B} = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{\|\overline{BA}\| \cdot \|\overline{BC}\|} = \frac{0}{\|\overline{BA}\| \cdot \|\overline{BC}\|} = 0 \Rightarrow \hat{B} = \frac{\pi}{2}$$

$$d) \quad Vers(\overline{AC} \times \overline{CB}) = \frac{\overline{AC} \times \overline{CB}}{\|\overline{AC} \times \overline{CB}\|}$$

$$\|\overline{AC} \times \overline{CB}\| = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -3 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4\bar{i} + 6\bar{j} + 6\bar{k}. \quad \|\overline{AC} \times \overline{CB}\| = \sqrt{4^2 + 6^2 + 6^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}.$$

$$Vers = \frac{4\bar{i} + 6\bar{j} + 6\bar{k}}{7\sqrt{2}} = \frac{4}{7\sqrt{2}}\bar{i} + \frac{6}{7\sqrt{2}}\bar{j} + \frac{6}{7\sqrt{2}}\bar{k} = \frac{2\sqrt{2}}{7}\bar{i} + \frac{3\sqrt{2}}{7}\bar{j} + \frac{3\sqrt{2}}{7}\bar{k}.$$

e) Volumul tetraedrului V_{OABC} se calculează folosind relația:

$$V_{OABC} = \pm \frac{1}{6} (\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC})$$

$$V_{OABC} = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{6} (-10) = \frac{5}{3}$$

$$V_{OABC} = \frac{5}{3}.$$

2. Fie $A(0, m, 1)$, $B(-1, 3, -1)$, $C(2, -1, 2)$. Să se determine $m \in R$ astfel încât aria triunghiului ABC să fie minimă.

Soluție:

$$\overline{AB} = (-1-0)\bar{i} + (3-m)\bar{j} + (-1-1)\bar{k} = -\bar{i} + (3-m)\bar{j} - 2\bar{k} \Rightarrow$$

$$\overline{AC} = (2-0)\bar{i} + (-1-m)\bar{j} + (2-1)\bar{k} = 2\bar{i} - (1+m)\bar{j} + \bar{k} \Rightarrow$$

$$\overline{BC} = (2+1)\bar{i} + (-1-3)\bar{j} + (2+1)\bar{k} = 3\bar{i} - 4\bar{j} + 3\bar{k} \Rightarrow$$

$$\sigma_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overline{AB} \times \overline{AC}\|$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 3-m & -2 \\ 2 & -1-m & 1 \end{vmatrix} = (1-3m)\bar{i} - 3\bar{j} + (3m-5)\bar{k}$$

$$\sigma_{ABC} = \frac{1}{2} \|(1-3m)\bar{i} - 3\bar{j} + (3m-5)\bar{k}\| = \frac{1}{2} \sqrt{(1-3m)^2 + (-3)^2 + (3m-5)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_{ABC} = \frac{\sqrt{18m^2 - 36m + 35}}{2}$$

Aria triunghiului va fi minimă atunci când expresia $18m^2 - 36m + 35$ va fi minimă. Aflând minimumul funcției de gradul doi

$$\text{obținem: } \min(18m^2 - 36m + 35) = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-1224)}{4 \cdot 18} = 17.$$

Acest minim se obține când $m = \frac{-b}{2a} = \frac{36}{36} = 1$. Astfel $\sigma_{\min} = \frac{\sqrt{17}}{2}$ și se obține pentru $m = 1$, deci pentru $A(0, 1, 1)$.

3. Fie $A(2, m, 1)$, $B(0, -1, m)$, $C(1, -2, -1)$

Se cere:

- a) Să se arate că perimetrul triunghiului ABC este cel puțin egal cu $\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{6}$.
 b) Să se afle valorile pozitive ale lui m pentru care aria triunghiului ABC este $2\sqrt{3}$
 c) Să se afle volumul tetraedrului $OABC$ și distanța de la O la planul ABC .
 d) Valorile lui m astfel încât punctele O, A, B, C să fie coplanare?

Soluție:

$$a) \overrightarrow{AB} = (0-2)\vec{i} + (-1-m)\vec{j} + (m-1)\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = -2\vec{i} - (1+m)\vec{j} + (m-1)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = (1-2)\vec{i} + (-2-m)\vec{j} + (-1-1)\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = -\vec{i} - (2+m)\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{BC} = (1-0)\vec{i} + (-2+1)\vec{j} + (-1-m)\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \vec{i} - \vec{j} - (1+m)\vec{k} .$$

Astfel avem:

$$\Rightarrow P_{ABC} = \sqrt{6+2m^2} + \sqrt{9+4m+m^2} + \sqrt{3+2m+m^2}$$

$$P_{ABC} = \sqrt{6+2m^2} + \sqrt{5+(m+2)^2} + \sqrt{2+(m+1)^2} \geq \sqrt{6} + \sqrt{5} + \sqrt{2}$$

$$b) \sigma_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -(1+m) & m-1 \\ -1 & -(2+m) & -2 \end{vmatrix} = (m^2+3m)\vec{i} - (m+3)\vec{j} + (m+3)\vec{k} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (m+3)(m\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = |m+3|\sqrt{m^2+2} \Rightarrow \sigma_{ABC} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \Rightarrow \frac{|m+3|\sqrt{m^2+2}}{2} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow |m+3|\sqrt{m^2+2} = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$(m+3)^2(m^2+2) = 48 \Leftrightarrow m^4 + 6m^3 + 11m^2 + 12m - 30 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(m-1)(m^3 + 7m^2 + 18m + 30) = 0 .$$

Astfel singura rădăcină pozitivă a ecuației este $m=1$, căci al doilea factor este ≥ 30 , pentru m pozitiv.

$$c) \text{ Volumul tetraedrului } OABC \text{ este dat de: } V_{OABC} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})|.$$

$$V_{OABC} = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & m & 1 \\ 0 & -1 & m \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{|m^2+4m+3|}{6}$$

$$\text{Dar } V_{OABC} = \frac{1}{3} \sigma_{ABC} \cdot d(O, ABC) \Rightarrow d(O, (ABC)) = \frac{3 \cdot V_{OABC}}{\sigma_{ABC}}$$

$$\text{Cum } \sigma_{ABC} = \frac{|m+3|\sqrt{m^2+2}}{2} \Rightarrow d(O, (ABC)) = \frac{\frac{|(m+1)(m+3)|}{2}}{\frac{|m+3|\sqrt{m^2+2}}{2}} = \frac{|m+1|}{\sqrt{m^2+2}}$$

d) O, A, B, C sunt coplanare $\Leftrightarrow (\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}) = 0 \Leftrightarrow |(m+1)(m+3)| = 0 \Leftrightarrow$
 $m = -1$ sau $m = -3 \Leftrightarrow m \in \{-3, -1\}$.

4. Fie $A(1, 0, m), B(1, 2, -m), C(0, -1, 2)$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\overline{AB}, \overline{BC}$ să fie ortogonali.

Soluție:

$$\overline{AB} = (1-1)\vec{i} + (2-0)\vec{j} + (-m-m)\vec{k} \Rightarrow \overline{AB} = 2\vec{j} - 2m\vec{k}$$

$$\overline{BC} = (0-1)\vec{i} + (-1-2)\vec{j} + (2+m)\vec{k} \Rightarrow \overline{BC} = -\vec{i} - 3\vec{j} + (2+m)\vec{k}.$$

Vectorii $\overline{AB}, \overline{BC}$ sunt ortogonali $\Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 0$.

$$\overline{AB} \cdot \overline{BC} = -6 - 2m(2+m) = -6 - 4m - 2m^2$$

$-6 - 4m - 2m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m + 3 = 0$. Cum $\Delta = -8 < 0$ nu există valori reale ale lui m pentru care vectorii să fie ortogonali.

5. Fie $A(1, m, 0), B(2, 1, -1), C(-1, 2, -1)$.

Se cere:

- Să se afle valorile lui $m \in \mathbb{R}$ astfel încât perimetrul triunghiului ABC să fie minim
- Să se afle valorile lui $m \in \mathbb{R}$ astfel încât aria triunghiului ABC să fie minimă
- Să se afle valorile lui $m \in \mathbb{R}$ astfel încât aria triunghiului ABC să fie 3
- Să se afle volumul tetraedrului $OABC$ și distanța de la O la planul ABC . Există $m \in \mathbb{R}$ astfel încât distanța să fie 1? Dar $\sqrt{2}$?
- Există valori naturale ale distanței de la O la planul ABC care să nu poată fi obținute indiferent de poziția lui A , de coordonatele numere reale, în spațiu? Există plane ABC situate la orice distanță, număr natural, de punctul O ?
- Valorile lui m astfel încât punctele O, A, B, C să fie coplanare?

Soluție:

a) Perimetrul triunghiului ABC este $P_{\triangle ABC} = \|\overline{AB}\| + \|\overline{AC}\| + \|\overline{BC}\|$.

Avem:

$$\overline{AB} = \vec{i} + (1-m)\vec{j} - \vec{k} \Rightarrow \|\overline{AB}\| = \sqrt{2 + (1-m)^2}$$

$$\overline{AC} = -2\vec{i} + (1-m)\vec{j} - \vec{k} \Rightarrow \|\overline{AC}\| = \sqrt{5 + (1-m)^2}$$

$$\overline{BC} = -3\vec{i} + \vec{j} \Rightarrow \|\overline{BC}\| = \sqrt{10}$$

Astfel obținem: $P_{\triangle ABC} = \sqrt{2 + (1-m)^2} + \sqrt{5 + (1-m)^2} + \sqrt{10}$.

Observăm că $P_{\triangle ABC} = \sqrt{2 + (1-m)^2} + \sqrt{5 + (1-m)^2} + \sqrt{10} \geq \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{10}$, care reprezintă deci valoarea minimă a perimetrului ce se obține dacă $1-m=0$, adică pentru $m=1$.

b) Aria triunghiului ABC este dată de relația:

$$\sigma_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overline{AB} \times \overline{AC}\|, \quad \|\overline{AB} \times \overline{AC}\| = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1-m & -1 \\ -2 & 1-m & -1 \end{vmatrix} = 3\bar{j} + 3(1-m)\bar{k}.$$

$$\|\overline{AB} \times \overline{BC}\| = 3\sqrt{1+(1-m)^2} \Rightarrow \sigma_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overline{AB} \times \overline{AC}\| = \frac{3}{2} \sqrt{1+(1-m)^2}$$

Observăm că $\sigma_{ABC} = \frac{3}{2} \sqrt{1+(1-m)^2} \geq \frac{3}{2}$, deci valoarea minimă a ariei este $\frac{3}{2}$ și se obține pentru $m = 1$.

$$c) \quad \sigma_{ABC} = \frac{3}{2} \sqrt{1+(1-m)^2} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{1+(1-m)^2} = 2 \Leftrightarrow (1-m)^2 = 1 \Leftrightarrow m = 0 \text{ sau } m = 2.$$

d) Volumul tetraedrului V_{OABC} este:

$$V_{OABC} = \pm \frac{1}{6} (\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC})$$

$$V_{OABC} = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \pm \frac{3m}{6} = \frac{|m|}{2}$$

$$d(O, (ABC)) = \frac{3 \cdot V_{OABC}}{\sigma_{ABC}} = \frac{\frac{3|m|}{2}}{\frac{3}{2} \sqrt{1+(1-m)^2}} = \frac{|m|}{\sqrt{1+(1-m)^2}}$$

$$d(O, (ABC)) = 1 \Leftrightarrow \frac{|m|}{\sqrt{1+(1-m)^2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{m^2}{2-2m+m^2} = 1 \Leftrightarrow 2-2m=0 \Leftrightarrow m = 1$$

$$d(O, (ABC)) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|m|}{\sqrt{1+(1-m)^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{m^2}{2-2m+m^2} = 2 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 4 = 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$$

$$d(O, (ABC)) = k \Leftrightarrow \frac{|m|}{\sqrt{1+(1-m)^2}} = k \Leftrightarrow \frac{m^2}{2-2m+m^2} = k^2 \Leftrightarrow (1-k^2)m^2 - 2km + 2k = 0.$$

$$\text{Ecuația admite soluții reale dacă și numai dacă } \Delta \geq 0 \Leftrightarrow k(2k^2 + k - 2) \geq 0 \Leftrightarrow k \in \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}, 0 \right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{17}}{4}, +\infty \right).$$

Astfel, pentru orice valori naturale ale lui k există puncte A în spațiu, cu coordonatele numere reale, astfel încât

$$d(O, (ABC)) = k.$$

Există valori naturale ale lui k , astfel încât oricare ar fi A în spațiu, cu coordonatele numere reale, $d(O, (ABC)) \neq k$?

$$f) O, A, B, C \text{ sunt coplanare} \Leftrightarrow (\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}) = 0 \Leftrightarrow |m| = 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

VI. ELEMENTE DE GEOMETRIE ANALITICĂ

VI.1. Dreapta în spațiu

Observația VI.1. O dreaptă în spațiu poate fi determinată de :

1. un punct și o direcție dată;
2. două puncte distincte;
3. intersecția a două plane.

Definiția VI.1. Dacă d este o dreaptă oarecare și $\vec{a} \in V^3, \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{a} \parallel d$ spunem că $\vec{a}$ este un vector director al dreptei d .

1) Dreapta determinată de un punct și de un vector director $\vec{a}(l, m, n)$

Propoziția VI.1. Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct dat din spațiul euclidian tridimensional și $\vec{a} \in V^3, \vec{a} \neq \vec{0}$ un vector dat. Atunci există o unică dreaptă d ce trece prin M_0 și are vector director pe $\vec{a}$.

Justificarea este imediată deoarece printr-un punct trece o singură dreaptă paralelă cu o direcție dată (direcția vectorului $\vec{a}$).

Fie M un punct arbitrar din spațiu, $M \in d \Leftrightarrow \overline{M_0M}$ coliniar cu $\vec{a}$.

Acest lucru se realizează $\Leftrightarrow (\exists) t \in \mathbf{R}$ astfel încât:

$$\overline{M_0M} = t\vec{a} \Leftrightarrow \vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{a} \Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}.$$

Ecuția $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}$ poartă numele de *ecuația vectorială a dreptei ce trece prin punctul de vector de poziție $\vec{r}_0$ și are ca vector director pe $\vec{a}$* .

Considerând $\vec{a}(l, m, n)$ și proiectând ecuația vectorială pe axele reperului cartezian considerat obținem relațiile:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}.$$

Aceste relații poartă denumirea de *ecuațiile parametrice ale dreptei ce trece prin $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și are vector director pe $\vec{a}(l, m, n)$* . Dacă din ecuațiile parametrice eliminăm parametrul t , deducem șirul de rapoarte egale:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

ce poartă numele de *ecuațiile carteziane canonice ale dreptei ce trece prin $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și are ca vector director pe $\vec{a}(l, m, n)$* .

Observația VI.2. Facem următoarea precizare: dacă numitorul unui raport este 0, atunci numărătorul corespunzător trebuie să se anuleze.

2) Dreapta determinată de două puncte distincte

Propoziția VI.2. Fie $M_i(x_i, y_i, z_i) \quad i = \overline{1, 2}$ două puncte distincte date din spațiul euclidian tridimensional. Prin cele două puncte trece o dreaptă unică ale cărei ecuații carteziane sunt: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$.

Justificarea este imediată deoarece un vector director pentru dreapta căutată este vectorul $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$.

3) Unghiul dintre două drepte

Definiția VI.2. Se numește dreaptă orientată perechea $(d, \bar{d})$, unde $\bar{d}$ reprezintă un vector director al dreptei d .

Unghiul dintre două drepte orientate d_1, d_2 , de vectori directori $\bar{d}_1$ și $\bar{d}_2$, notat θ , este unghiul dintre vectorii $\bar{d}_1$ și $\bar{d}_2$, dat de:

$$\cos \theta = \frac{\langle \bar{d}_1, \bar{d}_2 \rangle}{\|\bar{d}_1\| \|\bar{d}_2\|}, \theta \in [0, \pi].$$

Acest unghi se numește *unghiul orientat al dreptelor* d_1, d_2 .

Prin *unghiul neorientat al dreptelor* d_1, d_2 , înțelegem unghiul ascuțit dintre cele două drepte (neorientate). El se notează cu φ și este dat de relația:

$$\cos \varphi = \frac{|\langle \bar{d}_1, \bar{d}_2 \rangle|}{\|\bar{d}_1\| \|\bar{d}_2\|}, \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

4) Distanța de la un punct la o dreaptă

Considerăm o dreaptă d de ecuație vectorială: $\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{a}$ și un punct $A \notin d$. După cum se știe distanța de la A la orice punct de pe dreaptă este mai mare sau egală cu distanța de la A la A' , unde A' reprezintă proiecția ortogonală a lui A pe dreaptă (piciorul perpendicularei duse din A pe dreaptă).

Definiția VI.3. Numim distanța de la punctul A la dreapta d numărul real pozitiv notat $\rho(A, d)$, dat de relația:

$$\rho(A, d) = \min_{M_0 \in d} \|M_0 A\| \text{ adică } \rho(A, d) = \|AA'\|.$$

Propoziția VI.3. Distanța de la un punct A la o dreaptă d , de direcție $\bar{d}(l, m, n)$, ce trece prin $M_0(x_0, y_0, z_0)$, este :

$$\rho(A, d) = \frac{\|M_0 A \times \bar{d}\|}{\|\bar{d}\|}.$$

5) Poziția relativă a două drepte în spațiu

Fie d_1, d_2 două drepte din spațiu, de ecuații vectoriale:

$$\begin{aligned} d_1 : \bar{r} &= \bar{r}_1 + t\bar{a}_1, \\ d_2 : \bar{r} &= \bar{r}_2 + t\bar{a}_2. \end{aligned}$$

Cele două drepte pot fi:

- Coplanare
 - Paralele (n-au nici un punct comun iar $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ sunt coliniari);
 - Confundate (au un punct comun iar $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ sunt coliniari);
 - Concurente (au un punct comun iar $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ sunt necoliniari);
- Necoplanare.

Propoziția VI.4. Dreptele d_1, d_2 sunt coplanare dacă și numai dacă $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \overline{M_1 M_2}) = 0$, unde $M_1(\bar{r}_1) \in d_1$ și $M_2(\bar{r}_2) \in d_2$.

VI.2. Planul în spațiu

Definiția VI.4. Fie π un plan dat. Un vector $\bar{n} \in V^3, \bar{n} \neq \bar{0}$, perpendicular pe planul π , se numește vector normal la planul π .

Definiția VI.5. O dreaptă d , perpendiculară pe planul π se numește normală la planul π .

Definiția VI.6. Perechea formată dintr-un plan π și un vector normal la acel plan, $\bar{n} \in V^3, \bar{n} \neq \bar{0}$, se numește plan orientat și se notează $(\pi, \bar{n})$.

Planul împarte spațiul în două semispații: semispațiul pozitiv, mulțimea $S_+ = \{M \in E^3 / \overline{M'M} = t\bar{n}, t > 0\}$, unde M' reprezintă proiecția ortogonală a lui M pe planul π , și semispațiul negativ, mulțimea $S_- = \{M \in E^3 / \overline{M'M} = t\bar{n}, t < 0\}$.

1. Planul determinat de un punct și un vector normal

Propoziția VI.5. Fie $M_0 \in E^3$ și $\bar{n} \in V^3, \bar{n} \neq \bar{0}$ fixat, atunci există un unic plan π ce trece prin M_0 și are ca vector normal pe $\bar{n}$.

Justificarea este imediată deoarece printr-un punct trece un singur plan perpendicular pe o direcție dată.

Evident avem:

$$M \in \pi \Leftrightarrow \overline{M_0M} \perp \bar{n} \Leftrightarrow \langle \overline{M_0M}, \bar{n} \rangle = 0.$$

Considerând $M_0(\bar{r}_0)$ și $M(\bar{r})$, relația precedentă devine:

$$\langle (\bar{r} - \bar{r}_0), \bar{n} \rangle = 0.$$

Ea se numește ecuația vectorială a planului care trece prin $M_0(\bar{r}_0)$ și are ca vector normal pe $\bar{n}$.

Dacă $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și $\bar{n} = A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}$, ecuația precedentă devine:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Ea se numește ecuația carteziană a planului care trece prin $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și are ca vector normal pe $\bar{n} = A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}$.

Prelucrând această ecuație găsim succesiv relația:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

unde $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.

Propoziția VI.6. Un plan este caracterizat analitic printr-o ecuație de gradul I în variabilele x, y, z , de forma $Ax + By + Cz + D = 0$, cu $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, $|A| + |B| + |C| \neq 0$.

Se poate demonstra și reciproc, și anume că o ecuație de gradul I de forma celei din propoziția precedentă, reprezintă ecuația unui plan ce trece printr-un punct ale cărui coordonate reprezintă o soluție particulară a ecuației considerate, și care are ca vector normal vectorul are cărui componente scalare sunt coeficienții necunoscutelor din ecuația dată.

Ecuația de mai sus poartă numele de ecuația carteziană generală a planului.

Exemple:

1) Ecuația $-x + 2y + 1 = 0$ reprezintă în $\mathbb{R}^3$ ecuația unui plan de vector normal $\bar{n}(-1, 2, 0)$ ce trece prin $M(1, 0, a), a \in \mathbb{R}$. În $\mathbb{R}^2$ ecuația precedentă reprezintă ecuația unei drepte.

2. Planul determinat de un punct și doi vectori necoliniari

Definiția VI.7. Un vector $\bar{a} \in V^3, \bar{a} \neq \bar{0}$ se numește vector director pentru planul π dacă este paralel cu acest plan.

Propoziția VI.7. Fie un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ dat și doi vectori necoliniari $\vec{a}$ și $\vec{b}$, atunci există un unic plan ce trece prin M_0 și are ca vectori directori pe $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

Justificarea rezultă din faptul că două drepte concurente determină un unic plan (cele două drepte au vectori directori pe $\vec{a}$, respectiv pe $\vec{b}$ și trec prin M_0).

În mod evident un punct $M \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}, \vec{a}, \vec{b}$ sunt vectori coplanari, adică $\Leftrightarrow (\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}, \vec{b}) = 0$.

Dacă avem $M_0(\vec{r}_0)$ și $M(\vec{r})$, obținem: $(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{a}, \vec{b}) = 0$.

Aceasta poartă numele de *ecuația vectorială a planului ce trece prin $M_0(\vec{r}_0)$ și are ca vectori directori pe $\vec{a}$ și $\vec{b}$* .

Dacă $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M(x, y, z)$, $\vec{a}(l_1, m_1, n_1)$ și $\vec{b}(l_2, m_2, n_2)$ ecuația precedentă este echivalentă cu ecuația :

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0,$$

Această ecuație poartă denumirea de *ecuația carteziană a planului determinat de $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și de doi vectori necoliniari $\vec{a}(l_1, m_1, n_1)$ și $\vec{b}(l_2, m_2, n_2)$* .

3. Planul determinat de trei puncte necoliniare

Propoziția VI.8. Fie $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i=1,2,3$, puncte necoliniare. Atunci există și este unic un plan π ce conține cele trei puncte.

$M \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ sunt coplanari $\Leftrightarrow (\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Această ecuație se numește *ecuația carteziană a planului determinat de punctele necoliniare $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i=1,2,3$* .

4. Unghiul dintre două plane

Unghiul dintre două plane orientate cu vectorii normali $\vec{n}_1$, respectiv $\vec{n}_2$ este φ dat de:

$$\cos \varphi = \frac{|\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle|}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|}, \quad \varphi \in [0, \pi],$$

și poartă numele de *unghiul orientat al planelor considerate*.

Prin *unghiul neorientat al planelor* date înțelegem numărul real $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dat de egalitatea : $\cos \theta = \frac{|\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle|}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|}$.

Definiția VI.8. Numim *distanță de la punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ la planul $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$, numărul real pozitiv notat $\rho(M_0, \pi)$ definit prin: $\rho(M_0, \pi) = \min_{A \in \pi} \|\overrightarrow{M_0A}\|$.*

Observația VI.3. Distanța de la un punct la un plan reprezintă de fapt distanța dintre punctul considerat și proiecția ortogonală a acestuia pe plan, adică $\rho(M_0, \pi) = \|\overrightarrow{M_0M'_0}\|$, unde M'_0 reprezintă proiecția lui M_0 pe planul π .

Distanța de la punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ la planul $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ este dată de:

$$\rho(M_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

5. Poziția relativă a două plane

Considerăm planele $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Planele pot fi:

- Paralele, dacă nu au nici un punct comun, adică $\Leftrightarrow$ sistemul $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ este incompatibil,

$$\text{adică } \Leftrightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1 \text{ și } \Leftrightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 2,$$

$$\text{adică } \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$$

- Confundate, dacă ele coincid, adică $\Leftrightarrow$ sistemul $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ este compatibil dublu nedeterminat,

adică

$$\Leftrightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 1.$$

- Secante, dacă intersecția lor este o dreaptă, adică $\Leftrightarrow$ sistemul $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ este compatibil simplu

nedeterminat, adică

$$\Leftrightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 2.$$

Observația VI.4. O dreaptă d poate fi dată și ca intersecția a două plane. Ecuația ei se scrie astfel:

$$d : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases},$$

condiție la care adăugăm faptul că planele nu sunt paralele, adică rang

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2.$$

a) Direcția dreptei este dată de produsul vectorial al vectorilor normali la cele două plane, adică de:

$$\vec{d} = (A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k}) \times (A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}).$$

b) Fasciculul de plane ce trece prin dreapta d este de ecuație :

$$r(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + s(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \quad r^2 + s^2 \neq 0.$$

(Prin fascicul de plane determinat de dreapta d înțelegem mulțimea tuturor planelor care conțin dreapta d .)

6. Unghiul dintre o dreaptă și un plan. Perpendiculara comună a două drepte

Definiția VI.9. Unghiul dintre o dreaptă orientată, de direcție $\vec{d}$, și planul orientat de normala $\vec{n}$ este prin definiție unghiul φ dat de relația :

$$\sin \varphi = \frac{\langle \vec{n}, \vec{d} \rangle}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{d}\|}, \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

Definiția VI.10. O dreaptă perpendiculară pe două drepte d_1, d_2 date și care intersectează fiecare din aceste drepte se numește perpendiculara comună a celor două drepte.

Observația VI.5. Dacă cele două drepte d_1, d_2 sunt paralele sau confundate atunci există o infinitate de drepte perpendiculare pe cele două drepte considerate ce le intersectează.

Observația VI.6. Dacă cele două drepte d_1, d_2 sunt concurente în punctul P , atunci există o unică dreaptă care este perpendiculară pe ambele drepte și le intersectează. Aceasta este dreapta ce trece prin P și este perpendiculară pe planul determinat de ele.

Observația VI.7. Dacă cele două drepte d_1, d_2 sunt necoplanare se știe că există și este unică o dreaptă d perpendiculară pe ambele și care le intersectează. În acest caz perpendiculara comună este dreapta de intersecție dintre planul π_1 , care conține dreapta d_1 și direcția perpendicularei comune, cu planul π_2 , care conține dreapta d_2 și direcția perpendicularei comune.

Pentru a determina ecuațiile perpendicularei comune a două drepte oarecare d_1 și d_2 de vectori directori $\vec{d}_1, \vec{d}_2$ se poate proceda astfel:

- se găsește direcția perpendicularei comune $\vec{n} = \vec{d}_1 \times \vec{d}_2$;
- se scrie ecuația planului π_1 ce trece prin d_1 și conține $\vec{n}$;
- se scrie ecuația planului π_2 ce trece prin d_2 și conține $\vec{n}$;
- intersecția celor două plane este perpendiculara comună căutată, notată cu d .

Dacă $\vec{d}_1 = A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k}$, $\vec{d}_2 = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}$,

$\vec{n} = \vec{d}_1 \times \vec{d}_2 = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$, $M_1(x_1, y_1, z_1) \in d_1$, $M_2(x_2, y_2, z_2) \in d_2$, atunci ecuațiile dreptei d sunt :

$$\begin{cases} \pi_1 : \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0 \\ \pi_2 : \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0 \end{cases}.$$

VI.3. Probleme rezolvate

1) Să se scrie ecuațiile parametrice ale dreptei ce trece prin $A(-1, 3, 0)$ și este paralelă cu d_1 , cunoscând ecuația vectorială a acesteia:

$$\vec{r} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} + t(-\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}).$$

Să se afle apoi distanța de la $B(-2, 1, -1)$ la această dreaptă.

Observăm că dreapta d_1 are vector director pe $\vec{d}_1 = -\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ iar acesta este vector director și pentru dreapta cerută.

Astfel ecuațiile parametrice ale dreptei căutate sunt:

$$\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 3 + t \\ z = -2t \end{cases} \quad t \in R$$

Calculăm distanța de la B la această dreaptă, notată cu d , folosind formula:

$$\rho(B, d) = \frac{\|\overline{AB} \times \vec{d}_1\|}{\|\vec{d}_1\|}$$

$$\overline{AB} = (-2+1)\vec{i} + (1-3)\vec{j} + (-1-0)\vec{k} = -\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}.$$

$$\text{Astfel } \overline{AB} \times \vec{d}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 5\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}.$$

$$\|\overline{AB} \times \vec{d}_1\| = \sqrt{25+1+9} = \sqrt{35}$$

$$\|\vec{d}_1\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$\text{Obținem: } \rho(B, d) = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{6}}.$$

2) Să se scrie ecuațiile parametrice ale dreptei ce trece prin punctele $A(1,2,-1)$ și $B(2,0,1)$. Să se afle apoi distanța de la $P(-2,4,0)$ la această dreaptă.

Ecuatiile carteziene ale dreptei AB sunt:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-2}{0-2} = \frac{z+1}{1+1} \Leftrightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{2}.$$

Un vector director al ei este $\vec{v}(1,-2,2)$.

$$\text{Distanța de la P al AB este dată de: } \rho(P, AB) = \frac{\|\overline{AP} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

$$\overline{AP} = (-2-1)\vec{i} + (4-2)\vec{j} + (0+1)\vec{k} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}.$$

$$\text{Astfel } \overline{AP} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 7\vec{j} + 4\vec{k}.$$

$$\|\overline{AP} \times \vec{v}\| = \sqrt{36+49+16} = \sqrt{101}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3 \quad \text{Obținem: } \rho(P, AB) = \frac{\sqrt{101}}{3}.$$

3) Fie d_1 și d_2 două drepte paralele cu $\vec{d}_1(1,0,1)$ și $\vec{d}_2(-1,1,0)$. Să se găsească :

a) Unghiul dintre d_1 și d_2 considerate drepte orientate, apoi drepte neorientate.

b) Ecuatiile parametrice ale dreptei perpendiculare pe d_1 și d_2 care trece prin $A(1,-1,3)$.

c) Ecuația unei drepte ce trece prin $B(0,2,-1)$ și este paralelă cu dreapta de la punctul b).

d) Distanța de la A la dreapta de la punctul c).

Soluție:

a) Aplicăm formula cosinusului unghiului dintre cei doi vectori directori: $\Rightarrow$

$$\cos \varphi = \frac{\langle \vec{d}_1, \vec{d}_2 \rangle}{\|\vec{d}_1\| \|\vec{d}_2\|} = \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

Dacă dreptele sunt neorientate atunci, notând cu α unghiul dintre ele, avem:

$$\cos \alpha = \frac{|\langle \vec{d}_1, \vec{d}_2 \rangle|}{\|\vec{d}_1\| \|\vec{d}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

b) Fie d_3 dreapta căutată. Atunci $\left. \begin{matrix} d_3 \perp d_1 \\ d_3 \perp d_2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \vec{d}_1 \times \vec{d}_2 = \vec{d}_3$, adică

$$\Rightarrow \vec{d}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{d}_3 = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \vec{d}_3(-1, -1, 1)$$

Ecuațiile parametrice sunt:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 - t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

c) Dacă dreapta este paralelă cu $d_3 \Rightarrow$ că are același vector director

$$\Rightarrow \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \Rightarrow \frac{x}{-1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{1} \text{ (dreapta } d_4 \text{)}.$$

d) Aplicăm formula distanței:

$$d(A, d_4) = \frac{\|\overline{BA} \times \vec{d}_4\|}{\|\vec{d}_4\|},$$

unde $\vec{d}_4 = \vec{d}_3(-1, -1, 1)$.

$$\overline{BA} = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\overline{BA} \times \vec{d}_4 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 5\vec{j} - 4\vec{k}.$$

$$\text{Atunci obținem: } \|\overline{BA} \times \vec{d}_4\| = \sqrt{1+25+16} = \sqrt{42}$$

$$\text{Astfel distanța este: } d(A, d_4) = \frac{\sqrt{42}}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{\frac{42}{3}} = \sqrt{14}.$$

4) Să se calculeze distanța de la $A(-1, 2, -1)$ la dreapta $d: \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$.

Soluție:

Determinăm direcția lui d .

$$\vec{d} = (\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}) \times (-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow \vec{d}(3,1,2)$$

$$d(A, d) = \frac{\|\overline{BA} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}, \text{ unde } B \in d.$$

Coordonatele lui B reprezintă o soluție particulară a sistemului ce determină dreapta d .

$$\text{Considerăm } z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ -x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow B(-1, 1, 0) \Rightarrow \overline{BA} = \vec{j} - \vec{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{BA} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k} \Rightarrow$$

$$d(A, d) = \frac{\sqrt{9+9+9}}{\sqrt{9+1+4}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{14}}$$

5) Să se scrie ecuația planului ce trece prin $A(0, 1, -1)$ și este paralel cu dreptele:

$$d_1: \frac{x-3}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2} \text{ și } d_2: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Soluție:

Determinăm câte un vector director pentru fiecare din cele două drepte.

$\vec{d}_1(-1, 1, 2)$ și $\vec{d}_2(-2, 3, 1)$. Cei doi vectori (necoliniari) sunt vectori directori pentru planul cerut în enunțul problemei. Astfel ecuația planului este:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z+1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -5x - 3y - z + 2 = 0$$

6) Să se scrie ecuația planului ce trece prin $A(1, 3, -2)$ și prin $d: \begin{cases} x - 2y + 3z + 2 = 0 \\ -x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$.

Soluție:

Scriem fasciculul de plane ce trece prin d :

$$\pi_\lambda: x - 2y + 3z + 2 + \lambda(-x + 2y + 3) = 0 \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Determinăm acum care dintre plane trece prin punctul A :

$$1 - 6 - 6 + 2 + \lambda(-1 + 6 + 3) = 0, \text{ adică } \lambda = \frac{9}{8}$$

Deci planul căutat are ecuația:

$$\pi: x - 2y + 3z + 2 + \frac{9}{8}(-x + 2y + 3) = 0, \text{ adică } -x + 2y + 24z + 43 = 0$$

7) Să se scrie ecuația planului ce trece prin $M(0,-2,3)$ și este perpendicular pe planele

$$\alpha: -x + 2y - z + 3 = 0$$

$$\beta: 2x + 3z - 1 = 0$$

Soluție:

Determinăm vectorii normali la cele două plane.

$$\vec{n}_1(-1, 2, -1) \quad \vec{n}_2(2, 0, 3)$$

Planul pe care vrem să-l determinăm trebuie să fie paralel cu $\vec{n}_1$ și $\vec{n}_2$. Astfel ecuația sa este dată de relația:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y+2 & z-3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 6x + y - 4z + 14 = 0.$$

8) Stabiliți poziția relativă a dreptelor:

$$d_1: \begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ x - y - 3z + 2 = 0 \end{cases} \quad d_2: \begin{cases} x + y + 4z - 3 = 0 \\ -x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Soluție:

Fie $A(-1, 1, 0) \in d_1$, $B(1, 2, 0) \in d_2$

$$\vec{a}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k} \text{ vector director al dreptei } d_1 \text{ și}$$

$$\vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k} \text{ vector director al dreptei } d_2.$$

Dreptele nu sunt paralele deoarece $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ nu sunt coliniari.

Determinăm vectorul $\overrightarrow{AB}(2, 1, 0)$ și obținem apoi:

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} -4 & 5 & -3 \\ -3 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 7, \text{ adică vectorii nu sunt coplanari.}$$

Dreptele d_1 și d_2 sunt astfel necoplanare.

VII. CUADRICE ȘI CONICE

VII.1. Definiții, ecuații vectoriale

Fie E^3 raportat la un reper cartezian ortonormat $R = \{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$.

Definiția 1. Se numește **cuadrică** (sau **suprafață algebrică de ordinul al doilea**) mulțimea Γ a punctelor $M(x, y, z) \in E^3$ ale căror coordonate verifică o ecuație de forma :

$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0$, unde $a_{ij} = a_{ji}, b_i, c$ sunt numere reale, $i, j = 1, 2, 3$, așa încât:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \geq 1$$

Ecuația din definiție se numește **ecuația carteziană generală a unei quadrice**.

Fie $M(x, y, z) \in \Gamma$, de vector de poziție $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, $\bar{b} = b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{k}$ și aplicația liniară simetrică $u \in \text{End}(V^3)$ care în raport cu $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ are matricea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Ecuația carteziană generală a quadricelor este echivalentă cu ecuația:

$$\langle \bar{r}, u(\bar{r}) \rangle + 2 \langle \bar{b}, \bar{r} \rangle + c = 0,$$

numită **ecuația vectorială a quadricelor**.

Definiția 2. Scalarul $\delta = \det A$ se numește **discriminantul mic al quadricelor**, iar $\Delta = \det \bar{A}$ se numește **discriminantul mare al quadricelor**, unde

$$\bar{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{vmatrix}$$

Dacă în E^2 considerăm reperul cartezian ortonormat $R\{O; \bar{i}, \bar{j}\}$ atunci:

Definiția 3. Se numește **conică** (sau **curbă algebrică de ordinul al doilea**) mulțimea γ a punctelor $M(x, y) \in E^2$ ale căror coordonate verifică o ecuație de forma: $f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$ (numită **ecuația carteziană generală a conice**), unde $a_{ij} = a_{ji}, b_i, c \in R$, $i = 1, 2$ și $\text{rang} A \geq 1$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Notății analogice celor din cazul quadricelor conduc la ecuația:

$$\langle \bar{r}, u(\bar{r}) \rangle + 2 \langle \bar{b}, \bar{r} \rangle + c = 0,$$

numită **ecuația vectorială a conice** γ .

Definiția 4. Scalarul $\delta = \det A$ se numește **discriminantul mic al conice** γ , iar scalarul $\Delta = \det \bar{A}$ se numește **discriminantul mare al conice** γ , unde

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}$$

Definiția 5. Dacă discriminantul mare al unei quadrice (conice) este nenul quadrica (conica) se numește **nedeformată**. În caz contrar spunem că este **deformată**.

Observația 1. δ este invariant la schimbări de repere ortonormate.

Observația 2. Δ este invariant la schimbări de repere ortonormate.

Notând $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = \bar{a} \cdot \bar{b}$, ecuația vectorială a quadricii (respectiv conice) se scrie:

$$\bar{r} \cdot u(\bar{r}) + 2\bar{b} \cdot \bar{r} + c = 0.$$

VII.2. Intersecția unei quadrice cu o dreaptă

Fie quadrica $\Gamma: \bar{r} \cdot u(\bar{r}) + 2\bar{b} \cdot \bar{r} + c = 0$ și dreapta $d: \bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{a}, t \in \mathbf{R}$. Punctele $M(\bar{r}) \in \Gamma \cap d$ se determină rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \bar{r} \cdot u(\bar{r}) + 2\bar{b} \cdot \bar{r} + c = 0 \\ \bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{a}, t \in \mathbf{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\bar{r}_0 + t\bar{a}) \cdot u(\bar{r}_0 + t\bar{a}) + 2\bar{b} \cdot (\bar{r}_0 + t\bar{a}) + c = 0 \\ \bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{a}, t \in \mathbf{R} \end{cases}$$

Prima ecuație se scrie sub forma:

$$\bar{a} \cdot u(\bar{a})t^2 + 2(u(\bar{r}_0) + \bar{b}) \cdot \bar{a}t + \bar{r}_0 \cdot u(\bar{r}_0) + 2\bar{b} \cdot \bar{r}_0 + c = 0, (*)$$

și este o ecuație de gradul 2 în t . Rădăcinile reale ale ei introduse în a doua ecuație din sistem dau vectorii de poziție ai punctelor de intersecție a quadricii cu dreapta d .

Cazuri ce pot fi întâlnite:

A) Vectorul $\bar{a}$ are proprietatea: $\bar{a} \cdot u(\bar{a}) \neq 0$.

1) Dacă ecuația (*) are două rădăcini reale distincte t_1, t_2 , dreapta d intersectează quadrica Γ în două puncte distincte $M_1(\bar{r}_0 + t_1\bar{a}), M_2(\bar{r}_0 + t_2\bar{a})$. Se spune că dreapta d este **secantă** quadricii Γ .

2) Dacă ecuația de mai sus are două rădăcini reale și egale ($t_1 = t_2$) dreapta d intersectează quadrica Γ într-un singur punct $M(\bar{r}_0 + t_1\bar{a})$. Dreapta d se numește în acest caz **tangentă** la quadrica Γ .

3) Dacă ecuația de mai sus are rădăcini complexe dreapta d nu intersectează quadrica. Spunem că dreapta d este **nesecantă** quadricii Γ .

B) Vectorul $\bar{a}$ este așa încât $\bar{a} \cdot u(\bar{a}) = 0$.

1) Dacă $(u(\bar{r}_0) + \bar{b}) \cdot \bar{a} \neq 0$ ecuația de mai sus devenind o ecuație de ordinul întâi are o singură rădăcină reală t_1 . Deci, dreapta d intersectează quadrica într-un singur punct $M_1(\bar{r}_0 + t_1\bar{a})$.

2) Dacă $(u(\bar{r}_0) + \bar{b}) \cdot \bar{a} = 0$ și $\bar{r}_0 \cdot u(\bar{r}_0) + 2\bar{b} \cdot \bar{r}_0 + c = 0$, atunci orice număr real t este rădăcină a ecuației date și în consecință orice punct al dreptei d este punct al quadricii Γ . Spunem că dreapta d este **generatoare rectilinie** a quadricii Γ .

Deci, d este **generatoarea rectilinie** a quadricii $\Gamma \Leftrightarrow$ sunt îndeplinite condițiile:

$$\begin{aligned} \bar{a} \cdot u(\bar{a}) &= 0 \\ (u(\bar{r}_0) + \bar{b}) \cdot \bar{a} &= 0 \\ \bar{r}_0 \cdot u(\bar{r}_0) + 2\bar{b} \cdot \bar{r}_0 + c &= 0 \end{aligned}$$

3) Dacă $(u(\bar{r}_0) + \bar{b}) \cdot \bar{a} = 0$ și $\bar{r}_0 \cdot u(\bar{r}_0) + 2\bar{b} \cdot \bar{r}_0 + c \neq 0$ dreapta d nu intersectează quadrica Γ .

Definiția 6. Spunem că direcția $\bar{a}$ este **asimptotică** pentru quadrica Γ dacă orice dreaptă de vector director $\bar{a}$ intersectează quadrica Γ într-un singur punct, nu o intersectează sau este o generatoare rectilinie.

Deci $\bar{a}$ este direcție asimptotică pentru quadrica $\Gamma \Leftrightarrow \bar{a} \cdot u(\bar{a}) = 0$.

Definiția 7. O dreaptă d de direcție asimptotică care nu are nici un punct comun cu quadrica sau aparține quadricii se numește **asimptotă** pentru quadrica Γ .

Deci, o dreaptă $d: \bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{a}$ este asimptotă pentru quadrica Γ dacă și numai dacă ecuația de gradul al doilea în necunoscuta t este imposibilă sau se reduce la o identitate. Așadar d este asimptotă dacă și numai dacă $\bar{a} \cdot u(\bar{a}) = 0$ și $(u(\bar{r}_0) + \bar{b}) \cdot \bar{a} = 0$ pentru orice punct $\bar{r}_0$ al dreptei d . Vectorul de poziție $\bar{r}$ al unui punct oarecare al asimptotei verifică ecuația: $(u(\bar{r}) + \bar{b}) \cdot \bar{a} = 0$, care este ecuația unui plan, numit **plan asimptot al quadricii corespunzător direcției asimptotice** $\bar{a}$.

Temă: caracterizați intersecția dintre o conică cu o dreaptă și noțiunea de direcție asimptotică, respectiv asimptotă pentru conice).

VII.3. Centru pentru o quadrică (conică)

Definiția 8. Se numește **centru** al unei quadricii (conice) un punct față de care quadrica (conica) este simetrică.

Teorema 1. Punctul $C(\bar{r}_0)$ este centru al quadricii $\Gamma \Leftrightarrow$ are loc egalitatea:

$$u(\bar{r}_0) + \bar{b} = \bar{0}$$

Trecând la coordonate, teorema de mai sus se poate enunța astfel :

Teorema 2. Pentru ca punctul $C(x_0, y_0, z_0)$ să fie centru al quadricii Γ este necesar și suficient ca (x_0, y_0, z_0) să fie soluție a sistemului

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + b_1 = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + b_2 = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + b_3 = 0 \end{cases}$$

Observația 3. Sistemul este echivalent cu sistemul următor:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Observația 4. Determinantul sistemului de mai sus este tocmai discriminantul mic δ al quadricii Γ .

Sistemul de mai sus poate fi sau nu compatibil. În funcție de aceasta avem următoarea clasificare a quadricilor:

- 1) Dacă $\text{rang} A = 3$ quadrica Γ se numește **quadrică cu centrul unic**.
- 2) Dacă $\text{rang} A = 2$ și sistemul de mai sus este compatibil spunem că Γ este **quadrică cu o dreaptă de centre**.
- 3) Dacă $\text{rang} A = 1$ și sistemul este compatibil spunem că Γ este **quadrică cu un plan de centre**.
- 4) Dacă sistemul este incompatibil spunem că Γ este **quadrică fără centru**.

Observația 5. Deci, putem spune că dacă $\delta \neq 0$ quadrica are centru unic, iar dacă $\delta = 0$ quadrica este fără centru unic.

Teorema 3. Pentru ca punctul $C(x_0, y_0)$ să fie centru al conice γ este necesar și suficient ca (x_0, y_0) să fie o soluție a sistemului:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + b_1 = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + b_2 = 0 \end{cases} \quad \text{care este echivalent cu sistemul: } \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Definiția 9. Dacă $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ spunem că γ este conică cu centru unic, iar pentru $\delta = 0$ spunem că este

conică fără centru unic.

VII.4. Plan tangent într-un punct al cuadricei

Fie $M_0(\bar{r}_0)$ un punct al cuadricei $\Gamma: \bar{r} \cdot u(\bar{r}) + 2\bar{b} \cdot \bar{r} + c = 0$.

Teorema 4. Dreapta $d: \bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{a}$ este tangentă cuadricei Γ în $M_0 \Leftrightarrow$

$$(u(\bar{r}_0) + \bar{b}) \cdot \bar{a} = 0$$

Definiția 10. Locul geometric al tangentelor la cuadricele Γ în punctul $M_0 \in \Gamma$ se numește plan tangent la cuadricele Γ în M_0 .

Teorema 5. Planul tangent la cuadricele Γ în punctul $M_0(\bar{r}_0) \in \Gamma$ are ecuația vectorială:

$$\bar{r}_0 \cdot u(\bar{r}) + \bar{b} \cdot (\bar{r} + \bar{r}_0) + c = 0.$$

Observația 6. Se obișnuiește să se spună că ecuația planului tangent în M_0 la cuadricele Γ se obține din ecuația cuadricei prin dedublare.

Observația 7. Trecând la coordonatele vectoriale, dacă: $\bar{r}_0 = x_0\bar{i} + y_0\bar{j} + a_0\bar{k}$ și $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + a\bar{k}$, ecuația planului tangent se scrie:

$$a_{11}x_0x + a_{22}y_0y + a_{33}z_0z + a_{12}(x_0y + y_0x) + a_{13}(x_0z + z_0x) + a_{23}(y_0z + z_0y) + b_1(x_0 + x) + b_2(y_0 + y) + c = 0.$$

Observația 8. Ecuația tangentei la curba γ într-un punct $C(x_0, y_0)$ al său este: $a_{11}x_0x + a_{12}(x_0y + y_0x) + a_{22}y_0y + b_1(x_0 + x) + b_2(y_0 + y) + c = 0$.

VII.5. Reducerea la forma canonică

Dacă în raport cu reperul cartezian ortonormat $R = \{O: \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ ecuația din definiția 1. a cuadricei Γ (sau ecuația conicele γ) are o formă simplă, aceasta este numită **ecuația canonică a cuadricei Γ (conicele γ)**.

Teorema 6. Fie cuadricele Γ de ecuație:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0,$$

atunci există un reper cartezian ortonormat $R' = \{O': \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$ în raport cu care ecuația sa are una și numai una din următoarele forme simple:

$$I). \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + D = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}^*, \quad D \in \mathbf{R}, \quad (1)$$

$$II). \lambda_1 X^2 + \lambda^2 Y^2 + 2hZ = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}^*, \quad h \in \mathbf{R}^*, \quad (2)$$

$$III). \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + D = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}^*, \quad D \in \mathbf{R}, \quad (3)$$

$$IV). \lambda_1 X^2 + 2hY = 0, \quad \lambda_1, h \in \mathbf{R}^*, \quad (4)$$

$$V). \lambda_1 X^2 + D = 0, \quad \lambda \in \mathbf{R}^*, \quad D \in \mathbf{R}, \quad (5)$$

Teorema 7. Dacă conicele γ are în raport cu reperul cartezian ortonormat $R = \{O: \bar{i}, \bar{j}\}$ ecuația:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2b_1x + 2b_2y + c = 0, \text{ atunci există un reper cartezian ortonormat } R' = \{O': \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\} \text{ în raport}$$

cu care ecuația sa are una și numai una din formele:

$$I) \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + D = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}^*, \quad D \in \mathbf{R}.$$

$$II) \lambda_1 X^2 + 2hY = 0, \quad \lambda_1, h \in \mathbf{R}^*.$$

$$III) \lambda_1 X^2 + D = 0, \quad \lambda_1 \in \mathbf{R}^*, \quad D \in \mathbf{R}$$

VII.6. Studiul ecuațiilor canonice ale cuadricelor

Presupunem că reperul cartezian ortonormat $R\{O: \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ este reperul în raport cu care cuadricele au ecuația canonică (numit și *reper canonic*).

I. Fie ecuația canonică a quadricii: $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + D = 0$

1) Dacă $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ au același semn, iar D are semn contrar cu ele, ecuația se scrie:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad \text{unde } a^2 = -\frac{D}{\lambda_1}, \quad b^2 = -\frac{D}{\lambda_2}, \quad c^2 = -\frac{D}{\lambda_3} \text{ cu } a, b, c > 0.$$

În acest caz quadrica se numește **elipsoid real**.

Numerele pozitive a, b, c se numesc *semiaxe elipsoidului*.

Dacă $a=b=c$ atunci E definește o sferă cu centru în originea reperului.

Se observă că dacă $M(x_0, y_0, z_0) \in E$ atunci și punctele $M_1(-x_0, y_0, z_0)$, $M_2(x_0, -y_0, z_0)$, $M_3(x_0, y_0, -z_0)$ aparțin elipsoidului. Aceasta arată că elipsoidul E este simetric față de planele de coordonate xOy , xOz , yOz (numite și *plane principale ale elipsoidului*). Axele de coordonate sunt axe de simetrie ale elipsoidului E . Punctul de intersecție a celor trei plane de simetrie este originea reperului. Acesta este centrul elipsoidului.

Elipsoidul E este intersectat de axele Ox , Oy , Oz în punctele $A(a, 0, 0)$, $A'(0, a, 0)$, $B(0, b, 0)$, $B'(0, -b, 0)$, respectiv $C(0, 0, c)$, $C'(0, 0, -c)$, numite *vârfurile elipsoidului*.

Intersecțiile elipsoidului cu planele xOy , xOz , yOz sunt elipsele:

$$e_1: \begin{cases} z = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \end{cases}, \quad e_2: \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}, \quad \text{respectiv} \quad e_3: \begin{cases} x = 0 \\ \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

Dacă facem intersecțiile cu planul $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$, obținem:

$$e_\alpha: \begin{cases} z = \alpha \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{\alpha^2}{c^2} \end{cases}$$

care reprezintă o elipsă reală (situată în planul $z = \alpha$) dacă $|\alpha| < c$, elipsă imaginară dacă $|\alpha| > c$, dacă $\alpha = -c$ intersecția se reduce la punctul $C'(0, 0, -c)$, iar dacă $\alpha = c$ intersecția este punctul $C(0, 0, c)$.

Reprezentarea grafică a elipsoidului E este dată în figura următoare.

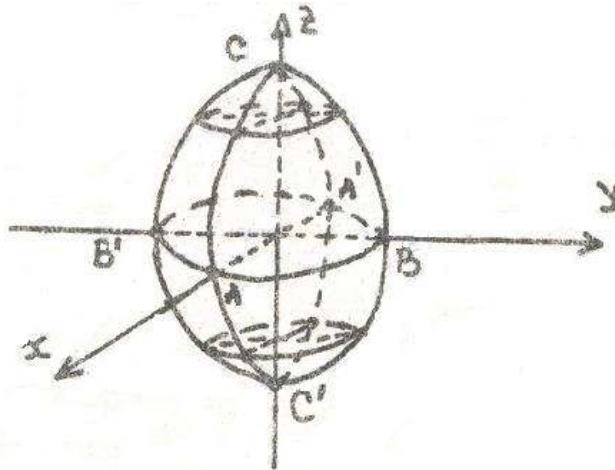


Fig.1. Elipsoid

2) Dacă $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, D$ au același semn ecuația se scrie:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0, \text{ unde } a^2 = \frac{D}{x_1}, \quad b^2 = \frac{D}{x_2}, \quad c^2 = \frac{D}{x_3},$$

iar quadrica se numește **elipsoid imaginar**.

3) Dacă λ_1, λ_2 au același semn, iar λ_3, D au același semn, dar contrar cu λ_1, λ_2 , cu notații evidente, ecuația quadricii se scrie:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad a, b, c > 0,$$

și reprezintă un **hiperboloid cu o pânză**.

Se arată, ca și în cazul elipsoidului, că planele de coordonate, axele și originea reperului sunt plane de simetrie, axe de simetrie și, respectiv, centru pentru hiperboloidul cu o pânză.

Axele Ox, Oy intersectează quadrica H_1 în punctele $A(a, 0, 0), A'(-a, 0, 0)$, respectiv $B(0, b, 0), B'(0, -b, 0)$ numite **vârfurile quadricii**, iar axa Oz nu intersectează suprafața.

Intersecțiile hiperboloidului cu o pânză cu planele de coordonate și cu plane paralele cu acestea vor ajuta la reprezentarea grafică a sa. Astfel, intersecțiile cu planele yOz, xOz sunt hiperbolele:

$$h_1 : \begin{cases} x = 0 \\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}, \quad h_2 : \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}.$$

Secțiunile cu planele $z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ au ecuațiile:

$$e_\alpha : \begin{cases} z = \alpha \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{\alpha^2}{c^2} \end{cases}, \text{ care sunt elipse reale.}$$

Reprezentarea grafică a hiperboloidului cu o pânză este dată în figura următoare.

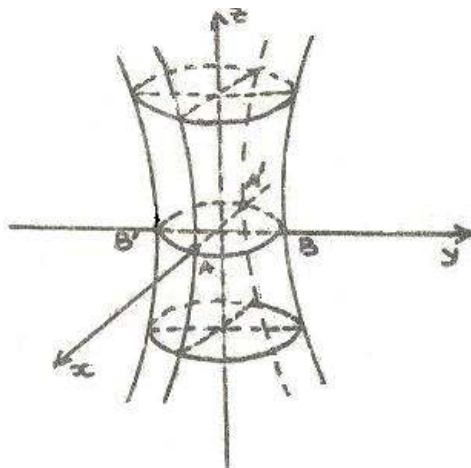


Fig.2. Hiperboloid cu o pânză

4) Dacă λ_1, λ_2, D au același semn iar λ_3 semn contrar cu D , ecuația se poate scrie:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0, \quad a, b, c > 0,$$

și quadrica se numește **hiperboloid cu două pânze**.

Planele de coordonate, axele de coordonate și originea reperului sunt plane de simetrie, axe de simetrie și, respectiv, centru pentru hiperboloidul cu două pânze. Axele Ox , Oy nu intersectează quadrica, iar axa Oz o intersectează în punctele $C(0,0,c)$, $C'(0,0,-c)$. Secțiunile hiperboloidului cu două pânze cu planele xOz , yOz sunt date de sistemele:

$$h_1 : \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \end{cases}, \text{ respectiv } h_2 : \begin{cases} x = 0 \\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \end{cases} \text{ și sunt hiperbole.}$$

Secționând quadrica cu planele $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$, obținem:

-elipse reale sau imaginare după cum $|\alpha| > c$ sau $|\alpha| < c$,

$$e_\alpha : \begin{cases} z = \alpha \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{\alpha^2}{c^2} - 1 \end{cases}$$

-punctul $C(0,0,c)$ pentru $\alpha = c$ și punctul $C'(0,0,-c)$ pentru $\alpha = -c$.

Reprezentarea grafică pentru hiperboloidul cu două pânze este dată în figura următoare.

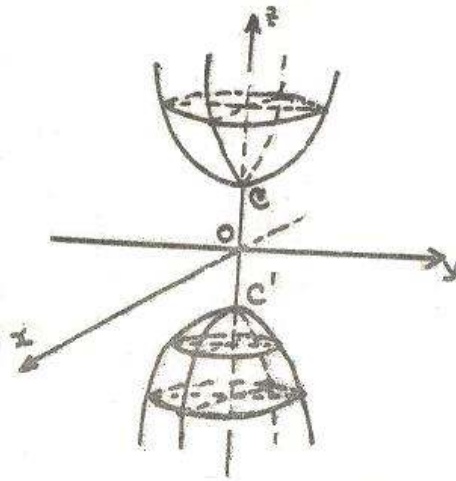


Fig.3. Hiperboloid cu două pânze

5) Dacă λ_1, λ_2 au același semn, λ_3 semn contrar, iar $D = 0$, ecuația are forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad a, b, c > 0,$$

iar quadrica se numește **con pătratic real**.

Planele de coordonate, axele de coordonate și originea reperului sunt, respectiv, plane de simetrie. *Centrul conului* se mai numește și *vârf*. Dacă $M_0(x_0, y_0, z_0) \in C_P$ atunci punctul $M(tx_0, ty_0, tz_0)$, aparține conului oricare ar fi $t \in \mathbf{R}$. Astfel, orice punct al dreptei OM_0 aparține conului, adică dreapta OM_0 este o generatoare rectilinie a conului.

Secțiunile în con cu plane ce trec prin axa Oz sunt drepte concurente (în vârf). De exemplu, secțiunea cu planul xOy este formată din drepte:

$$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \end{cases}, \text{ adică } \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0 \end{cases}$$

Secțiunile cu planele $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$, sunt elipse reale.

$$e_{\alpha} : \begin{cases} z = \alpha \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = \frac{\alpha^2}{c^2} \end{cases}$$

(intersecția cu planul $z = 0$ este vârful conului).

Reprezentarea grafică a conului este dată de figura următoare.

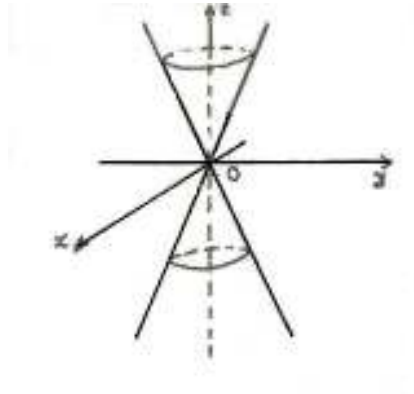


Fig.4. Con

6) Pentru $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de același semn, iar $D=0$ quadrica se numește *con pătratic imaginar*, iar ecuația se poate scrie:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad a, b, c > 0.$$

Observația 9. *Elipsoizii, hiperbolizii și conurile pătratice au centru unic și anume originea reperului în raport cu care ecuația quadricii are forma canonică.*

II. Fie ecuația canonică a quadricii: $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2hz = 0$, $\lambda_1, \lambda_2, h \in \mathbf{R}^*$.

1) Fie λ_1, λ_2 de același semn. Putem presupune că h are semn contrar cu ele. Ecuația quadricii se scrie sub forma

:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

unde $a^2 = -\frac{h}{\lambda_1}$, $b^2 = -\frac{h}{\lambda_2}$, $a, b > 0$, iar quadrica se numește **paraboloid eliptic**.

Se observă că dacă $M(x_0, y_0, z_0) \in (PE)$ atunci și punctele $M_1(-x_0, y_0, z_0), M_2(x_0, -y_0, z_0)$ aparțin paraboloidului eliptic. Deci, planele yOz, xOz sunt plane de simetrie pentru paraboloidul eliptic. Rezultă că axa Ox este axă de simetrie a suprafeței.

Pentru a ne da seama de forma paraboloidului eliptic vom face secțiuni cu planele de coordonate și cu plane paralele cu planul xOy .

Planul xOy este tangent la (PE) în origine: planele xOz, yOz intersectează quadrica după parabolele:

$$P_1 : \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} = 2z \end{cases}, \text{ respectiv } P_2 : \begin{cases} x = 0 \\ \frac{y^2}{b^2} = 2z \end{cases}$$

Planele $z = \alpha$, $\alpha > 0$ intersectează paraboloidul eliptic după elipsele reale:

$$e_{\alpha} : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\alpha \end{cases}$$

iar planele $z = \alpha$, $\alpha < 0$ nu-l intersectează. Axele de coordonate intersectează suprafața (PE) într-un singur punct, originea reperului, numit vârf.

Reprezentarea grafică a paraboloidului eliptic este dată în figura următoare.

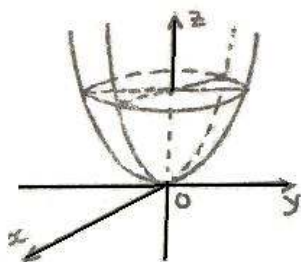


Fig. 5. Paraboloid eliptic

2) Fie λ_1, λ_2 de semne diferite. Putem presupune că h are același semn cu λ_2 . Ecuația quadricii devine:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \quad a, b > 0, \text{ iar quadrica se numește } \textit{paraboloid hiperbolic}.$$

Această quadrică este simetrică față de planele xOy , zOy și față de axa Ox .

Axele de coordonate intersectează (PH) în originea reperului (punct numit vârf). Intersecțiile cu planele xOz , yOz sunt respectiv parabolele:

$$P_1 : \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} = 2z \end{cases}, \quad P_2 : \begin{cases} x = 0 \\ -\frac{y^2}{b^2} = 2z \end{cases}.$$

Intersecțiile cu planele $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, sunt hiperbolele: $h_\alpha : \begin{cases} z = \alpha \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2\alpha \end{cases}$, iar intersecțiile cu planele

$x = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ sunt parabolele: $P_\alpha : \begin{cases} x = \alpha \\ \frac{y^2}{b^2} = \frac{\alpha^2}{a^2} - 2z \end{cases}$

Reprezentarea grafică a paraboloidului hiperbolic este dată în figura următoare.

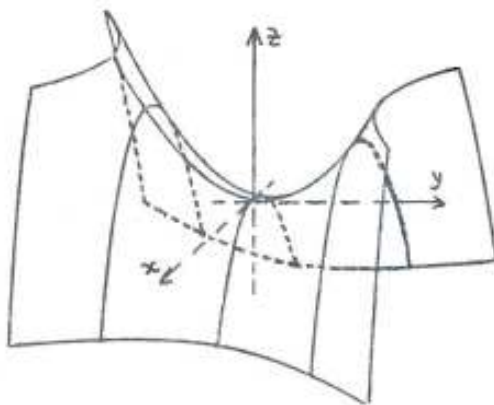


Fig. 6. Paraboloid hiperbolic

Observația 10. Paraboloizii eliptici nu au centru

III. Fie ecuația canonică a quadricii: $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + D = 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$

1) Dacă λ_1, λ_2 au același semn, iar D semn contrar, ecuația se scrie:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \text{ unde } a^2 = -\frac{D}{\lambda_1}, \quad b^2 = \frac{D}{\lambda_2}, \quad a, b > 0,$$

iar quadrica se numește **cilindru eliptic real**.

2) Dacă λ_1, λ_2 au semne contrare, iar D același semn cu λ_2 (de exemplu)
ecuația se scrie sub forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

1. unde $a^2 = -\frac{D}{\lambda_1}, b^2 = \frac{D}{\lambda_2}, a, b > 0$, iar ecuația se numește **cilindru hiperbolic**. El este reprezent în figura următoare:

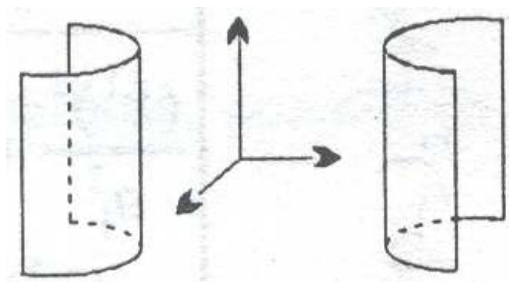


Fig. 7. Cilindru hiperbolic

3) Dacă $D=0$, iar λ_1, λ_2 au semne contrare ecuația devine, în notații evidente:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad a, b > 0,$$

iar quadrica reprezintă două **plane reale concurente**.

4) Dacă $D=0$, iar λ_1, λ_2 au același semn, ecuația se scrie:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad a, b > 0,$$

și quadrica reprezintă două **plane imaginare concurente după o dreaptă reală**.

5) Dacă λ_1, λ_2, D au același semn ecuația se scrie:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0, \quad a, b > 0,$$

și quadrica se numește **cilindru eliptic imaginar**.

IV. Fie ecuația canonică a quadricii: $\lambda_1 x^2 + 2hy = 0$, $\lambda_1, h \in \mathbf{R}^*$

Putem presupune că λ_1, h au semne contrare (în caz contrar facem schimbarea de coordonate

$x = \zeta$, $y = -\eta$, $z = \tau$). Cu notația $a^2 = -\frac{h}{\lambda_1}$, ecuația se scrie:

$$\frac{x^2}{a^2} = 2y, \quad a > 0,$$

și quadrica se numește **cilindru parabolic**.

Se observă că dacă $M(x_0, y_0, z_0) \in (CP)$ atunci și $M_1(-x_0, y_0, z_0)$ aparține cilindrului parabolic. Deci, planul yOz este plan de simetrie pentru (CP) . De asemenea, se observă că axa Oy este situată pe cuadrică.

Secțiunile cu planele $y = \alpha$, $\alpha \in R$, sunt parabolele:

$$P_\alpha : \begin{cases} y = \alpha \\ \frac{x^2}{a^2} = 2z \end{cases},$$

iar intersecțiile cu planele $z = \alpha$, $\alpha > 0$, sunt drepte paralele de ecuații:

$$d : \begin{cases} z = \alpha \\ \frac{x}{a} = \sqrt{2\alpha} \end{cases} \quad d' : \begin{cases} z = \alpha \\ \frac{x}{a} = -\sqrt{2\alpha} \end{cases}.$$

Reprezentarea grafică a cilindrului parabolic este dată de figura următoare.

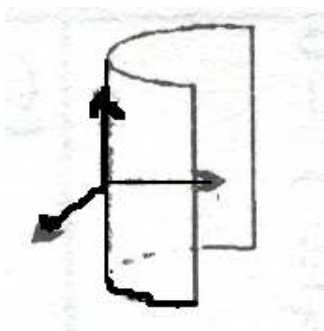


Fig. 8. Cilindru parabolic

Observația 11. Cilindrii parabolici nu au centru.

V. Fie ecuația canonică a quadricii: $\lambda_1 x^2 + D = 0$, $\lambda_1 \neq 0$.

1) Dacă λ_1, D au semne contrare, cu notația $a^2 = -\frac{D}{\lambda_1}$, ecuația se scrie sub forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - 1 = 0, \quad a > 0, \quad \text{și quadrica reprezintă două *plane paralele*.$$

2) Dacă λ_1, D au același semn ecuația se scrie:

$$\frac{x^2}{a^2} + 1 = 0, \quad a > 0, \quad \text{și quadrica reprezintă două *plane paralele imaginare*.$$

3) Dacă $D=0$ ecuația capătă forma: $x^2 = 0$, și quadrica reprezintă două *plane confundate*.

Observația 12. Singurele quadrice nedegenerate sunt: elipsoizii, hiperboloizii (cu o pânză sau cu două pânze) și parabolozii. Restul quadricelor sunt degenerate.

VIII. ELEMENTE DE GEOMETRIA DIFERENȚIALĂ A CURBELOR

VIII.1. Noțiunea de curbă, moduri de reprezentare

Definiția 1. Se numește arc elementar de curbă o mulțime $\gamma \subset E^3$ (sau E^2), pentru care există $\varphi: (t_1, t_2) \subset \mathbf{R} \rightarrow \gamma$, bijectivă, continuă și cu φ^{-1} continuă (φ se numește homeomorfism și se mai spune că γ este homeomorfă cu un interval deschis al dreptei reale).

Exemple:

1. Un segment de dreaptă (AB) este un arc elementar de curbă.

Fie A, B puncte ale dreptei $d: \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}, t \in \mathbf{R}$, așa încât $A(\vec{r}_0 + t_1\vec{a}), B(\vec{r}_0 + t_2\vec{a})$. Se constată ușor că segmentul (AB) este homeomorf cu interevalul (t_1, t_2) .

Într-adevăr, aplicația $\varphi: (t_1, t_2) \rightarrow [AB]$, definită prin $\varphi(t) = M$, unde $M(\vec{r}_0 + t\vec{a})$ este un homeomorfism.

2. Orice semicerc γ este un arc elementar de curbă.

Alegând în planul semicercului reperul cartezian ortonormat $\{\vec{O}, \vec{i}, \vec{j}\}$ astfel încât O să coincidă cu centrul cercului, axa Ox să conțină capetele semicercului, iar axa Oy să intersecteze semicercul într-un punct de ordonată pozitivă (vezi figura 1), aplicația $\varphi: (0, \pi) \rightarrow \gamma$ definită prin:

$\varphi(t) = M(R \cos t, R \sin t)$ este un homeomorfism (R raza semicercului).

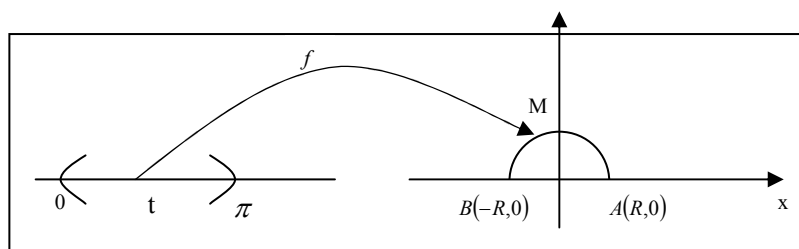


Fig.1.

Definiția 2. Se numește curbă simplă în E^3 (sau E^2) o mulțime γ de puncte din E^3 (respectiv E^2) care este conexă și are proprietatea că pentru orice punct al său există o vecinătate V astfel încât $V \cap \gamma$ să fie arc elementar de curbă.

Precizăm că o mulțime se numește conexă dacă nu poate fi descompusă în două submulțimi nevide așa încât să existe două mulțimi deschise și disjuncte care să le conțină.

1. Orice curbă simplă este homeomorfă fie cu un interval deschis al dreptei reale, fie cu un cerc (în acest din urmă caz, curba se va numi curbă simplă închisă)

2. În particular, orice arc elementar de curbă este o curbă simplă.

Definiția 3. Spunem că mulțimea Γ de puncte din E^3 (sau E^2) este o curbă dacă ea este imaginea unei curbe simple γ_1 printr-o aplicație local homeomorfă.

Precizăm că aplicație $f: \gamma_1 \rightarrow \Gamma$ este local homeomorfă dacă oricare ar fi $x \in \gamma_1$ există o vecinătate a sa V_1 astfel încât restricția lui f la V_1 ($f: V_1 \rightarrow f(V_1)$) să fie un homeomorfism (adică bijectivă, continuă, cu inversa continuă).

Definiția 4. Un punct M al curbei Γ se numește nod sau punct multiplu dacă există cel puțin două puncte $P_1, P_2 \in \gamma_1$ astfel încât $f(P_1) = f(P_2) = M$.

În figura 2 sunt reprezentate câteva tipuri de curbe

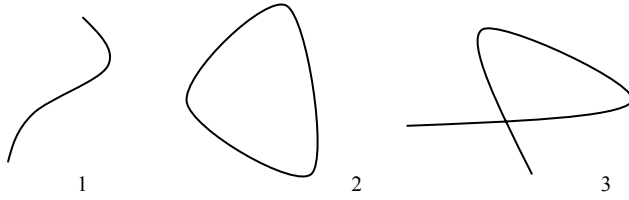


Fig.2.

Curba numărul 1 este o curbă simplă, cea de la numărul 2 este o curbă simplă închisă, iar cea curba numărul 3 prezintă un nod.

În continuare vom considera E^3 raportat la reperul cartezian ortonormat $R = \{\vec{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Fie $\gamma \subset E^3$ un arc elementar de curbă. Atunci există $a, b \in \mathbf{R}, a < b$ așa încât γ este $\varphi(a, b)$.

Notăm prin V_γ mulțimea vectorilor de poziție, față de reperul R , ai punctelor arcului γ . Aplicația $h: \gamma \rightarrow V_\gamma$ definită prin $h(M) = \overrightarrow{OM}$, oricare ar fi $M \in \gamma$ este bijectivă; ea este în același timp și bicontinuu (h și h^{-1} sunt continue) în sensul că: $\|\overrightarrow{MN}\| \rightarrow 0$ implică $\|h(M) - h(N)\| \rightarrow 0$ și reciproc. Deci, h este un homeomorfism între γ și V_γ .

Rezultă că avem un homeomorfism al lui (a, b) pe V_γ , obținut prin compunerea homeomorfismelor h și φ .

Prin urmare, s-a găsit o aplicație vectorială de variabilă reală $\vec{r}: (a, b) \rightarrow V_\gamma$, definită prin $\vec{r}(t) = h(\varphi(t))$, oricare ar fi $t \in (a, b)$.

Definiția 5. Ecuația $\vec{r} = \vec{r}(t), t \in (a, b)$, se numește ecuația vectorială (reprezentarea vectorială) a arcului elementar γ . Spunem că ea este o reprezentare parametrică (o parametrizare) a arcului elementar γ .

Observația 1. Parametrizarea unui arc elementar de curbă nu este unică.

Într-adevăr, dacă $(\alpha, \beta) \subseteq \mathbf{R}$ și $\mu: (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ este un homeomorfism, aplicația vectorială $\vec{r}_1: (\alpha, \beta) \rightarrow V_\gamma$ definită prin $\vec{r}_1 = \vec{r} \circ \mu$ este o altă reprezentare parametrică a arcului elementar γ .

Exemple:

Aplicațiile $\vec{r}: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow V^2$ $\vec{r}(t) = \cos t \cdot \vec{i} + \sin t \cdot \vec{j}$, $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\vec{r}_1: (0, 1) \rightarrow V^2$ $\vec{r}_1(t) = t\vec{i} + \sqrt{1-t^2}\vec{j}$,

$t \in (0, 1)$ sunt două reprezentări parametrice ale aceluiași arc elementar γ în E^2 .

Dacă $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ și $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, ecuația vectorială a arcului elementar γ este echivalentă cu

ecuațiile:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in (a, b)$$

numite ecuațiile parametrice (scalare) ale arcului elementar γ .

Definiția 6. Vom spune că punctul $M(x(t), y(t), z(t)) \in \gamma$ are coordonata curbilinie t și notăm $M(t)$.

Dacă din relațiile precedente eliminăm parametrul t obținem reprezentarea implicită a unei curbe:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Observația 2. Fie $U \subset \mathbf{R}^3$ un deschis și $F, G: U \rightarrow \mathbf{R}$ două funcții de clasă $C^1(U)$. Considerăm mulțimea:

$$\gamma = \{(x, y, z) \in U \mid F(x, y, z) = 0, G(x, y, z) = 0\}.$$

În general, aceasta nu este o curbă. Dacă $a = (x_0, y_0, z_0) \in \gamma$ este un punct astfel încât matricea jacobiană

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix}$$

are rangul 2 în punctul a , atunci există o vecinătate W a lui a astfel încât $\gamma \cap W$ să fie o curbă.

Dacă rangul matricei jacobiene anterioare a funcțiilor F, G în raport cu x, y, z este 2 în orice punct $a \in \gamma$, atunci rezultă că mulțimea γ este o curbă (se mai spune că aceasta este obținută ca intersecție a două suprafețe).

Definiția 7. Spunem că $\bar{r} : (a, b) \rightarrow V^3$ este de clasă C^k pe (a, b) dacă este derivabilă de k ori și derivata de ordinul k este continuă. Notăția folosită în acest caz este $\bar{r} \in C^k(a, b)$.

Un arc elementar de curbă spunem că este regulat de ordinul k dacă există cel puțin o parametrizare a sa $\bar{r} = \bar{r}(t)$, $t \in (a, b)$ regulată de ordinul k .

Mulțimea $r(a, b) = \{(x(t), y(t), z(t)) \mid t \in (a, b)\}$ se numește suportul (sau urma) arcului elementar.

Definiția 8. O curbă se numește regulată de ordinul k dacă fiecare arc elementar său este regulat de ordinul k .

Definiția 9. Spunem că reprezentările parametrice $\bar{r} \in C^k(a, b)$, $\bar{r}_1 \in C^k(c, d)$ ale unui arc elementar regulat de ordinul k sunt echivalente, cu aceeași orientare, dacă există o funcție $\mu : (c, d) \rightarrow (a, b)$ bijectivă, strict crescătoare, $\mu \in C^k(c, d)$ și $\mu^{-1} \in C^k(a, b)$ așa încât $\bar{r}_1 = \bar{r} \circ \mu$.

Funcția μ se numește schimbare de parametru.

Exemple:

Aplicațiile $\bar{r} : (0, \pi) \rightarrow V^2$ $\bar{r}(t) = \cos t \cdot \bar{i} + \sin t \cdot \bar{j}$, $t \in (0, \pi)$ și $\bar{r}_1 : (-1, 1) \rightarrow V^2$, $\bar{r}_1(t) = -t\bar{i} + \sqrt{1-t^2} \cdot \bar{j}$, $t \in (-1, 1)$ sunt reprezentări parametrice ale aceluiași arc elementar γ (fig.3.), echivalente, cu aceeași orientare, deoarece luând $\mu : (0, \pi) \rightarrow (-1, 1)$, $\mu(t) = -\cos t$, se verifică ușor condițiile din definiția precedentă. (Aici, k este orice număr natural).

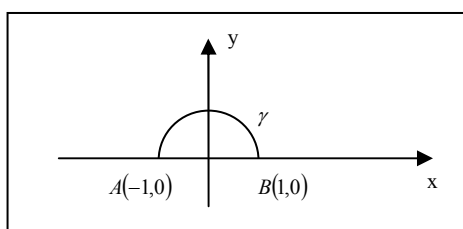


Fig.3.

Definiția 10. Un punct M al arcului elementar γ se numește punct ordinar dacă arcul γ admite cel puțin o reprezentare parametrică $\bar{r} = \bar{r}(t)$, $t \in (a, b)$, regulată de ordinul cel puțin unu pentru care $\bar{r}'(t) \neq \bar{0}$, unde t_0 este coordonata curbilinie a lui M .

Exemple: Fie $\bar{v} \in V^3$, $\bar{v} \neq \bar{0}$, $I = \mathbf{R}$. Arcul elementar de clasă C^∞ (nesingular)

$$\bar{r} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3, t \rightarrow \bar{a} + t\bar{v}$$

se numește dreapta trecând prin $\bar{a}$ având $\bar{v}$ ca vector director.

Dacă $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ și $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3$, atunci ecuațiile parametrice ale dreptei sunt: $x = a_1 + tv_1$, $y = a_2 + tv_2$, $z = a_3 + tv_3$; $t \in \mathbf{R}$ (dacă $t \in [t_1, t_2]$ se obține un segment al dreptei iar dacă $t \geq 0$ obținem o semidreaptă cu originea în $\vec{a}$).

Arcul $\vec{r}_1 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$, $t \rightarrow \vec{a} + t^5\vec{v}$ are ca suport aceeași dreaptă ca mai sus, dar el este distinct de cel anterior (de exemplu este singular în punctul $t_0 = 0$). Observăm că două arce elementare diferite pot avea același suport.

VIII.2. Tangenta și planul normal

Fie $\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t), t \in (a, b)$, un arc elementar de curbă, regulat de ordin cel puțin unu, iar $M_0(t_0)$ un punct ordinar al lui γ .

Definiția 11. Se numește tangentă la γ în punctul $M_0(t_0)$ poziția limită a dreptei M_0M , când M se apropie de M_0 pe γ .

Teorema 1. Tangenta la γ , regulat de ordin $k \geq 1$, în punctul ordinar $M_0(t_0)$, există și este unică. Ecuațiile tangentei sunt:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

Un vector director al tangentei la γ în punctul ordinar $M_0(t_0)$ este $\vec{r}'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k}$. Acest vector poartă numele de vectorul viteză la γ în $M_0(t_0)$.

Definiția 12. Planul care trece prin punctul $M_0(t_0)$, și este perpendicular pe tangenta în $M_0(t_0)$ la γ , se numește planul normal la γ în $M_0(t_0)$, și are ecuația:

$$(x - x(t_0))x'(t_0) + (y - y(t_0))y'(t_0) + (z - z(t_0))z'(t_0) = 0.$$

Observația 2. Dacă γ este dat implicit: $f(x, y, z) = 0$ și $g(x, y, z) = 0$ și $P(x_0, y_0, z_0)$ este un punct regulat al lui γ , atunci tangenta și planul normal, în acest punct la curbă, au respectiv ecuațiile:

$$\frac{x - x_0}{\frac{D(f, g)}{D(y_0, z_0)}} = \frac{y - y_0}{\frac{D(f, g)}{D(z_0, x_0)}} = \frac{z - z_0}{\frac{D(f, g)}{D(x_0, y_0)}},$$

$$(x - x_0)\frac{D(f, g)}{D(y_0, z_0)} + (y - y_0)\frac{D(f, g)}{D(z_0, x_0)} + (z - z_0)\frac{D(f, g)}{D(x_0, y_0)} = 0.$$

$$\text{Am notat } \frac{D(f, g)}{D(y_0, z_0)} = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0) \end{array} \right| \text{ și analoagele.}$$

Exemplu : Fie curba $r(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$, $t \in (0, +\infty)$. Dreapta tangentă în punctul $t_0 > 0$ are ecuațiile

$$\frac{x - t_0}{1} = \frac{y - t_0^2}{2t_0} = \frac{z - t_0^3}{3t_0^2}.$$

VIII.3. Planul osculator și binormala

Fie $\gamma: \bar{r} = \bar{r}(t), t \in (a, b)$, un arc elementar de curbă, regulat de ordin cel puțin doi, iar $M_0(t_0)$ un punct bireglat al lui γ (adică $\bar{r}'(t_0) \times \bar{r}''(t_0) \neq 0$).

Definiția 13. Dreapta care trece prin M_0 și are vectorul director $\bar{r}'(t_0) \times \bar{r}''(t_0)$ se numește binormala la γ în punctul M_0 .

Definiția 14. Se numește plan osculator la γ în punctul M_0 , planul care trece prin M_0 și este perpendicular pe binormală, sau altfel spus, planul care trece prin M_0 și are ca vectori directori pe $\bar{r}'(t_0)$ și $\bar{r}''(t_0)$.

Ecuția sa este:

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Observația 3. Se poate demonstra că planul osculator la γ în M_0 , este poziția limită a planului $(M_0 M_1 M_2)$, atunci când M_1, M_2 tind către M_0 pe γ .

Observația 4. Dacă γ este o curbă plană atunci planul osculator la γ în fiecare punct al său coincide cu planul în care se găsește γ . Reciproc, se poate arăta că dacă planul osculator al lui γ în fiecare punct al său este același, atunci γ este o curbă plană.

VIII.4. Normala principală și planul rectificat

Fie $\gamma: \bar{r} = \bar{r}(t), t \in (a, b)$, un arc elementar de curbă, regulat de ordin cel puțin doi, iar $M_0(t_0)$ un punct bireglat al lui γ .

Definiția 15. Dreapta de intersecție dintre planul normal și planul osculator la γ în punctul M_0 se numește normala principală la γ în punctul M_0 .

Observația 5. Vectorul director al normalei principale la γ în punctul M_0 este:

$$\bar{r}'(t_0) \times (\bar{r}'(t_0) \times \bar{r}''(t_0)).$$

Definiția 16. Planul care trece prin M_0 și este perpendicular pe normala principală se numește plan rectificat la γ în punctul M_0 .

VIII.5. Triedrul lui Frenet

Definiția 17. Fie $\gamma: \bar{r} = \bar{r}(t), t \in (a, b)$ un arc elementar de curbă regulat de ordin cel puțin doi și M_0 un punct bireglat al său. Vom atașa punctului M_0 un reper cartezian ortonormat, cu originea în M_0 , și baza ortonormată $\{\bar{e}, \bar{v}, \bar{\beta}\}$, la fel orientat ca reperul cartezian $R(O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$, unde:

$$\bar{e} = \frac{\bar{r}'(t_0)}{\|\bar{r}'(t_0)\|} \text{ este versorul tangentei,}$$

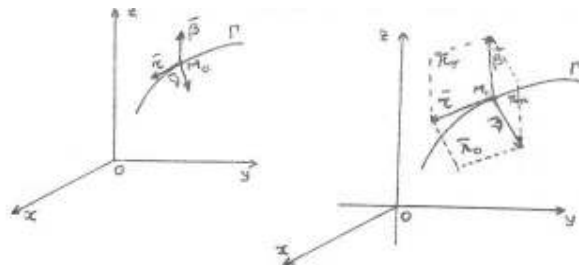
$$\bar{\beta} = \frac{\bar{r}'(t_0) \times \bar{r}''(t_0)}{\|\bar{r}'(t_0) \times \bar{r}''(t_0)\|} \text{ este versorul binormalei,}$$

$$\bar{v} = \bar{\beta} \times \bar{e} \text{ este versorul normalei principale.}$$

Acest reper poartă numele de reperul Frenet al lui γ asociat punctului M_0 . Astfel muchiile reperului Frenet sunt: tangenta, normala principală și binormala iar fețele sunt: planul normal, planul osculator și planul rectificat.

Observația 6. Versorii $\bar{\tau}, \bar{\nu}, \bar{\beta}$ verifică relațiile:

$$\|\bar{\tau}\| = \|\bar{\nu}\| = \|\bar{\beta}\| = 1, \quad \bar{\tau}\bar{\nu} = \bar{\tau}\bar{\beta} = \bar{\nu}\bar{\beta} = 0, \quad \bar{\tau} = \bar{\nu} \times \bar{\beta}, \quad \bar{\nu} = \bar{\beta} \times \bar{\tau}, \quad \bar{\beta} = \bar{\tau} \times \bar{\nu}.$$



VIII.6. Lungimea unui arc de curbă. Parametrizarea naturală a unei curbe

Fie $\gamma: \bar{r} = \bar{r}(t), t \in (a, b)$ un arc elementar de curbă, regulat de ordin cel puțin unu, cu toate punctele ordinare ($\bar{r}'(t) \neq \bar{0}, \forall t \in (a, b)$). Fie $M_1(t_1), M_2(t_2) \in \gamma$.

Definiția 18. Se numește lungime a arcului $M_1 M_2$, numărul real pozitiv, notat cu l , dat de relația:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \|\bar{r}'(t)\| dt, \quad t_1 < t_2.$$

Fie $M_0(t_0) \in \gamma$ un punct fixat, numit originea de măsurare a arcelor pe γ . Introducem o orientare pe γ în felul următor: spunem că ne deplasăm pe γ în sens pozitiv de la $M_0(t_0)$ la $M_1(t_1)$ dacă $t_0 < t_1$.

Spunem că ne deplasăm pe γ în sens negativ de la $M_0(t_0)$ la $M_1(t_1)$ dacă $t_0 > t_1$.

Considerăm aplicația $\varphi: (a, b) \rightarrow \varphi((a, b))$, dată de $\varphi(t) = \int_{t_0}^t \|\bar{r}'(u)\| du$.

În mod evident $\varphi \in C^1(a, b)$ și $\varphi'(t) = \|\bar{r}'(t)\| > 0$, oricare ar fi $t \in (a, b)$. Astfel φ este strict crescătoare și deci bijectivă. Astfel, $\varphi^{-1} \in C^1(\varphi(a, b))$ și $\frac{d\varphi^{-1}}{ds}(s) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(s))} > 0$. Deci, φ este un difeomorfism (adică φ este bijectivă și $\varphi, \varphi^{-1} \in C^1$).

Înlocuind în relația $\bar{r} = \bar{r}(t)$ pe t cu $t = \varphi^{-1}(s)$, unde $s = \varphi(t)$, se obține o nouă reprezentare parametrică a lui γ : $\bar{r} = \bar{r}_1(s)$, numită *parametrizare naturală*. Parametrul s se numește *parametru natural* și reprezintă lungimea arcului ce unește M_0 cu M , luată cu semnul plus sau minus după cum $t_0 < t$ sau $t_0 > t$.

Observația 7. Derivata în raport cu parametrul natural s o vom nota $\dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{ds}$.

Din $s = \int_{t_0}^t \|\bar{r}'(u)\| du$ deducem că $ds = \|\bar{r}'(t)\| dt$.

Propoziția 1. Dacă $\bar{v} : (a, b) \subseteq R \rightarrow V^3$ este o funcție vectorială derivabilă astfel încât $\|\bar{v}(t)\| = c$, unde c este o constantă strict pozitivă, oricare ar fi $t \in (a, b)$, atunci $\bar{v}'(t) \perp \bar{v}(t)$, $t \in (a, b)$.

Demonstrație.

Deoarece $\|\bar{v}(t)\| = c$, adică $\bar{v}(t) \cdot \bar{v}(t) = c^2$, prin derivare obținem: $2\bar{v}'(t) \cdot \bar{v}(t) = 0$, adică faptul că $\bar{v}'(t) \perp \bar{v}(t)$, oricare ar fi $t \in (a, b)$.

VIII.7. Formulele lui Frenet

Considerăm că arcul elementar γ al curbei Γ regulată de ordinu cel puțin doi are parametrizarea naturală: $\bar{r} = \bar{r}(s)$, $s \in (c, d)$, și că $\dot{\bar{r}} \times \ddot{\bar{r}} \neq \bar{0}$. Expresiile versorilor $\bar{\tau}, \bar{\nu}, \bar{\beta}$ ai reperului Frenet sunt mai simple:

$$\dot{\bar{r}} = \frac{\bar{r}'}{\|\bar{r}'\|} = \bar{\tau}, \quad \bar{\nu} = \frac{\ddot{\bar{r}}}{\|\ddot{\bar{r}}\|}, \quad \bar{\beta} = \frac{\dot{\bar{r}} \times \ddot{\bar{r}}}{\|\dot{\bar{r}} \times \ddot{\bar{r}}\|}.$$

Precizăm în continuare coordonatele vectorilor $\dot{\bar{\tau}}, \dot{\bar{\nu}}, \dot{\bar{\beta}}$ în baza $\{\bar{\tau}, \bar{\nu}, \bar{\beta}\}$.

Definiția 19. Funcția $k_1 : (c, d) \rightarrow [0, \infty)$, definită prin: $k_1(s) = \|\ddot{\bar{r}}\|$ se numește curbura lui γ pe (c, d) , $k_1(s)$ se numește curbura lui γ în punctul $M(s)$, iar $\frac{1}{k_1(s)}$ se numește raza de curbură a lui γ în punctul $M(s)$. Folosind curbura, $\dot{\bar{\tau}}$ se scrie:

$$\dot{\bar{\tau}}(s) = k_1(s) \bar{\nu}(s), \quad s \in (c, d).$$

Această egalitate se numește prima formulă a lui Frenet.

Definiția 20. Funcția $k_2 : (c, d) \rightarrow R$, definită prin $k_2(s) = \nu(s)$, $s \in (c, d)$ se numește torsiunea curbei; $k_2(s)$ se numește torsiunea curbei în punctul $M(s)$, iar $\frac{1}{k_2(s)}$ se numește raza de torsiune a lui γ în punctul $M(s)$.

Astfel avem: $\dot{\bar{\beta}} = -k_2(s) \cdot \bar{\nu}(s)$, ceea ce este de fapt a doua formulă a lui Frenet.

Observația 8. A treia formulă a lui Frenet este:

$$\dot{\bar{\nu}}(s) = -k_1(s) \bar{\tau}(s) + k_2(s) \bar{\beta}(s).$$

Observația 9. Dacă arcul elementar γ admite reprezentarea parametrică $\bar{r} = \bar{r}(t)$, $t \in (a, b)$ curbura și torsiunea se calculează cu formulele:

$$k_1(t) = \frac{\|\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)\|}{\|\bar{r}'(t)\|^3}, \quad t \in (a, b),$$

$$k_2(t) = \frac{(\bar{r}'(t), \bar{r}''(t), \bar{r}'''(t))}{\|\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)\|^2}, \quad t \in (a, b).$$

Observația 10. O curbă este o porțiune dintr-o dreaptă dacă și numai dacă curbura sa este nulă.

Observația 11. O curbă este plană dacă și numai dacă torsiunea sa este nulă.

VIII.8. Probleme rezolvate

1. Se dă curba $\Gamma: \vec{r} = a \cos t \cdot \vec{i} + a \sin t \cdot \vec{j} + bt \cdot \vec{k}$, $t \in \mathbf{R}$, unde $a > 0, b \in \mathbf{R}$ sunt constante. Se cere:

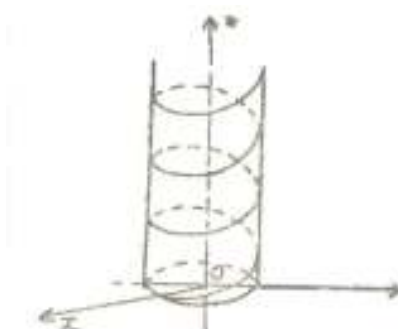
- Să se scrie ecuațiile parametrice ale curbei Γ .
- Să se arate că Γ este situat pe cilindrul $x^2 + y^2 = a^2$.
- Să se scrie ecuațiile muchiilor și fețelor reperului Frenet al curbei Γ într-un punct arbitrar al său.
- Să se găsească expresiile versorilor $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$.

(Curba Γ se numește elice cilindrică).

Soluție:

a) $x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt, \quad t \in \mathbf{R}.$

b) Ridicând la pătrat primele două ecuații parametrice și adunând membru cu membru obținem $x^2 + y^2 = a^2$.



c) $\vec{r}'(t) = -a \sin t \cdot \vec{i} + a \cos t \cdot \vec{j} + b \vec{k}.$

$\vec{r}''(t) = -a \cos t \cdot \vec{i} - a \sin t \cdot \vec{j}$

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a \sin t & a \cos t & b \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \end{vmatrix} = ab \sin t \cdot \vec{i} - ab \cos t \cdot \vec{j} + a^2 \vec{k},$$

$$(\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)) \times \vec{r}'(t) = -(a^2 + b^2)(a \cos t \cdot \vec{i} + a \sin t \cdot \vec{j})$$

Se observă ușor că $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$ oricare ar fi $t \in \mathbf{R}$, deci fiecare punct al elicei cilindrice este punct ordinar. De asemenea

$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) \neq \vec{0}$, oricare ar fi $t \in \mathbf{R}$ ceea ce arată că în fiecare punct al elicei cilindrice planul osculator este unic determinat.

Pentru ecuațiile tangentei obținem:

$$\frac{x - a \cos t}{-a \sin t} = \frac{y - a \sin t}{a \cos t} = \frac{z - bt}{b}.$$

Ecuația planului normal este:

$$-a \sin t(x - a \cos t) + a \cos t(y - a \sin t) + b(y - bt) = 0.$$

Ecuațiile binormalei sunt:

$$\frac{x - a \cos t}{b \sin t} \cdot \frac{y - a \sin t}{-b \cos t} = \frac{z - bt}{a}.$$

Ecuația planului osculator este:

$$b \sin t(x - a \cos t) - b \cos t(y - a \sin t) + a(z - bt) = 0.$$

Ecuatiile normalei principale sunt:

$$\begin{cases} \frac{x - \cos t}{\cos t} = \frac{y - a \sin t}{\sin t} \\ z - bt = 0 \end{cases}.$$

Ecuatia planului rectificant este:

$$\cos t(x - a \cos t) + \sin t(y - a \sin t) = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad \bar{\tau} &= \frac{\bar{r}'(t)}{\|\bar{r}'(t)\|} = -\frac{a \sin t}{\sqrt{a^2 + b^2}} \bar{i} + \frac{a \cos t}{\sqrt{a^2 + b^2}} \bar{j} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \bar{k}. \\ \bar{\beta} &= \frac{b \sin t}{\sqrt{a^2 + b^2}} \bar{i} - \frac{b \cos t}{\sqrt{a^2 + b^2}} \bar{j} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \bar{k}, \text{ iar } \bar{\nu} = \bar{\beta} \times \bar{\tau}. \end{aligned}$$

2. Să se calculeze curbura și torsiunea elicei cilindrice, într-un punct arbitrar al său.

Soluție:

Pornim de la reprezentarea parametrică a elicei cilindrice :

$$\bar{r} = a \cos t \cdot \bar{i} + a \sin t \cdot \bar{j} + bt \cdot \bar{k}, \quad t \in \mathbf{R} \quad a > 0, \quad b \neq 0, \text{ fixate.}$$

Avem:

$$\begin{aligned} \bar{r}' &= -a \sin t \cdot \bar{i} + a \cos t \cdot \bar{j} + b \bar{k}, \\ \bar{r}'' &= -a \cos t \cdot \bar{i} - a \sin t \cdot \bar{j}, \\ \bar{r}''' &= a \sin t \cdot \bar{i} - a \cos t \cdot \bar{j} \\ \bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t) &= ab \sin t \cdot \bar{i} - ab \cos t \cdot \bar{j} + a^2 \bar{k}, \\ \|\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)\| &= a \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \|\bar{r}'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}. \\ [\bar{r}'(t), \bar{r}''(t), \bar{r}'''(t)] &= a^2 b. \end{aligned}$$

$$\text{Astfel obținem: } k_1(t) = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad k_2(t) = \frac{b}{a^2 + b^2}, \quad (\forall) t \in \mathbf{R}.$$

3. Se dă curba $\Gamma : \bar{r} = \cos t \cdot \bar{i} + \sin t \cdot \bar{j} + (t+1) \cdot \bar{k}, t \in \mathbf{R}$. Se cere:

- Să se scrie ecuațiile parametrice ale curbei Γ .
- Să se arate că $M(1,0,1) \in \Gamma$
- Să se arate că toate punctele curbei Γ sunt ordinare.
- Să se scrie ecuațiile tangentei și ecuația planului normal la curba Γ în punctul M.

Soluție:

a) Ecuatiile parametrice sunt: $x = \cos t, y = \sin t, z = t+1, t \in \mathbf{R}$.

b) A arăta că $M(1,0,1) \in \Gamma$ revine la a arăta că există $t_0 \in \mathbf{R}$ astfel încât $x(t_0) = 1, y(t_0) = 0, z(t_0) = 1$.

Considerând sistemul, cu necunoscuta t :

$$\begin{cases} \cos t = 1 \\ \sin t = 0 \\ t + 1 = 1 \end{cases}$$

observăm că el este compatibil, singura sa soluție fiind $t = 0$. Deci punctul $M(t=0)$ este punct simplu al curbei Γ .

c) Deoarece $\vec{r}'(t) = -\sin t \cdot \vec{i} + \cos t \cdot \vec{j} + \vec{k}$, $t \in \mathbf{R} \Rightarrow \vec{r}'(t) \neq 0$, $\forall t \in \mathbf{R}$.

d) Întrucât $\vec{r}'(0) = \vec{j} + \vec{k}$, ecuațiile tangentei la curba Γ în $M(t=0)$ sunt:

$$\begin{aligned} x-1 &= 0 \\ y-z+1 &= 0, \end{aligned}$$

iar ecuația planului normal în $M(t=0)$ la Γ este: $y+z-1=0$.

4. Să se scrie ecuațiile tangentei și ecuația planului normal la curba Γ :

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - z^2 - 2x = 0 \\ x^2 - y = 0 \end{cases} \quad (x, y, z) \in \mathbf{R} \times (0, \infty) \times \mathbf{R}.$$

în punctul $M(1,1,1)$.

Soluție:

$$\text{Avem: } F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2 - 2x, \quad G(x, y, z) = x^2 - y$$

$$\text{Întrucât } \frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 2, \frac{\partial F}{\partial y} = 4y, \frac{\partial F}{\partial z} = -2z, \frac{\partial G}{\partial x} = 2x, \frac{\partial G}{\partial y} = -1, \frac{\partial G}{\partial z} = 0$$

Obținem

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(M) & \frac{\partial F}{\partial y}(M) & \frac{\partial F}{\partial z}(M) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(M) & \frac{\partial G}{\partial y}(M) & \frac{\partial G}{\partial z}(M) \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Deci, M este un punct ordinar al curbei Γ . Ecuațiile tangentei în M la curba Γ sunt:

$$\frac{x-1}{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{y-1}{\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{z-1}{\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}, \text{ adică:}$$

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-1}{-8},$$

iar ecuația planului normal este $-2x - 4y - 8z + 14 = 0$.

5. Să se scrie ecuațiile binormalei și ecuația planului osculator pentru curba Γ :

$$\vec{r} = e^{2t}\vec{i} + e^{-2t}\vec{j} + (t+3)\vec{k}, t \in \mathbf{R} \text{ în } M(t=0).$$

Soluție:

$$\text{Din } \vec{r}'(t) = 2e^{2t}\vec{i} - 2e^{-2t}\vec{j} + \vec{k}, \vec{r}''(t) = 4e^{2t}\vec{i} + 4e^{-2t}\vec{j} \text{ rezultă}$$

$$\vec{r}'(0) = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}, \vec{r}'' = 4\vec{i} + 4\vec{j}.$$

Deci,

$$\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 4\vec{j} + 16\vec{k}.$$

Prin urmare, ecuațiile binormalei în $M(1,1,3)$ la Γ sunt:

$$\frac{x-1}{-4} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{16},$$

iar ecuația planului osculator este

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{sau } -4x + 4y + 16z - 48 = 0.$$

4) Se dă curba $\Gamma: \vec{r} = (t^2 + 2t)\vec{i} + e^{2t}\vec{j} + (t+1)\vec{k}, t \in \mathbf{R}$. Să se scrie ecuațiile canonice ale normalei principale și ecuația carteziană a planului rectificant pentru Γ în punctul $M(t=0)$.

Soluție:

$$\vec{r}'(t) = (2t+2)\vec{i} + 2e^{2t}\vec{j} + \vec{k}, \vec{r}'' = 2\vec{i} + 4e^{2t}\vec{j}.$$

Astfel obținem:

$$\vec{r}'(0) = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}, \vec{r}''(0) = 2\vec{i} + 4\vec{j}.$$

$$\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

Vectorul director al normalei la Γ în M_0 este:

$$\vec{r}'(0) \times (\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0)) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 12\vec{j} + 12\vec{k}.$$

Astfel ecuațiile normalei principale în punctul $M(0,1,1)$ la Γ sunt:

$$\frac{x-0}{6} = \frac{y-1}{-12} = \frac{z-1}{12},$$

iar ecuația planului rectificant este:

$$6(x-0) - 12(y-1) + 12(z-1) = 0, \text{ adică } 6x - 12y + 12z = 0.$$

IX. ELEMENTE DE GEOMETRIA DIFERENȚIALĂ A SUPRAFEȚELOR

IX.1. Noțiunea de suprafață

Fie $I, J \subseteq \mathbb{R}$ două intervale deschise.

Definiția 1. Mulțimea σ a punctelor din E^3 homeomorfă cu $I \times J$ se numește suprafață elementară.

Definiția 2. Se numește suprafață simplă o mulțime Σ de puncte din E^3 care este conexă și fiecare punct al său are cel puțin o vecinătate care este suprafață elementară.

Definiția 3. O mulțime de puncte din E^3 local homeomorfă cu o suprafață simplă se numește suprafață.

Considerăm E^3 raportat la un reper cartezian ortormat $R = \{O; \bar{i}; \bar{j}; \bar{k}\}$.

Fie σ o suprafață elementară și $f: I \times J \rightarrow \sigma$ homeomorfismul din definiția lui σ .

Oricare ar fi $(u, v) \in I \times J$ există un punct unic $M \in \sigma$ așa încât $f(u, v) = M$. Însă, oricărui punct $M \in \sigma$ îi corespunde vectorul său de poziție $\overline{OM}$. Avem astfel o aplicație vectorială, de două variabile reale $\bar{r}: I \times J \rightarrow V^3$, continuă, injectivă, pe care dacă o privim cu valori în $\bar{r}(I \times J)$ devine bijectivă și inversa sa continuă (prin urmare, avem un homeomorfism).

Astfel ecuația vectorială a suprafeței elementare σ este:

$$\sigma: \bar{r} = \bar{r}(u, v), (u, v) \in I \times J$$

$$\bar{r}(u, v) = x(u, v)\bar{i} + y(u, v)\bar{j} + z(u, v)\bar{k}.$$

Astfel, ecuația vectorială este echivalentă cu ecuațiile:

$$x = x(u, v),$$

$$y = y(u, v), \quad (u, v) \in I \times J$$

$$z = z(u, v)$$

numite *ecuațiile parametrice scalare* (reprezentări parametrice) ale suprafeței elementare σ .

Dacă punctul $M \in \sigma$ are vectorul de poziție $\bar{r}(u, v)$, spunem că M are coordonate curbilinii u, v și scriem $M(u, v)$.

Dacă se elimină u, v în ecuațiile parametrice se obține *ecuația explicită a suprafeței elementare σ* :

$$z = z(x, y)$$

Această ecuație se poate însă scrie sub forma: $F(x, y, z) = 0$, care este *ecuația implicită a suprafeței elementare σ* .

Exemple

1. Sfera cu centrul în origine și de rază R admite reprezentarea parametrică:

$$x = R \cos u \cos v$$

$$y = R \sin u \cos v \quad (u, v) \in (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$z = R \sin v$$

2. Planul ce trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$, de vectori directori $\bar{a} = a^1\bar{i} + a^2\bar{j} + a^3\bar{k}$, $\bar{b} = b^1\bar{i} + b^2\bar{j} + b^3\bar{k}$ are reprezentarea parametrică:

$$x = x_0 + ua^1 + vb^1$$

$$y = y_0 + ua^2 + vb^2 \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$z = z_0 + ua^3 + vb^3$$

Observația 1 Reprezentările parametrice anterioare nu sunt unice.

Într-adevăr, dacă I', J' sunt alte două intervale deschise din $\mathbb{R}$, domeniile $I \times J$ și $I' \times J'$ sunt homeomorfe. Fie $h : I' \times J' \rightarrow I \times J$ un homeomorfism.

Atunci, aplicația vectorială $\bar{r}' : I' \times J' \rightarrow V^3$, definită prin $\bar{r}'(u', v') = \bar{r}(h(u', v'))$, oricare ar fi $(u', v') \in I' \times J'$ are aceeași imagine cu $\bar{r}$. Deci avem o nouă reprezentare parametrică a suprafeței elementare σ , $\bar{r}' = \bar{r}'(u', v'), (u', v') \in I' \times J'$.

Observația 2 Dacă Σ este o suprafață, se poate arată că fiecare punct al său aparține cel puțin unei suprafețe elementare formată din puncte ale lui Σ .

Definiția 4 Spunem că suprafața elementară σ este regulată de ordinul k dacă admite cel puțin o reprezentare parametrică regulată, de ordinul k , dar nu admite nici o reprezentare parametrică regulată de ordinul $k+1$.

Definiția 5 Un punct $M_0(u_0, v_0)$ al suprafeței elementare σ , regulată de ordin cel puțin unu, se numește ordinar dacă

$$rg \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \bigg|_{M_0} = 2$$

adică $\bar{r}_u(u_0, v_0) \times \bar{r}_v(u_0, v_0) \neq \bar{0}$, unde $\bar{r}_u = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}$, $\bar{r}_v = \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$.

Dacă toate suprafețele elementare situate pe suprafața Σ sunt regulate de ordin k spunem că suprafața Σ este regulată de ordin k .

Observația 3. Fie $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție ce admite derivate parțiale de ordinul întâi continue. Notăm $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0\}$. Dacă $M_0(x_0, y_0, z_0)$ aparține mulțimii S și $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$ nu se anulează simultan, atunci există o vecinătate a lui M_0 care să fie o suprafață elementară.

Definiția 6. Spunem că reprezentările parametrice $\bar{r} = \bar{r}(u, v), (u, v) \in I \times J$, $\bar{r}' = \bar{r}'(u', v'), (u', v') \in I' \times J'$ ale suprafeței elementare σ , regulată de ordinul k , sunt echivalente dacă există un difeomorfism $h : I \times J \rightarrow I' \times J'$, $h \in C^k(I \times J)$ cu jacobianul $\frac{D(u', v')}{D(u, v)} > 0$ așa încât $\bar{r} = \bar{r}' \circ h$.

IX.2. Curbe trasate pe o suprafață

Fie suprafața $\Sigma : \bar{r} = \bar{r}(u, v), (u, v) \in I \times J$

Dacă în ecuația precedentă u și v sunt funcții de un parametru $t \in (a, b)$ obținem ecuația

$$\bar{r} = \bar{r}(u(t), v(t)), \quad t \in (a, b)$$

care reprezintă parametric o curbă Γ .

Cum toate punctele lui Γ sunt și puncte ale suprafeței Σ , spunem că Γ este o curbă trasată pe suprafața Σ .

Desigur, o curbă Γ trasată pe suprafața Σ poate fi dată și în alte moduri. Astfel, o relație de forma:

$$g(u, v) = 0 \quad (u, v) \in I \times J$$

definește o curbă Γ trasată pe suprafața Σ întrucât se definește unul din parametri ca funcție implicită de celălalt. De exemplu, dacă $v=v(u)$ obținem $\bar{r} = \bar{r}(u, v(u))$ care este o reprezentare parametrică a unei curbe.

În particular, dacă facem $u=u_0$ (sau $v=v_0$) obținem o curbă Γ_v (respectiv Γ_u) a cărei ecuație vectorială este $\bar{r} = \bar{r}(u_0, v), v \in J$ (respectiv, $\bar{r} = \bar{r}(u, v_0), u \in I$).

Curbele Γ_u și Γ_v se numesc *curbe coordonate* pe Σ corespunzătoare punctului $M(u_0, v_0)$. Prin fiecare punct $M_0(u_0, v_0)$ al unei suprafețe elementare trece o singură curbă Γ_u și o singură curbă Γ_v (se ține seama de faptul că funcția $\bar{r}$ este bijectivă).

IX.3. Planul tangent și normala într-un punct ordinar al unei suprafețe

Fie $\sigma : \bar{r} = \bar{r}(u, v), (u, v) \in I \times J$ o suprafață elementară, regulată de ordin cel puțin unu și $M_0(u_0, v_0)$ un punct ordinar al său, adică $\bar{r}_u(u_0, v_0) \times \bar{r}_v(u_0, v_0) \neq \vec{0}$

Vectorul director al tangentei la curba coordonată $\Gamma_u : \bar{r} = \bar{r}(u, v_0)$ este $\bar{r}_u(u_0, v_0)$, iar vectorul director al tangentei la curba $\Gamma_v : \bar{r} = \bar{r}(u_0, v)$ este $\bar{r}_v(u_0, v_0)$.

Fie acum $\Gamma : \bar{r} = \bar{r}(u(t), v(t)), t \in (a, b)$ o curbă oarecare situată pe σ și care trece prin M_0 . Deci, există $t_0 \in (a, b)$ astfel încât $u_0 = u(t_0), v_0 = v(t_0)$.

Vectorul director al tangentei în M_0 la curba Γ este $\frac{d\bar{r}}{dt}(t_0) = \bar{r}'(t_0) = \bar{r}_u(u_0, v_0)u'(t_0) + \bar{r}_v(u_0, v_0)v'(t_0)$.

Aceasta arată că $\bar{r}'(t_0), \bar{r}_u(u_0, v_0), \bar{r}_v(u_0, v_0)$ sunt coplanari. Vectorii $\bar{r}_u(u_0, v_0), \bar{r}_v(u_0, v_0)$ sunt însă unici (întrucât curbele coordonate ce trec prin M_0 sunt unice) și liniar independenți (întrucât M_0 este punct ordinar). Deci, ei împreună cu punctul M_0 determină un plan unic π_t . Astfel, tangenta la curba Γ în punctul M_0 este situată în planul π_t .

Definiția 7. Numim *plan tangent la o suprafață Σ , regulată de ordin cel puțin unu, într-un punct ordinar M_0 al său, locul geometric al tangentelor la toate curbele ce trec prin M_0 și sunt situate pe suprafața Σ .*

Întrucât $M_0 \in \Sigma$, există cel puțin o suprafață elementară $\sigma : \bar{r} = \bar{r}(u, v)$, așa încât $M_0 \in \sigma \subset \Sigma$. Planul tangent la σ în $M_0(u_0, v_0)$ (și deci planul tangent la Σ în M_0) este planul ce trece prin punctul M_0 și are ca vectori directori $\bar{r}_u(u_0, v_0), \bar{r}_v(u_0, v_0)$.

Ecuația vectorială a sa este: $\pi_t : (\bar{r} - \bar{r}_0) \cdot (\bar{r}_u(u_0, v_0) \times \bar{r}_v(u_0, v_0)) = 0$ sau

$$\pi_t : \begin{vmatrix} x - x(u_0, v_0) & y - y(u_0, v_0) & z - z(u_0, v_0) \\ x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) & z_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) & z_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0$$

Definiția 8. Dreapta care trece prin punctul ordinar M_0 al suprafeței Σ și este perpendiculară pe planul tangent la suprafață în M_0 se numește *normala la suprafață în M_0 .*

Vectorul director al normalei în $M_0(u_0, v_0)$ este $\bar{r}_u(u_0, v_0) \times \bar{r}_v(u_0, v_0)$.

Versorul normalei la suprafață, în reprezentare parametrică $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$, într-un punct ordinar oarecare al suprafeței, notat $\bar{N}$ este :

$$\bar{N} = \frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{\|\bar{r}_u \times \bar{r}_v\|}$$

Observație 4. Dacă suprafața Σ este dată prin ecuația explicită $z = z(x, y)$ ecuația planului tangent în punctul ordinar $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ este:

$$\pi_t : \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

iar ecuațiile normalei în $M_0(x_0, y_0, z_0)$ sunt :

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Observația 5. Dacă suprafața Σ este dată prin ecuația implicită $F(x, y, z) = 0$, unde F este regulată de ordin cel puțin unu, definim pe z ca funcție de x și y , $z = z(x, y)$, planul tangent în punctul ordinar $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ are ecuația :

$$\pi_t : \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{M_0} (x - x_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{M_0} (y - y_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{M_0} (z - z_0) = 0$$

iar normala la suprafață în M_0 are ecuațiile:

$$\frac{x - x_0}{\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{M_0}} = \frac{y - y_0}{\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{M_0}} = \frac{z - z_0}{\left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{M_0}}$$

Exemple :

1. Să se scrie ecuația planului tangent și ecuațiile normalei la suprafața

$$\Sigma : \bar{r} = (u^2 + 2v)\bar{i} - 3u\bar{j} + (\ln u)\bar{k}, (u, v) \in (0, \infty) \times \mathbf{R} \text{ în punctul } M(u=1, v=0)$$

Soluție :

Avem succesiv

$$\bar{r}_u = (2u + 2v)\bar{i} - 3\bar{j} + \frac{1}{u}\bar{k}, \quad \bar{r}_v = 2\bar{i} \text{ si } \bar{r}_u(1,0) = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}, \quad \bar{r}_v(1,0) = 2\bar{i}.$$

Vectorul director al normalei la suprafață în M este $\bar{n} = \bar{r}_u(1,0) \times \bar{r}_v(1,0)$.

$$\bar{n} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\bar{j} + 6\bar{k}$$

Coordonatele carteziene ale punctului M sunt $(1, -3, 0)$. Atunci ecuația planului tangent la suprafață în M este :

$$\pi_t : \begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

adică $2y + 6z + 6 = 0$, iar ecuațiile normalei în M sunt:

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{6}, \text{ adică } x=1, \quad 3y-z+9=0.$$

2. Se dă suprafața $\Sigma : 2x^2 - 3y^2 + 2xy - 3xz + z - 1 = 0$ și punctul $M(0,0,1)$. Să se scrie ecuația planului tangent și ecuațiile normalei la suprafață în M .

Soluție :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x + 2y - 3z, \frac{\partial F}{\partial y} = -6y + 2x, \frac{\partial F}{\partial z} = -3x + 1.$$

Făcând aici $x=0, y=0, z=1$ obținem $\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_M = -3, \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_M = 0, \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_M = 1$. Ecuația planului tangent este:

$$-3(x-0)+0(y-0)+1(z-1)=0, \text{ adică } \pi_t: -3x+z-1=0 \text{ și ecuațiile normalei: } \frac{x-0}{-3} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-1}{1}, \text{ adică: } y=0, x+3z-$$

$$3=0.$$

IX.4. Prima formă fundamentală a unei suprafețe

Fie σ o suprafață elementară, regulată de ordin cel puțin unu, reprezentată parametric prin $\vec{r} = \vec{r}(u, v), (u, v) \in I \times J$.

$$\text{Din } d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv \text{ obținem } d\vec{r}^2 = \vec{r}_u^2 du^2 + 2\vec{r}_u \vec{r}_v dudv + \vec{r}_v^2 dv^2.$$

Expresia din membrul drept al acestei egalități este, în fiecare punct al suprafeței σ , o formă pătratică în du și dv .

O numim *prima formă fundamentală a suprafeței elementare* σ și o notăm prin $\varphi(du, dv)$.

Notând $E = \vec{r}_u^2, F = \vec{r}_u \vec{r}_v, G = \vec{r}_v^2$, obținem:

$$\varphi(du, dv) = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

În continuare vom folosi și următoarea notație: $\Delta = EG - F^2$

$$\text{Avem: } \Delta = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|^2$$

Presupunem în plus că toate punctele suprafeței elementare sunt ordinare (adică, $\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v) \neq \vec{0}, (\forall)(u, v) \in I \times J$).

Atunci, $E = \vec{r}_u^2 > 0$ și $\Delta = EG - F^2 > 0$, ceea ce arată că prima formă fundamentală a suprafeței σ este pozitiv definită.

Observația 7. Prima formă fundamentală a unei suprafețe este invariantă la schimbări de repere ortonormate întrucât se obține ca produs scalar al lui $d\vec{r}$ cu el însuși (ori produsul scalar este invariant la asemenea schimbări).

Prima formă fundamentală se mai numește și *metrica suprafeței*.

Exemple:

1. Să se determine prima formă fundamentală a sferei pornind de la reprezentarea parametrică.

$$\vec{r} = R \cos u \cos v \vec{i} + R \cos u \sin v \vec{j} + R \sin u \vec{k}, \text{ unde } (u, v) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times [0, 2\pi).$$

Soluție:

$$\vec{r}_u = -R \sin u \cos v \vec{i} - R \sin u \sin v \vec{j} + R \cos u \vec{k}, \quad \vec{r}_v = -R \cos u \sin v \vec{i} + R \cos u \cos v \vec{j}.$$

$$\text{Atunci } E = R^2, F = 0, G = R^2 \cos^2 u.$$

$$\text{Rezultă } \varphi(du, dv) = R^2 (du^2 + \cos^2 u dv^2).$$

2. Să se determine prima formă fundamentală a suprafeței $\Sigma: \vec{r}(u, v) = (2u^2 - 3v^2)\vec{i} + (uv - 3u + 2v)\vec{j} - 2uv\vec{k}$

Soluție :

$$\vec{r}_u = 4u\vec{i} + (v-3)\vec{j} - 2v\vec{k}, \quad \vec{r}_v = -6v\vec{i} + (u+2)\vec{j} - 2u\vec{k}$$

$$\begin{aligned}
E &= 16u^2 + v^2 - 6v + 9 + 4v^2 = 16u^2 + 5v^2 - 6v + 9, \\
F &= -24uv + (v-3)(u+2) + 4uv = -19uv + 2v - 3u - 6, \\
G &= 36v^2 + u^2 + 4u + 4 + 4u^2 = 36v^2 + 5u^2 + 4u + 4 \\
\text{Astfel} \quad \varphi(du, dv) &= (16u^2 + 5v^2 - 6v + 9)du^2 + (-19uv + 2v - 3u - 6)dudv + \\
&+ (36v^2 + 5u^2 + 4u + 4)dv^2
\end{aligned}$$

IX.5. Lungimea unui arc de curbă de pe suprafață.

Unghiul a două curbe trasate pe suprafață

Fie σ o suprafață elementară, regulată de ordin cel puțin unu, având reprezentarea parametrică $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$, $(u, v) \in I \times J$.

Se consideră curba Γ : $u = u(t)$, $v = v(t)$, $t \in (a, b)$ situată pe suprafața σ . Deci, Γ are ecuația vectorială: $\bar{r} = \bar{r}(u(t), v(t))$, $t \in (a, b)$.

Fie $t_1, t_2 \in (a, b)$, $t_1 < t_2$. Atunci, lungimea arcului de curbă $M_1 M_2$, unde $M_1(t_1)$, $M_2(t_2)$ este:

$$l_{M_1 M_2} = \int_{t_1}^{t_2} \|\bar{r}'(t)\| dt$$

Cum $\bar{r}'(t) = \bar{r}_u(u(t), v(t))u'(t) + \bar{r}_v(u(t), v(t))v'(t)$, $t \in (a, b)$ deducem că:

$$\begin{aligned}
\|\bar{r}'(t)\| &= \sqrt{E(t)(u'(t))^2 + 2F(t)u'(t)v'(t) + G(t)(v'(t))^2}, \text{ unde} \\
E(t) &= E(u(t), v(t)), \quad F(t) = F(u(t), v(t)), \quad G(t) = G(u(t), v(t)), \quad t \in (a, b).
\end{aligned}$$

Dacă fixăm t_1 și luăm t arbitrar în (a, b) , egalitatea $s = \int_{t_1}^t \|\bar{r}'\| dt$ ne dă elementul de arc al curbei :

$$ds = \|\bar{r}'(t)\| dt, \text{ adică } ds^2 = \|\bar{r}'(t)\|^2 dt^2. \text{ Deci } ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

unde E, F, G sunt calculate de-a lungul curbei Γ .

Considerăm acum două curbe Γ_1, Γ_2 situate pe suprafața σ , trecând prin punctul $M \in \sigma$.

Definiția 9. Numim unghi al curbelor Γ_1, Γ_2 în M , unghiul θ al tangentelor la cele două curbe în M .

Astfel, unghiul curbelor Γ_1, Γ_2 în M este unghiul vectorilor $d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv$, $\delta\bar{r} = \bar{r}_u \delta u + \bar{r}_v \delta v$ calculați, respectiv de-a lungul celor două curbe.

Asadar,

$$\begin{aligned}
\cos \theta &= \frac{d\bar{r} \cdot \delta\bar{r}}{\|d\bar{r}\| \|\delta\bar{r}\|} \Big|_M = \frac{\bar{r}_u^2 du \delta u + \bar{r}_u \bar{r}_v (du \delta v + \delta u dv) + \bar{r}_v^2 dv \delta v}{\sqrt{\varphi(du, dv)} \sqrt{\varphi(\delta u, \delta v)}} \Big|_M \text{ sau} \\
\cos \theta &= \frac{Edu \delta u + F(du \delta v + \delta u dv) + Gdv \delta v}{\sqrt{\varphi(du, dv)} \sqrt{\varphi(\delta u, \delta v)}} \Big|_M.
\end{aligned}$$

Dacă $\theta = \pi/2$ spunem că cele două curbe Γ_1, Γ_2 sunt ortogonale în M .

Aceasta este echivalent însă cu:

$$Edu \delta u + F(du \delta v + dv \delta u) + Gdv \delta v = 0$$

Dacă cele două curbe Γ_1, Γ_2 sunt curbele coordonate $\Gamma_1: v = v_0, \Gamma_2: u = u_0$ și $M(u_0, v_0)$ vom avea $dv = 0, \delta u = 0$. Atunci obținem:

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}} \Big|_M$$

Deci, curbele coordonate sunt ortogonale dacă și numai dacă $F = 0$.

Exemple : Se dă suprafața Σ :

$$\bar{r} = u\bar{i} + (u+v)\bar{j} + (u+v^2)\bar{k}, \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ și curbele } \Gamma_1: v=1, \quad \Gamma_2: u=v \text{ situate pe suprafața } \Sigma.$$

Se cere :

a) Să se calculeze lungimea arcului M_1M_2 al curbei Γ_2 , unde $M_1(0,0), M_2(1,1)$.

b) Să se calculeze unghiul curbelor Γ_1, Γ_2 în M_2 .

Soluție:

Determinăm prima formă fundamentală a suprafeței:

$$\bar{r}_u = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}, \bar{r}_v = \bar{j} + 2v\bar{k} \text{ implică } \bar{r}_u^2 = 3, \bar{r}_u \cdot \bar{r}_v = 1 + 2v, \bar{r}_v^2 = 1 + 4v^2$$

$$\text{Deci, } \varphi(du, dv) = 3du^2 + 2(1+2v)dudv + (1+4v^2)dv^2.$$

a) Curba Γ_2 mai poate fi dată prin $u=t, v=t$. Atunci $u'(t) = v'(t) = 1$. Obținem :

$$\begin{aligned} l_{M_1M_2} &= \int_0^1 \sqrt{6+4t+4t^2} dt = \int_0^1 \sqrt{(2t+1)^2 + 5} dt = \frac{1}{2} \int_1^3 \sqrt{t^2 + 5} dt = \\ &= \frac{1}{4} (3\sqrt{14} + 5\ln(3+\sqrt{14}) - \sqrt{6} - 5\ln(1+\sqrt{6})) \end{aligned}$$

b) Coeficienții primei forme fundamentale în $M_2(1,1)$ sunt $E=3, F=3, G=5$. Ținând seama că pe Γ_1 avem $dv=0$, iar pe $\Gamma_2, \delta u = \delta v$ obținem:

$$\cos \theta = \frac{3du\delta u + 3du\delta u}{\sqrt{3du^2} \cdot \sqrt{3\delta u^2 + 6\delta u^2 + 5\delta u^2}} = \frac{\sqrt{42}}{7}$$

IX.6. A doua formă fundamentală a unei suprafețe.

Direcții și linii asimptotice ale unei suprafețe

Fie σ o suprafață elementară, regulată de ordin cel puțin doi, cu toate punctele ordinare, având reprezentarea parametrică : $\bar{r} = \bar{r}(u, v), (u, v) \in I \times J$.

Definiția 10. Se numește a doua formă fundamentală a suprafeței σ expresia:

$$\bar{N} \cdot d^2\bar{r}.$$

Prin diferențiere avem : $d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv$ și $d^2\bar{r} = \bar{r}_{uu} du^2 + 2\bar{r}_{uv} dudv + \bar{r}_{vv} dv^2$.

Versorul normalei, $\bar{N}$, are expresia :

$$\bar{N} = \frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{\sqrt{\Delta}}$$

Astfel obținem:

$$\bar{N} \cdot d^2\bar{r} = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2, \text{ unde}$$

$$L = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{uu}), \quad M = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{uv}), \quad N = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{vv}).$$

Așadar, a doua formă fundamentală a unei suprafețe σ este o formă pătratică în du, dv , notată $\psi(du, dv)$. Deci,

$$\psi(du, dv) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2.$$

Definiția 11. Se numește direcție asimptotică a suprafeței σ în punctul $P \in \sigma$ o direcție tangentă la suprafața σ în P și pentru care a doua formă fundamentală este nulă.

Prin urmare, ecuația direcțiilor asimptotice ale suprafeței σ în punctul $P \in \sigma$ este:

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0.$$

adică,

$$Lm^2 + 2Mm + N = 0.$$

unde, $m = \frac{dv}{du}$, iar coeficienții L, M, N sunt calculați în punctul P .

În fiecare punct P al suprafeței (ce are proprietățile precizate la începutul paragrafului) există două direcții asimptotice care sunt:

- reale și distincte, dacă $(M^2 - LN)|_P > 0$, caz în care punctul P se numește *hiperbolic*.
- imaginare, dacă $(M^2 - LN)|_P < 0$, caz în care punctul se numește *eliptic*.
- reale și egale, dacă $(M^2 - LN)|_P = 0$, caz în care punctul P se numește *parabolic*.

Definiția 12. Se numește linie asimptotică a suprafeței σ o curbă Γ , situată pe suprafața σ , care este tangentă în fiecare punct al ei unei direcții asimptotice.

Ecuația diferențială a liniilor asimptotice este :

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0$$

care este de ordinul întâi și gradul doi.

Se observă ușor că:

- prin fiecare punct hiperbolic al suprafeței trec două linii asimptotice reale.
- prin fiecare punct eliptic al suprafeței trec două linii asimptotice imaginare.
- prin fiecare punct parabolic al suprafeței trece o singură linie asimptotică.

Exemple: Se da suprafața σ ce are reprezentarea parametrică :

$$\bar{r} = u\bar{i} + v\bar{j} + (v + \ln u)\bar{k}, \quad (u, v) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}. \text{ Se cere:}$$

- Să se scrie a doua formă fundamentală a suprafeței.
- Să se precizeze natura punctelor suprafeței.
- Să se determine liniile asimptotice ale suprafeței.

Soluție:

$$\bar{r}_u = \bar{i} + v\bar{j} + \frac{1}{u}\bar{k}, \quad \bar{r}_v = u\bar{j} + \bar{k}, \quad \bar{r}_{uu} = -\frac{1}{u^2}\bar{k}, \quad \bar{r}_{uv} = \bar{j}, \quad \bar{r}_{vv} = \bar{0}.$$

$$\text{Rezultă, } E = 1 + v^2 + \frac{1}{u^2}, \quad F = uv + \frac{1}{u}, \quad G = 1 + u^2, \quad \Delta = \left(1 + v^2 + \frac{1}{u^2}\right)(1 + u^2) - \left(uv + \frac{1}{u}\right)^2$$

$$L = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{uu}) = -\frac{1}{u\sqrt{\Delta}};$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{uv}) = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}},$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{vv}) = 0.$$

Astfel, a doua formă fundamentală a suprafeței este :

$$\psi(du, dv) = -\frac{1}{u\sqrt{\Delta}} du^2 - \frac{2}{\sqrt{\Delta}} dudv.$$

b) Întrucât $M^2 - LN = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} > 0$ în fiecare punct al suprafeței, rezultă că toate punctele suprafeței sunt hiperbolice.

c) Ecuația diferențială a liniilor asimptotice este:

$$-\frac{1}{u\sqrt{\Delta}} du^2 - \frac{2}{\sqrt{\Delta}} dudv = 0 \text{ sau } du\left(\frac{1}{u} du + 2dv\right) = 0,$$

echivalentă cu $du = 0$ sau $\frac{1}{u} du + 2dv = 0$.

Obținem astfel cele două familii de linii asimptotice (prin fiecare punct al suprafeței trece câte o curbă din fiecare familie) $u = c_1$, $\ln u + 2v = c_2$, unde c_1, c_2 sunt constante reale.

IX.7. Probleme rezolvate

1) Să se scrie ecuația planului tangent, normala și expresia analitică a versorului normalei la suprafața:

$$\sigma : \bar{r}(u, v) = 2v\bar{i} + (u+v)\bar{j} + uv\bar{k} \text{ în punctul } M_0(u=v=1).$$

Soluție:

Reprezentarea parametrică a suprafeței este:

$$\begin{cases} x = 2v \\ y = u + v \\ z = uv \end{cases}$$

iar coordonatele carteziene ale punctului M_0 se obține înlocuind $u = v = 1$ în ecuațiile parametrice. Avem: $M_0(2, 2, 1)$

Avem succesiv

$$\bar{r}_u = \bar{j} + v\bar{k}, \quad \bar{r}_v = 2\bar{i} + \bar{j} + u\bar{k} \text{ si } \bar{r}_u(1,1) = \bar{j} + \bar{k}, \quad \bar{r}_v(1,1) = 2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}.$$

Vectorul director al normalei la suprafață în M este $\bar{n} = \bar{r}_u(1,0) \times \bar{r}_v(1,0)$.

$$\bar{n} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\bar{j} - 2\bar{k}$$

Ecuația planului tangent la suprafață în M este :

$$\pi_t : \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

adică $2y - 2z - 2 = 0$, iar ecuațiile normalei în M sunt:

$$\frac{x-2}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2}, \text{ adică } x=2, \quad 2y+2z-6=0.$$

Un vector normal la suprafață are deci direcția $\bar{n}(0,2,-2)$.

Vectorul $\bar{u} = \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|}$ este vectorul acestei direcții.

$$\bar{u} = \frac{2\bar{j} - 2\bar{k}}{\sqrt{2^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{j} - \bar{k}).$$

2) Fie suprafața $\Sigma : x = u + \cos v, y = u - \sin v, z = \sqrt{2}u$ și $M_0(1,0,\sqrt{2})$ pe suprafață.

a) Să se determine unghiul curbelor de coordonate (parametrice) ce trec prin M_0 .

b) Să se arate că tangenta în M_0 la curba $\Gamma : u = \sin v$ coincide cu tangenta în M_0 la una din curbele de coordonate.

Soluție:

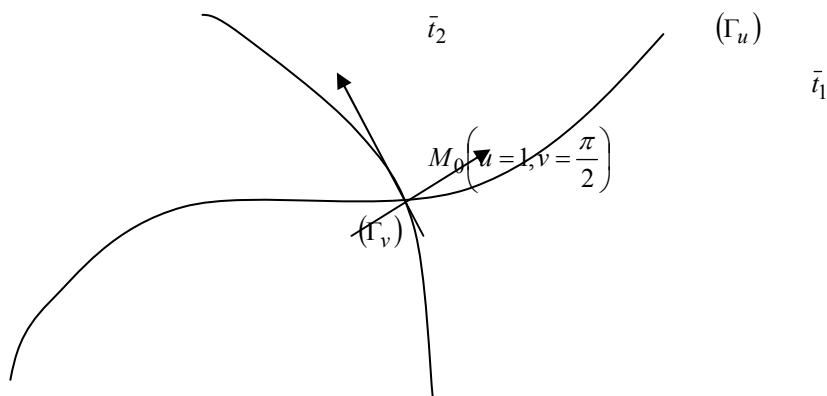
$$M_0 \in \Sigma \text{ implică } \begin{cases} u + \cos v = 1 \\ u - \sin v = 0, \text{ adică } u = 1, v = \frac{\pi}{2} \\ \sqrt{2}u = \sqrt{2} \end{cases}.$$

Unghiul curbelor de coordonate ce trec prin M_0 este dat de relația:

$$\cos \varphi = \frac{F}{\sqrt{E \cdot G}}.$$

Înlocuind obținem $\cos \varphi = -\frac{1}{2}$ de unde $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

Raționamentul teoretic ce a condus la această formulă este următorul: unghiul curbelor de coordonate Γ_u și Γ_v în M_0 este unghiul vectorilor tangenți $\bar{t}_1$ și $\bar{t}_2$ la cele două curbe în punctul M_0 .



$$\Gamma_u : \begin{cases} x = u \\ y = u - 1 \\ z = \sqrt{2}u \end{cases} \quad \Gamma_v : \begin{cases} x = 1 + \cos v \\ y = 1 - \sin v \\ z = \sqrt{2} \end{cases}.$$

Vectorii tangenți în M_0 vor avea direcțiile:

$$\bar{t}_1(x'_u(1), y'_u(1), z'_u(1)); \bar{t}_2\left(x'_v\left(\frac{\pi}{2}\right), y'_v\left(\frac{\pi}{2}\right), z'_v\left(\frac{\pi}{2}\right)\right),$$

adică $\bar{t}_1(1,1,\sqrt{2})$ și $\bar{t}_2(-1,0,0)$.

Unghiul dintre cei doi vectori se determină din relația:

$$\cos \varphi = \frac{\bar{t}_1 \cdot \bar{t}_2}{|\bar{t}_1| \cdot |\bar{t}_2|} = -\frac{1}{2}$$

Deci $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

b) Parametrizând curba Γ obținem:

$$\Gamma : \begin{cases} x = \sin v + \cos u \\ y = 0 \\ z = \sqrt{2} \sin v \end{cases}$$

(reprezentarea parametrică a curbei Γ , se obține înlocuind în ecuația suprafeței $u = \sin v$).

Derivând observăm că direcția tangentei în M_0 este $\bar{t}(-1,0,0)$. Deci aceasta coincide cu tangenta la curbă.

3) Se dă suprafața reprezentată vectorial:

$$(\Sigma): \bar{r}(u, v) = (u - v)\bar{i} + (u^2 + 3v)\bar{j} + u \cdot v^2\bar{k}.$$

Să se determine prima formă fundamentală a suprafeței.

Soluție:

Expresia primei forme fundamentale este:

$$\varphi(du, dv) = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \text{ unde } E = \bar{r}_u^2, F = \bar{r}_u \bar{r}_v \text{ și } G = \bar{r}_v^2.$$

$$\bar{r}_u = \bar{i} + 2u\bar{j} + v^2\bar{k}, \bar{r}_v = -\bar{i} + 3\bar{j} + 2uv\bar{k}$$

$$E = \bar{r}_u^2 = \bar{r}_u \bar{r}_u = 1 + 4u^2 + v^4,$$

$$F = \bar{r}_u \bar{r}_v = -1 + 6u + 2uv^3,$$

$$G = \bar{r}_v^2 = \bar{r}_v \bar{r}_v = 1 + 9 + 4u^2v^2 = 10 + 4u^2v^2$$

Deci avem:

$$\varphi(du, dv) = (1 + 4u^2 + v^4)du^2 + 2(-1 + 6u + 2uv^3)dudv + (10 + 4u^2v^2)dv^2.$$

4) Să se scrie ecuația planului tangent și ecuația normalei la suprafața $\Sigma: \bar{r} = (2u + 3v) \cdot \bar{i} + 2u \cdot \bar{j} + \sin v \cdot \bar{k}, (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ în punctul $M(u = 1, v = 0)$.

Soluție:

Avem succesiv $\bar{r}_u = 2\bar{i} + 2\bar{j}, \bar{r}_v = 3\bar{i} + \cos v\bar{k}$ și

$$\bar{r}_u(1,0) = 2\bar{i} + 2\bar{j}, \bar{r}_v(1,0) = 3\bar{i} + \bar{k}.$$

Vectorul director al normalei la suprafață în M este $\bar{n} = \bar{r}_u(1,0) \times \bar{r}_v(1,0)$.

$$\bar{n} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\bar{i} - 2\bar{j} - 6\bar{k}$$

Coordonatele carteziene ale punctului M sunt $(2,2,0)$. Atunci ecuația planului tangent la suprafață în M este:

$$\pi_i = \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

adică $2x - 2y - 6z = 0$, iar ecuațiile normalei în M sunt:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{-6}, \text{ adică}$$

5) Se dă suprafața $\Sigma: x^2 - 2y^2 + yz - 3x - 2z + 4 = 0$ și punctul $M(0,0,2)$. Să se scrie ecuațiile normalei la suprafață în M .

Soluție:

$$\text{Avem: } \frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 3, \frac{\partial F}{\partial y} = -4y + z, \frac{\partial F}{\partial z} = y - 2$$

$$\text{Pentru } x=0, y=0, z=2 \text{ obținem: } \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_M = -3, \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_M = 2, \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_M = -2.$$

Ecuația planului tangent este:

$$-3(x-0) + 2(y-0) - 2(z-2) = 0,$$

adică $\pi_i: -3x + 2y - 2z + 4 = 0$ și ecuațiile normalei

$$\frac{x-0}{-3} = \frac{y-0}{2} = \frac{z-2}{-2}.$$

6) Se dă suprafața: $\Sigma: \vec{r} = 2u\vec{i} + (u-2v)\vec{j} + (u+v)\vec{k}$, $(u,v) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ și curbele $\Gamma_1: v=2$, $\Gamma_2: u=2v$ situate pe suprafața Σ . Se cer:

a) Să se calculeze lungimea arcului M_1M_2 al curbei Γ_2 , unde $M_1(u=0, v=0)$, $M_2(u=1, v=2)$.

b) Să se calculeze unghiul curbelor Γ_1, Γ_2 în M_2 .

Soluție:

Determinăm prima formă fundamentală a suprafeței:

$$\vec{r}_u = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \vec{r}_v = -2\vec{j} + \vec{k} \text{ implică:}$$

$$\vec{r}_u^2 = 4 + 1 + 1 = 6, \vec{r}_u \vec{r}_v = -2 + 1 = -1, \vec{r}_v^2 = 4 + 1 = 5.$$

Deci, $\varphi(du, dv) = 6du^2 + 2(-1)dudv + 5dv^2$.

a) Curba Γ_2 mai poate fi dată prin $u=2t$, $v=t$. Atunci $u'(t)=2$, $v'(t)=1$. Obținem:

$$I_{M_1M_2} = \int_0^1 \sqrt{25} dt = 5t \Big|_0^1 = 5$$

b) Coeficienții primei forme fundamentale în $M_2(u=1, v=2)$, sunt $E=6, F=-1, G=5$. Ținând seama că pe

Γ_1 avem $dv=0$, iar pe $\Gamma_2, 2\delta_v = \delta_u$ obținem:

$$\cos \theta = \frac{6du\delta u - du \frac{\delta u}{2}}{\sqrt{6du^2} \cdot \sqrt{6du^2 - \delta u^2 + 5\frac{\delta u^2}{4}}} = \frac{11}{\sqrt{6}\sqrt{25}} = \frac{11}{5\sqrt{6}}.$$