ANALIZĂ MATEMATICĂ

SINTEZE TEORETICE ȘI APLICAȚII

GRECU LUMINIȚA

1. ŞIRURI DE NUMERE REALE

1.1. Definiții. Mărginire. Monotonie

Prin şir de numere reale (denumit simplu șir) înţelegem o funcţie $f : \boldsymbol{N}^* \to \boldsymbol{R}$, care asociază oricărui număr natural n, $n \geq 1$, numărul real notat a_n ($f(n) = a_n$). N^* poate fi înlocuită cu $\boldsymbol{N}$ sau cu $N_k = \{n \in N / n \geq k\}$

Notaţii pentru un şir: $(a_n)_{n\geq 1}$, $(a_n)_{n\in N^*}$, $(a_n)_n$; a_n se numeşte termenul general al şirului, iar n poartă numele de rangul termenului respectiv.

Un șir poate fi dat fie precizându-se formula termenului general, fie printr-o relație de recurență.

Spunem că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit dacă $\operatorname{Im}(f)$ este o mulţime mărginită din $\boldsymbol{R}$, adică dacă şi numai dacă $\exists a, b \in R$ astfel încât: $a \leq a_n \leq b$ pentru orice $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geq 1$. Echivalent putem spune că: şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit dacă şi numai dacă $\exists\, M \in \boldsymbol{R}$ astfel încât $|a_n| \leq M$ oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geq 1$.

Dacă $a \leq a_n$, pentru orice $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geq 1$, spunem că şirul este mărginit inferior, iar dacă $a_n \leq b$, pentru orice $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geq 1$ spunem că şirul este mărginit superior. Şirurile care nu sunt mărginite se numesc nemărginite.

Spunem că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este un şir monoton dacă $f(n) = a_n$ este o funcţie monotonă (crescătoare sau descrescătoare).

Sirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este monoton crescător dacă $a_n \leq a_{n+1}$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geq 1$.

Sirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este monoton descrescător dacă $a_n \geq a_{n+1}$, oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geq 1$.

Dacă inegalităţile precedente sunt stricte se spune că şirul este strict crescător, respectiv strict descrescător. Un şir strict crescător sau strict descrescător se numeşte strict monoton.

Se observă că un şir crescător este mărginit inferior de primul termen al şirului, iar un şir descrescător este mărginit superior de primul lui termen.

1.2. Limita unui şir. Şir convergent. Şir divergent. Şir fundamental

Spunem că un număr real a este limita şirului $(a_n)_n$ şi scriem $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ sau $a_n \underset{n\to\infty}{\to} a$ sau mai simplu $a_n \to a$, dacă orice vecinătate a lui a conţine toţi termenii şirului cu excepţia unui număr finit de termeni. O formulare echivalentă este următoarea: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$, număr natural, astfel încât $\forall n \in \boldsymbol{N}$, $n \geq N(\varepsilon)$, să avem $|a_n - a| < \varepsilon$.

Spunem că un şir $(a_n)_n$ are limita $+\infty$ şi scriem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ sau $a_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$ sau mai simplu $a_n \to \infty$, dacă oricare ar fi numărul real $\varepsilon > 0$ există un număr natural ce depinde de ε, notat $N(\varepsilon)$, astfel încât oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geq N(\varepsilon)$ să avem $a_n > \varepsilon$.

Spunem că un şir $(a_n)_n$ are limita $-\infty$ şi scriem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ sau $a_n \underset{n\to\infty}{\to} -\infty$ sau mai simplu $a_n \to -\infty$ dacă oricare ar fi numărul real $\varepsilon > 0$ există un număr natural ce depinde de ε, notat $N(\varepsilon)$, astfel încât oricare ar fi $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geq N(\varepsilon)$ să avem $a_n < -\varepsilon$.

Un şir se numeşte convergent dacă are limita un număr real. Un şir care nu este convergent se numeşte divergent. În categoria şirurilor divergente intră atât şirurile care nu au limită cât şi cele cu limita $\pm\infty$.

Un şir $(a_n)_n$ se numeşte şir fundamental (sau şir Cauchy) dacă şi numai dacă oricare ar fi ε>0, există un număr natural ce depinde de ε, notat $N(\varepsilon)$, astfel încât oricare ar fi numerele naturale m şi n, $m, n \geq N(\varepsilon)$, să avem $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Sirul $(a_n)_n$ este şir fundamental dacă şi numai dacă oricare ar fi ε>0, există un număr natural ce depinde de ε, notat $N(\varepsilon)$, astfel încât oricare ar fi numărul natural n, $n \geq N(\varepsilon)$ şi oricare ar fi numărul natural p, să avem $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.

1.3. Proprietăţi importante

1. Limita unui şir , dacă există, este unică.
2. Dacă $a_n \leq b_n$, $\forall\, n \in \boldsymbol{N}$, $n \geq 1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ iar $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, atunci $a \leq b$.
3. Dacă $a_n \leq b_n \leq c_n$, $\forall\, n \in \boldsymbol{N}$, $n \geq 1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$. (Criteriul cleştelui)
4. Dacă $|a_n - a| \leq b_n$ şi $b_n \to 0$, atunci $a_n \to a$. (Criteriul comparaţiei)
5. Dacă $b_n \to 0$ şi $|a_n| \leq M$, $\forall n \in \boldsymbol{N}$, $n \geq 1$, atunci $a_n b_n \to 0$.
6. Lema lui Cesaro-Stolz. Fie $(b_n)_n$ un şir strict monoton şi nemărginit, $(a_n)_n$ un şir oarecare. Dacă şirul $\dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ are limită atunci şirul $\dfrac{a_n}{b_n}$ are limită şi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$
7. Orice şir convergent este mărginit.
8. Orice şir monoton şi mărginit este convergent (Weierstrass).

a. Orice şir crescător şi mărginit superior este convergent.

b. Orice şir descrescător şi mărginit inferior este convergent.

9. Orice şir mărginit conţine un subşir convergent (lema lui Cesaro).

10. Orice subşir al unui şir convergent este convergent şi are limita egală cu limita şirului respectiv.
11. Dacă două subşiruri ale aceluiaşi şir sunt convergente dar au limite diferite, atunci şirul din care fac parte este divergent.
12. Un şir de numere reale este convergent dacă şi numai dacă este un şir fundamental (Criteriul lui Cauchy).

1.4. Operații pe $\overline{R}$

Fie $l \in R$, atunci au loc relațiile formale:

$$l + \infty = +\infty$$
$$l - \infty = -\infty$$
$$\infty + \infty = +\infty$$
$$-\infty - \infty = -\infty$$
$$l(+\infty) = \begin{cases} +\infty, \; daca \; l > 0 \\ -\infty, \; daca \; l < 0 \end{cases}$$
$$l(-\infty) = \begin{cases} +\infty, \; daca \; l < 0 \\ -\infty, \; daca \; l > 0 \end{cases}$$
$$(+\infty)(+\infty) = +\infty$$
$$(-\infty)(+\infty) = -\infty$$
$$(-\infty)(-\infty) = +\infty$$
$$\frac{l}{\pm\infty} = 0$$
$$\sqrt[k]{+\infty} = +\infty$$
$$\sqrt[imp]{-\infty} = -\infty$$
$$0^{+\infty} = 0$$
$$l^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, \; daca \; l > 1 \\ 0, \; daca \; 0 < l < 1 \end{cases}$$
$$\infty^{l} = \begin{cases} +\infty, \; daca \; l > 0 \\ 0, \; daca \; l < 0 \end{cases}$$
$$\infty^{\infty} = \infty$$
$$\infty^{-\infty} = 0$$
$$\log_a(\infty) = \begin{cases} \infty, \; daca \; a > 1 \\ -\infty, \; daca \; 0 < a < 1 \end{cases}$$
$$\log_a(0) = \begin{cases} -\infty, \; daca \; a > 1 \\ \infty, \; daca \; 0 < a < 1 \end{cases}$$

Nedeterminări

$\infty - \infty$; $0 \cdot \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; 1^{∞}; ∞^{0}, 0^{0}

1.5. Limite importante

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + ... + a_1 n + a_0}{b_l n^l + b_{l-1}n^{l-1} + ... + b_1 n + b_0} = \begin{cases} \frac{a_k}{b_l}, daca\ l = k \\ 0, \quad daca\ l > k \\ +\infty, daca\ l < k\ si\ a_k \cdot b_l > 0 \\ -\infty, daca\ l < k\ si\ a_k \cdot b_l < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, daca\ |q| < 1 \\ 1, daca\ q = 1 \\ +\infty, daca\ q > 1 \\ nu\ exista, daca\ q \le -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \cong 2.718$$

Dacă $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, atunci $\lim_{n\to\infty}(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$

Pentru cazul în care $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1;\ \lim_{n\to\infty}\frac{(1+a_n)^\alpha - 1}{a_n} = \alpha;\ \lim_{n\to\infty}\frac{a^{a_n} - 1}{a_n} = \ln a$$

Alte criterii care se pot aplica în calculul unor limite ale unor șiruri cu termeni strict pozitivi:

1. Criteriul raportului: dacă există $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, atunci

Dacă $l < 1$, atunci $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Dacă $l > 1$, atunci $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

2. Criteriul radical: dacă există $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, atunci $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = l$, atunci

1.6. Probleme rezolvate

Să se calculeze:

1. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3 + 4n - 1}{(5n+3)(n^2+1)}$

Observăm că gradul numărătorului este 3 și este egal cu gradul numitorului. Limita va fi dată de raportul coeficienților dominanți. Astfel $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3 + 4n - 1}{(5n+3)(n^2+1)} = \frac{2}{5}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4-3n^2+5n-1}{n^2+1}$

Observăm că gradul numărătorului este 4 și cel al numitorului 2. Coeficienții dominanți au același semn, deci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4-3n^2+5n-1}{n^2+1}=+\infty$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3-1}{1-n^2}$

Observăm că gradul numărătorului este 3 și cel al numitorului 2. Coeficienții dominanți au semne diferite, deci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^3-1}{1-n^2}=-\infty.$$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(5n-1)(n+4)}{4-3n^2}$

Observăm că gradul numărătorului este 2 și cel al numitorului tot 2, astfel $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(5n-1)(n+4)}{4-3n^2}=-\dfrac{5}{3}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+5^n}{3^n-3\cdot 5^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n+1\right)}{5^n\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n-3\right)}=-\dfrac{1}{3}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+2\cdot 5^n-6^n}{2^n-7^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7^n\left(\left(\frac{3}{7}\right)^n+2\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^n-\left(\frac{6}{7}\right)^n\right)}{7^n\left(\left(\frac{2}{7}\right)^n-1\right)}=0$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{2}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\ldots\dfrac{2}{n}\le 2\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}=0$. Astfel avem: $0\le\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}\le 0$.

Folosind criteriul cleștelui obținem $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{4+n\cdot 3^n}$

$0\le\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{4+n\cdot 3^n}\le\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^n}=0$. Folosind criteriul cleștelui obținem: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{4+n\cdot 3^n}=0$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+1}\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+4-n-1}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+1}}=0$$

10. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+1}{4n-3}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+1}{4n-3}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4n+1}{4n-3}-1\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{4n-3}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{4n-3}\right)^{\frac{4n-3}{4}\cdot\frac{4}{4n-3}\cdot n}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{4n-3}}=e\,.$$

2. SERII DE NUMERE REALE

2.1. Definiţii. Serii convergente şi divergente

Definiţia 2.1. Fie $(u_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale şi $(s_n)_{n\geq 1}$ un alt şir de numere reale dat de: $s_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$.

Perechea de şiruri $((u_n)_{n\geq 1}$, $(s_n)_{n\geq 1}$) se numeşte *serie de numere reale* şi se notează: $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ sau $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ (sau $\sum_{n\in N}u_n$ sau $\sum_{n}u_n$ sau $\sum u_n$).Numerele $u_1,u_2,\ldots$ se numesc *termenii seriei*; u_n se numeşte *termenul general al seriei,* iar şirul s_n se numeşte şirul sumelor parţiale ale seriei.

Definiţia 2.2. Fie $\sum u_n$ o serie de numere reale. Dacă şirul $(s_n)_n$ are limita s (finită sau infinită), deci dacă există $s=\lim_{n\to\infty}s_n$ vom scrie $s=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ sau $s=u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ şi vom spune că *suma seriei este s*.

Observaţia 2.1. Simbolul $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ (sau $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$) este de fapt o notaţie (un nume) pentru seria (pentru perechea de şiruri): $((u_n)_{n\geq 1}$, $(s_n)_{n\geq 1})$. Egalitatea $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=s$ (scrisă şi $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=s$) exprimată verbal : “suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ este s“ (sau “suma seriei $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ este s”) semnifică faptul că şirul sumelor parţiale ale seriei are limita s (nu vom citi: seria $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ este egală cu s).

In acest caz se mai spune că suma (conţinând o infinitate de termeni): $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ este egală cu s, acordându-se astfel sens unei sume infinite.

Definiţia 2.3. Dacă şirul sumelor parţiale ale unei serii nu are limită, seria respectivă se numeşte *serie oscilantă.*

Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este oscilantă expresia $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ nu are sens.

Definiţia 2.4. Dacă şirul sumelor parţiale ale unei serii este convergent seria se numeşte *serie convergentă.* In caz contrar seria se numeşte *divergentă.*

Deci, dacă şirul sumelor parţiale nu are limită, sau dacă limita sa este $+\infty$ sau $-\infty$, seria se numeşte serie divergentă. Astfel seria oscilantă este o serie divergentă.

Exemple:

2. Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.Termenul general al acestei serii este $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $n \geq 1$

Sirul sumelor parţiale are termenul general $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$, $n \geq 1$

Tinând seama de identitatea $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, $k=1,2,\ldots n$ obţinem: $s_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$,

$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$, deci $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n+1}) = 1$. Astfel, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ este convergentă şi are suma 1. Vom scrie $1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ sau $1 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$

3. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ are termenul general $u_n = \frac{1}{n^2}$, $n \geq 1$. Pentru această serie avem: $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $n \geq 1$.

Se verifică fără dificultate că: $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, $k=2,3,\ldots,n$.

Atunci $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}) = 2 - \frac{1}{n} < 2$, $n \geq 1$

Deci, şirul sumelor parţiale fiind strict crescător şi mărginit superior este convergent. In concluzie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă. Nu putem preciza care este suma acestei serii, putem spune doar că suma acestei serii este situată în intervalul [1,2] întrucât $1 \leq s_n < 2$, $n \geq 1$.

4. Seria $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots$ numită *seria geometrică* are termenul general al şirului sumelor parţiale: $s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q-1}$, $q \neq 1$.

i). Dacă |q|<1, obţinem $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}$.Seria este deci convergentă şi are suma $s = \frac{1}{1-q}$.

Vom scrie $\frac{1}{1-q}=1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots$ (sau 1=$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$)

ii). Dacă q=1, s_n=$\underbrace{1+1+\ldots+1}_{de\ n\ ori}=n$, $\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty} n=+\infty$.

Seria are suma $+\infty$, vom scrie $+\infty=1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots$ sau $\sum_{n=1}^{\infty} q^n=+\infty$. Deci acestă serie este divergentă.

iii). Dacă q = -1, $s_n=\begin{cases} 0, & pentru\ n\ par \\ 1, & pentru\ n\ impar \end{cases}$; şirul $(s_n)_n$ nu are limită (are punctele limita 0 si 1).

Această serie este oscilantă, deci divergentă.

iv). Dacă q<-1, cum $s_n=\frac{q^n-1}{q-1}$ rezultă că şirul $(s_n)_n$ nu are limită (are punctele limită $+\infty$ şi $-\infty$). Atunci seria este oscilantă, deci divergentă.

v). Dacă q>1, cum $s_n=\frac{q^n-1}{q-1}$ obţinem $\lim_{n\to\infty} s_n=+\infty$, deci seria este divergentă.

In concluzie seria geometrică $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ este convergentă (cu suma $\frac{1}{1-q}$) dacă |q|<1 şi divergentă dacă $|q|\geq 1$.

5. Seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ numită seria armonică are termenul general $u_n=\frac{1}{n}$, termenul general al şirului sumelor parţiale este $s_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$. Se observă că s_n este strict crescător.

Dar s_{2n} - $s_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$, $\forall n\geq 1$

Dacă şirul $(s_n)_{n\geq 1}$ ar fi convergent atunci şi $(s_{2n})_{n\geq 1}$ ca subşir al şirului $(s_n)_{n\geq 1}$ ar fi convergent şi ar avea aceeaşi limită. Trecând la limită în inegalitatea s_{2n} - $s_n>\frac{1}{2}$ rezultă $0\geq\frac{1}{2}$, contradicţie. Deci şirul $(s_n)_n$ nu este mărginit (altfel fiind monoton ar fi convergent). Fiind strict crescător şi nemărginit are limita $+\infty$.

In concluzie putem scrie: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=+\infty$, deci seria armonică este divergentă.

6. Seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ este divergentă pentru că şirul sumelor parţiale tinde la infinit.

$$s_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}\xrightarrow{n\to\infty}\infty$$

7. Seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$ este divergentă pentru că şirul sumelor parţiale tinde la infinit.

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})=\sqrt{n}\xrightarrow{n\to\infty}\infty$$

2.2. Criterii de convergenţă

Teorema 2.1. (Criteriul general al lui Cauchy).

O condiţie necesară şi suficientă ca seria $\sum_{n} u_n$ sa fie convergentă este ca: $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,N(\varepsilon)$, astfel încât $\forall n>N(\varepsilon)$, $p\geq 1$ să avem: $\left|u_{n+1}+u_{n+1}+\ldots+u_{n+p}\right|<\varepsilon$.

Aplicaţie. Să se studieze convergenţa seriei *armonice generalizate* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}=1+\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\ldots+\frac{1}{n^a}+\ldots$ pentru $a\in(0,1)$.

Soluţie. Aplicând criteriul lui Cauchy obţinem:

$$\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}\right|=\frac{1}{(n+1)^a}+\frac{1}{(n+2)^a}+\ldots+\frac{1}{(n+p)^a}>\frac{p}{(n+p)^a}>\frac{p}{n+p}\quad,\forall p\geq 1.$$

Luând $p=n$ rezultă că $\frac{1}{(n+1)^a}+\frac{1}{(n+2)^a}+\ldots+\frac{1}{(2n)^a}>\frac{n}{n+n}=\frac{1}{2}$

Deci pentru $\varepsilon=\frac{1}{3}$ condiţia de convergenţă din criteriul lui Cauchy nu este satisfăcută.

Astfel seria este divergentă.

Teorema2.2. O condiţie necesară ca seria $\sum_{n} u_n$ să fie convergentă este ca $\lim_{n\to\infty} u_n=0$

Consecinţa 2.1. Dacă şirul $(u_n)_n$ nu este convergent către zero seria $\sum_{n} u_n$ este divergentă.

Observaţia 2.2. Dacă $(u_n)_n$ este convergent către zero nu rezultă că seria $\sum_{n} u_n$ este convergentă.

De exemplu, seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ este divergentă deşi avem $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Teorema 2.3.(Criteriul lui Abel).

Dacă şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum_{n\geq 1} u_n$ este mărginit şi $(a_n)_n$ este un şir descrescător de numere pozitive, convergent către zero, atunci seria $\sum_{n\geq 1} a_n u_n$ este convergentă.

Exemplu: Seria: 1+1+1-1-1-1+1+1+1-1-1-1+... are şirul sumelor parţiale: 1,2,3,2,1,0,1,2,3,... şi acest şir este mărginit. Sirul: sin1, $\sin\frac{1}{2}$, $\sin\frac{1}{3}$,… este şir descrescător de numere pozitive convergent către zero.

Conform criteriului lui Abel, seria: $\sin 1 + \sin\frac{1}{2} + \sin\frac{1}{3} - \sin\frac{1}{4} - \sin\frac{1}{5} - \sin\frac{1}{6} + \ldots$ este convergentă.

Definiţia 2.5. O serie în care produsul oricăror doi termeni consecutivi este negativ se numeşte *serie alternată*.

Ea are forma:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots$$

sau forma: $-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \ldots + (-1)^n u_n + \ldots$, unde $u_i>0$, $i = 1,2,3,\ldots$

Deoarece ultima serie se obţine din prima prin înmulţire cu -1, vom studia doar seri alternate de primul tip.

Teorema 2.4. (Criteriul lui Leibniz).

O serie alternată $u_1 - u_2 + u_3 - \ldots$, $u_n>0$, cu proprietatea că şirul $(u_n)_n$ este descrescător şi convergent către zero, este convergentă.

Exemplu: Conform criteriul lui Leibniz, seria *armonică alternată*: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$ este convergentă întrucât şirul $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ este descrescător şi convergent către zero.

Definiţia 2.6. Seria $\sum u_n$ se numeşte absolut convergentă dacă seria modulelor $\sum |u_n|$ este convergentă.

Teorema 2.5. Orice serie absolut convergentă este convergentă.

Observaţia 2.2. Reciproca acestei teoreme nu este adevărata.

Exemplu: Seria armonică alternată $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$ este convegentă, dar nu este absolut convergentă, întrucât seria modulelor: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ este seria armonică ce este divergentă.

2.3. Serii cu termeni pozitivi. Criterii de convergență pentru acestea

Definiţia 2.7. Seria $\sum_{n\geq 1} u_n$ cu $u_n > 0$, $\forall n\geq 1$, se numeşte *serie cu termeni pozitivi*.

Observaţia 2.3. Dacă o serie cu termeni pozitivi este convergentă, ea este absolut convergentă.

Teorema 2.6. (Criteriul monotoniei).

Condiţia necesară şi suficientă ca o serie cu termeni pozitivi să fie convergentă este ca şirul sumelor parţiale ale seriei să fie mărginit.

Exemplu: Fie seria armonică generalizată $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$, cu $a>1$. Termenii şirului sumelor parţiale pentru $p=2^n$ sunt

$$s_{2^n}=1+\left[\frac{1}{(2^1)^a}+\frac{1}{3^a}\right]+\left[\frac{1}{(2^2)^a}+\frac{1}{5^a}+\frac{1}{6^a}+\frac{1}{7^a}\right]+...+\left[\frac{1}{(2^{n-1})^a}+\frac{1}{(2^{n-1}+1)^a}+\ldots+\frac{1}{(2^n-1)^a}\right]$$

Tinând cont de inegalităţile:

$$\frac{1}{(2^1)^a}+\frac{1}{3^a}<2\cdot\frac{1}{(2^1)^a}=\frac{1}{2^{a-1}}$$

$$\frac{1}{(2^2)^a}+\frac{1}{5^a}+\frac{1}{6^a}+\frac{1}{7^a}<2^2\cdot\frac{1}{(2^2)^a}=\left(\frac{1}{2^{a-1}}\right)^2$$

……………………………......................................

$$\frac{1}{(2^{n-1})^a}+\frac{1}{(2^{n-1}+1)^a}+\ldots+\frac{1}{(2^n-1)^a}<2^n\cdot\frac{1}{(2^n)^a}=\left(\frac{1}{2^{a-1}}\right)^{n-1}$$

Rezultă că $s_{2^n}<1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2^{a-1}}\right)^k=\frac{1-(\frac{1}{2^{a-1}})^n}{1-\frac{1}{2^{a-1}}}<\frac{1}{1-\frac{1}{2^{a-1}}}$, întrucât $a>1$ şi deci $\frac{1}{2^{a-1}}<1$.

Se constată atunci că $\forall n\Rightarrow s_n<s_{2^n}<\frac{1}{1-\frac{1}{2^{a-1}}}$, deci $(s_n)_n$ este mărginit, ceea ce atrage convergenţa seriei.

Teorema 2.7 (Primul criteriul de comparaţie).

Fie $\sum u_n$ şi $\sum v_n$ două serii cu termeni pozitivi. Dacă există un număr N a.î. $u_n\le v_n$, $\forall n\ge N$, atunci:

1. Daca seria $\sum v_n$ este convergentă, atunci şi seria $\sum u_n$ este convergentă.

2. Daca seria $\sum u_n$ este divergentă, atunci şi seria $\sum v_n$ este divergentă.

Exemplu:

Să se determine natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n\cdot5^n}$.

Avem evident o serie cu termeni pozitivi pentru care $\frac{n}{1+n\cdot5^n}<\frac{n}{n\cdot5^n}=\frac{1}{5^n}$, $\forall n\ge1$.

Cum seria geometrică $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ este convergentă având raţia $q=\frac{1}{5}<1$, aplicând criteriul comparaţiei rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n\cdot5^n}$ este convergentă.

Teorema 2.8. (Al doilea criteriu de comparaţie –cu limită)

Fie seriile cu termeni pozitivi $\sum u_n$ şi $\sum v_n$. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lambda>0$, λ -finit, cele două serii au aceiaşi natură.

Aplicaţie: Să se determine natura seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$.

Soluţie. Avem evident o serie cu termeni pozitivi. Ştim că seria armonică $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ este divergentă.

Notând cu u_n, respectiv v_n termenii generali ai celor doua serii, obţinem: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}>0$

Astfel, folosind criteriul precedent deducem că cele două serii au aceeaşi natură, deci seria este divergentă.

Teorema 2.9. (Criteriul rădăcinii sau criteriul lui Cauchy-cu limită).

Fie $\sum u_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lambda$, atunci:

1. Dacă λ<1 seria $\sum u_n$ este convergentă,

2. Dacă λ>1 seria $\sum u_n$ este divergentă,

Dacă $\lambda=1$ nu se poate decide natura seriei folosind acest criteriu.

Aplicaţie. Să se determine natura seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\sqrt{n(n+1)}-n\right]^n$.

Soluţie. Deoarece $\sqrt{n(n+1)}-n>0,\quad \forall n\geq 1$, avem o serie cu termeni pozitivi.

Fie $\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{n(n+1)}-n\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n(n+1)}+n}=\frac{1}{2}$. Cum λ<1, seria este convergentă.

Teorema 2.10. (Criteriul raportului sau criteriul lui D'Alembert-cu limită).

Fie $\sum u_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lambda$, atunci:

1. Dacă λ<1, seria $\sum u_n$ este convergentă;

2. Dacă λ>1,seria este divergentă,

Dacă $\lambda=1$ nu se poate decide natura seriei folosind acest criteriu.

Aplicaţie. Să se determine natura seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$.

Soluţie. Deoarece $u_n=\frac{n^n}{n!}>0$ avem o serie cu termeni pozitivi. Calculăm $\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{n^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1.$$

Conform criteriului raportului seria este divergentă.

Teorema 2.11. (Criteriul lui Raabe- Duhamel-cu limită).

Fie $\sum u_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă există $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lambda$, atunci:

1. Dacă $\lambda>1$, seria $\sum u_n$ este convergentă;

2. Dacă $\lambda<1$, seria $\sum u_n$ este divergentă.

Teorema nu ne spune ce se întâmplă dacă $\lambda=1$.

Aplicaţie. Să se stabilească natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}$.

Soluţie. Ea este evident o serie cu termeni pozitivi. Încercăm să aplicăm criteriul raportului pentru a stabili natura ei. Avem: $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+2}=1$, şi deci nu putem preciza natura seriei folosind acest criteriu..

Aplicând criteriul lui Raabe-Duhamel obţinem

$$\lambda=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{2n+2}{2n+1}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1,$$ deci seria este divergentă.

2.4. Operaţii cu serii

Propoziţia 2.1. Fie $\sum u_n$ si $\sum v_n$ două serii convergente având suma *s* respectiv *s'* şi α, β două numere reale. Atunci seria $\sum(\alpha u_n+\beta v_n)$ este convergentă şi are suma $\alpha s+\beta s'$. (Putem scrie $\sum(\alpha u_n+\beta v_n)=\alpha\sum u_n+\beta\sum v_n$).

Consecinţa 2.2. Fie $\sum u_n$ si $\sum v_n$ două serii convergente având suma *s* respectiv *s'*. Atunci:

1.Seria $\sum(u_n+v_n)$ este convergenta şi are suma s+s', adică $\sum(u_n+v_n)=\sum u_n+\sum v_n$;

2.Seria $\sum \alpha u_n$ este convergentă, pentru orice număr real α şi are suma αs, adică $\sum\alpha u_n=\alpha\sum u_n$;

3.Seria $\sum(-u_n)$ este convergentă şi are suma -s , adică $\sum(-u_n)=-\sum u_n$;

4.Seria $\sum(u_n-v_n)$ este convergentă şi are suma s-s', adică $\sum(u_n-v_n)=\sum u_n-\sum v_n$.

Observaţia 2.4. Dacă seria $\sum(u_n+v_n)$ este convergentă, nu rezultă că seriile $\sum u_n$, $\sum v_n$ sunt convergente. De exemplu seriile $\sum u_n = 1-1+1-1+\dots$, $\sum v_n = -1+1-1+\dots$, sunt divergente dar seria $\sum(u_n+v_n) = 0+0+\dots$ este convergentă.

2.5. Probleme rezolvate

1. Să se studieze convergența seriei $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$ și să se afle suma ei.

Soluţie:

Termenul general al seriei date este: $u_n=\frac{1}{n^2-1}$, $n\geq 2$. Temenul general al șirului sumelor parțiale este: $s_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1}$, $n\geq 1$.

Se verifică fără dificultate că: $\frac{1}{k^2-1}=\frac{1}{(k-1)(k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$, k=2,3,...,n.

Atunci

$$s_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

Calculăm $\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n})=\frac{3}{4}$.

Deci, şirul sumelor parţiale fiind convergent seria este convergentă și are suma $\frac{3}{4}$.

2. Să se studieze natura seriei: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}\sqrt[3]{2n^3+1}}{\sqrt{5n^2+n+3}}$.

Soluţie:

Avem:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)}n\sqrt[3]{2+\frac{1}{n^2}}}{n\sqrt{5+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)}\sqrt[3]{2+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{5+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}}=+\infty\neq 0.$$

Condiția necesară de convergență nu este îndeplinită, deci seria nu este convergentă.

3. Să se studieze natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4+5n^2-1}}$.

Soluţie:

Seria are termenul general $u_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^4+5n^2-1}} > 0, \forall n \geq 1$, deci avem o serie cu termeni pozitivi.

Aplicăm al doilea criteriu de comparație cu limită, considerând seia armonică generalizată, de termen general $v_n = \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$, ca fiind seria etalon.

Astfel calculăm $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n^4+5n^2-1}}}{\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{n^4+5n^2-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{4}{3}}}{n^{\frac{4}{3}}\sqrt[3]{1+\frac{5}{n^2}-\frac{1}{n^4}}} = 1$

Conform criteriului menționat seriile au aceeași natură deoarece limita este un număr finit, nenul.

Cum seria de termen general $v_n = \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ este o serie de tipul $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha = \frac{4}{3}$, adică o serie armonică generalizată, cu α supraunitar, deci o serie convergentă, rezultă că și seria dată este tot o serie convergentă.

4. Să se determine natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n - n}$.

Soluţie:

Știm că seria geometrică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$ este convergentă deoarece are rația $\frac{2}{3} < 1$.

Notând cu u_n, respectiv v_n termenii generali ai celor doua serii, obţinem: $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n}{3^n-n}}{\frac{2^n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^n-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-\frac{n}{3^n}} = 1 > 0$.

Atunci cele două serii au aceeaşi natură, deci seria dată este convergentă.

5. Să se determine natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^n$.

Soluţie:

Obsevăm că $u_n = \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^n > 0$, $\forall n \geq 1$, deci avem o serie cu termeni pozitivi.

Calculăm limita $\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$.

Cum $\lambda>1$, conform criteriului rădăcinii, seria este divergentă.

6. Să se arate că seria $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{(n+1)!}$ este convergentă şi are suma 1.

Soluţie:

$u_n = \frac{n}{(n+1)!} > 0 \quad (\forall) n \geq 1 \Rightarrow$ serie cu termeni pozitivi

Calculăm $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{(n+2)!}}{\frac{n}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n(n+2)} = 0 < 1 \Rightarrow$ conform criteriului raportului că seria este convergentă.

Pentru a calcula suma ei putem proceda în două moduri:

1) folosind faptul că $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} = e$;

2) folosind şirul sumelor parţiale.

1) $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n\geq 1} \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{(n+1)!} - \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+1)!} =$

$= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} - \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+1)!} = e - 1 - \left(e - 1 - \frac{1}{1!}\right) = 1$

2) $u_n = \frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \Rightarrow$

$n = 1,\ \frac{1}{2!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}$

$n=2,\ \frac{2}{3!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}$

$n = 3,\ \frac{3}{4!} = \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}$

$\vdots$

$n = n,\ \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$

$s_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{n}{(n+1)!} = 1$. Astfel suma seriei din enunț este 1.

7. Să se arate că seria $\sum_{n\geq 1}\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}$ este convergentă şi are suma $\frac{1}{2}$.

Soluţie: $\sum_{n\geq 1}\frac{n+2}{n!\left[1+n+1+(n+1)(n+2)\right]}=\sum_{n\geq 1}\frac{n+2}{n!\left[2+n+n^2+3n+2\right]}=$

$$=\sum_{n\geq 1}\frac{n+2}{n!\left(n^2+4n+4\right)}=\sum_{n\geq 1}\frac{n+2}{n!(n+2)^2}=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!(n+2)}$$

$u_n=\frac{1}{n!(n+2)}>0\Rightarrow$ o serie cu termeni pozitivi

Calculăm: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!(n+3)}}{\frac{1}{n!(n+2)}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!(n+2)}{(n+1)!(n+3)}=0<1$

Aplicând criteriul raportului rezultă că seria este convergentă.

Pentru a calcula suma ei folosim faptul că: $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}=e$.

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!(n+2)}=\sum_{n\geq 1}\frac{n+1}{(n+2)!}=\sum_{n\geq 1}\frac{n+2-1}{(n+2)!}=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+1)!}-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+2)!}=$$

$\left(e-\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}\right)\right)-\left(e-\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)\right)=\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}\Rightarrow$ Seria din enunț are suma $\frac{1}{2}$.

3. SERII DE DE PUTERI

3.1. Serii de puteri. Rază de convergenţă

Definiţia 3.1. Fie A o mulţime şi $(f_n)_{n\geq 1}$ un şir de funcţii definite pe mulţimea $A(f_n: A\to \boldsymbol{R}, n\geq 1)$.

Perechea $((f_n)_{n\geq 1}, (s_n)_{n\geq 1})$ unde $s_n=\sum_{k=1}^{n} f_k$, se numeşte *serie de funcţii* de *termen general* f_n şi se notează $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, $\sum_{n\geq 1} f_n$, $\sum_{n} f_n$ sau $\sum f_n$; funcţia s_n se numeşte *suma parţială de ordinul n* a seriei date, iar şirul de funcţii $(s_n)_{n\geq 1}$ se numeşte şirul sumelor parţiale.

Definiţia 3.2. Se numeşte *serie de puteri* o serie de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ în care $f_n(x)=a_n x^n$ sau $f_n(x)=a_n(x-a)^n$, $x\in\boldsymbol{R}$, cu $a_n\in\boldsymbol{R}$; şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ se numeşte *şirul coeficienţilor* seriei date.

O serie de puteri este deci o serie de forma

$$(1)\ a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

sau de forma

$$(2)\ a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+...+a_n(x-a)^n+...=\sum_{n=o}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

O serie de puteri de forma (2) se mai numeşte *serie de puteri centrată în punctul a*.

Întrucât prin substituţia $x-a=y$, o seri de forma (2) se reduce la $a_0+a_1y+a_2y^2+\ldots+a_ny^n+\ldots$, deci la o serie de forma (1), ne vom ocupa doar de seriile de forma (1) numite şi *serii de puteri centrate în punctul zero*.

Observaţia 3.1. Seriile de puteri constituie o generalizare "naturală" a funcţiilor polinomiale.

Definiţia 3.3. Seria $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ se numeşte *convergentă* în punctul $a\in R$, dacă seria de numere reale $\sum_{n=0}^{\infty}a_na^n$ este convergentă. Punctul a se numeşte *punctul de convergenţă* pentru seria considerată.

Definiţia 3.4. Mulţimea punctelor de convergenţă ale serii $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ se numeşte *mulţimea de convergenţă a seriei*.

Definiţia 3.5. Pe mulţimea punctelor de convergenţă se defineşte *o funcţie ce asociază fiecărui punct de convergenţă limita şirului sumelor parţiale în punctul respectiv*. Această funcţie, ce reprezintă *funcţia limită a şirului sumelor parţiale*, se numeşte *suma seriei*.

Definiţia 3.6. Seria $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ se numeşte *absolut convergentă* în punctul $a\in R$, dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_nx^n\right|$ este convergentă în punctul a.

Observaţia 3.2. Dacă o serie de puteri este absolut convergentă în punctul $a\in R$ atunci ea este convergentă în punctul a. Reciproca nu este adevărată.

Definiţia 3.7. Spunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ este *uniform convergentă* pe mulţimea A către funcţia $s(x)$ dacă şirul sumelor parţiale $(s_n)_{n\geq 0}$ este *uniform convergent* pe mulţimea A către funcţia s, adică dacă oricare ar fi $\varepsilon>0$ şi $\forall x\in A$, există un număr $N(\varepsilon)$ (care depinde de ε), astfel ca $\left|s_n(x)-s(x)\right|<\varepsilon$, $\forall n>N(\varepsilon)$.

Propoziția 3.1. Seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este *uniform convergentă* pe mulţimea A către funcţia $s(x)$ dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$ şi $\forall x \in A$, există un număr $N(\varepsilon)$ (care depinde de ε), astfel ca $\left|a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + ... + a_{n+p}x^{n+p}\right| < \varepsilon$, $\forall n > N(\varepsilon)$ şi $\forall p \in N^*$.

Teorema 3.1. (Teorema lui Abel).

Pentru orice serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, există un număr $R \geq 0$, finit sau infinit, astfel încât:

1. Seria este absolut convergentă pe intervalul $(-R, R)$;
2. Pentru orice x astfel încât $|x| > R$, seria este divergentă;
3. Seria este uniform convergentă pe intervalul $[-r, r]$, $0 < r < R$.

Definiţia 3.8. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri. Numărul $R \geq 0$, finit sau infinit, care satisface condiţiile:

i. Seria este absolut convergentă pe intervalul $(-R, R)$;
ii. Pentru orice x astfel încât $|x| > R$, seria este divergentă se numeşte *raza de convergenţă* a seriei date.

Observaţia 3.3. Teorema lui Abel nu precizează natura seriei în punctele R şi $-R$. Este posibil ca seria să fie convergentă în ambele puncte, doar în unul din ele, sau în nici unul.

Dacă seria este absolut convergentă în unul din aceste puncte, ea este absolut convergentă şi în celălalt punct, deoarece pentru ambele serii $\sum a_n R^n$ şi $\sum a_n (-R)^n$, seria modulelor este $\sum a_n R^n$. Dacă în unul din punctele $-R$, R seria este divergentă, în celălalt punct seria nu este absolut convergentă.

Pentru determinarea razei de convergență a unei serii de puteri se folosesc în general următoarele rezultate.

Teorema 3.2. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri. Dacă există $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda$ (finită sau infinită), atunci

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & pentru \;\; 0 < \lambda < +\infty \\ 0 & pentru \;\; \lambda = +\infty \\ +\infty & pentru \;\; \lambda = 0 \end{cases}$$

Teorema 3.3. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri. Dacă există $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$ (finită sau infinită), atunci

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & pentru \;\; 0 < \lambda < +\infty \\ 0 & pentru \;\; \lambda = +\infty \\ +\infty & pentru \;\; \lambda = 0 \end{cases}$$

Exemple:

1. Să se determine raza de convergenţă şi mulţimea de convergenţă a seriei geometrice $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Cum $a_n = 1$, $\forall n \in \boldsymbol{N}$ putem aplica oricare din cele două teoreme precedente.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1 \Rightarrow R=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|}=1.$

În punctul $x=1$ seria este divergentă ($s_n(1)=n\to\infty$).

În punctul $x=-1$ seria numerică este: 1-1+1-1+1-1.....

Astfel se observă că șirul termenilor seriei nu are limită deci nu converge la 0 i deci condiția necesară de convergență nu este îndeplinită. Seria este în acest punct divergentă.

Deci seria geometrică este convergentă pe mulţimea $A=(-1,+1)$.

2. Să se determine raza de convergenţă şi mulţimea de convergenţă a seriei : $1+\dfrac{x}{1}+\dfrac{x^2}{2}+...+\dfrac{x^n}{n}+...$

Cum $a_n=\dfrac{1}{n}$, $n\geq 1 \Rightarrow R=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|}=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}}=1$

În punctul $x=1$ seria e divergentă (se obţine seria armonică) ;

În punctul $x=-1$ seria e convergentă (se obţine seria armonică alternată).

Deci mulţimea de convergenţă a seriei este intervalul $[-1,+1)$.

3. Să se determine raza de convergenţă şi mulţimea de convergenţă a seriei : $1+\dfrac{2x}{1}+\dfrac{3x^2}{2}+\ldots$ $\dfrac{(n+1)x^n}{n}+\ldots$

Cum $a_n=\dfrac{n+1}{n}$, $n\geq 1 \Rightarrow R=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|}=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)n}{(n+1)^2}}=1$

În punctul $x=1$ seria e divergentă (se obţine seria: $1+2+\dfrac{3}{2}+...+\dfrac{n+1}{n}+...$, o serie pentru care limita termenului general este 1 nu 0, deci nu este îndeplinită condiția necesară de convergență) ;

În punctul $x=-1$ seria e tot divergentă (se obţine seria $1-2+\dfrac{3}{2}+...+(-1)^n\dfrac{n+1}{n}+...$ o serie pentru care nu este îndeplinită condiția necesară de convergență, căci termenul general nu tinde la 0, de fapt el nu are limită).

Deci mulţimea de convergenţă a seriei este intervalul $(-1,+1)$.

4. Să se determine raza de convergenţă şi mulţimea de convergenţă a seriei : $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^n$.

Cum $a_n=\dfrac{1}{n!}$, $n\geq 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0 \Rightarrow R=+\infty$.

Deci mulţimea de convergenţă a seriei este ***R***.

5. Să se determine raza de convergenţă şi mulţimea de convergenţă a seriei : $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!x^n$.

Cum $a_n=n!$, $n\geq 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=+\infty \Rightarrow R=0$.

Deci mulţimea de convergenţă a seriei este $\{0\}$.

3.2. Proprietăţi importante ale seriilor de puteri

Propoziţia 3.2. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este o serie de puteri având raza de convergenţă *R*, atunci funcţia limită (suma) a acestei serii este continuă pe intervalul $(-R, +R)$.

Observaţia 3.4. Propoziţia nu precizează continuitatea sumei seriei în punctele $-R$ şi *R*.

Propoziţia 3.3. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este o serie de puteri având raza de convergenţă *R* şi suma $s(x)$, atunci:

1) Seria derivatelor are aceeaşi rază de convergenţă *R*;

2) Funcţia $s(x)$ este derivabilă pe intervalul de convergenţă şi derivata sa este egală cu suma seriei derivatelor.

În acest caz putem scrie: $s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$, sau $(\lim_{n\to\infty} s_n(x))' = \lim_{n\to\infty} s_n'(x)$.

Teorema precedentă se numeşte "*teorema de derivare termen cu termen a seriilor de funcţii*".

Prescurtat vom scrie: $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)'$

Observaţia 3.5. Conform acestei propoziţii, putem deriva o serie de puteri termen cu termen şi obţinem o serie care are ca sumă derivata sumei seriei iniţiale. Procesul poate continua cu derivatele de ordinul doi, trei, etc. Putem generaliza rezultatul precedent.

Propoziţia 3.4. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este o serie de puteri având raza de convergenţă *R* şi suma $s(x)$, atunci:

1) Seria derivatelor de ordinul *n* are raza de convergenţă *R*.

2) Suma $s(x)$ este derivabilă de o infinitate de ori pe intervalul de convergenţă şi derivata sa ordinul *n* este egală cu suma seriei derivatelor de ordinul *n*.

Exemple:

Considerând seria geometrică, $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$, ce are pe mulțimea de convergență $(-1,\ 1)$ suma $s(x) = \frac{1}{1-x}$, adică pornind de la relația $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x}$, deducem că au loc relațiile următoare:

i) $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots = s'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

ii) $1 \cdot 2 + 3 \cdot 2x + 4 \cdot 3x^2 + \ldots + n(n-1)x^{n-2} + \ldots = s''(x) = \frac{1 \cdot 2}{(1-x)^3}$.

Astfel, dând diverse valori lui *x* putem obține rezultate precum:

$1 + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3^2} + 4 \cdot \frac{1}{3^3} + \ldots + n \cdot \frac{1}{3^{n-1}} + \ldots = \frac{9}{4}$ (se obține din prima relație pentru $x = \frac{1}{3}$).

Altfel scris rezultatul precedent afirmă că: $\lim_{n\to\infty}\left(1 + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3^2} + 4 \cdot \frac{1}{3^3} + \ldots + (n+1) \cdot \frac{1}{3^n}\right) = \frac{9}{4}$.

3.3. Serii Taylor şi Mac-Laurin

Fie $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ satisfăcând următoarele două condiţii:

i. Funcţia *f* şi derivatele sale $f^{(k)}$, $k = 1,2,\ldots,n$ sunt continue pe intervalul $[a,b]$;

ii. Există $f^{(n+1)}$ pe intervalul (a,b).

In aceste condiţii există un punct $\xi \in (a,b)$ astfel ca

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + (b-a)^p \frac{(b-\xi)^{n-p+1}}{n!\,p} f^{(n+1)}(\xi),$$ unde p este un număr natural nenul arbitrar.

Notând $R_n = \dfrac{(b-a)^p (b-\xi)^{n-p+1}}{n!\,p} f^{(n+1)}(\xi)$, obţinem:

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n \quad (*)$$

Definiţia 3.9. Egalitatea precedentă se numeşte *formula lui Taylor* de ordinul *n în a*, iar R_n se numeşte *restul de ordinul n* al formulei lui Taylor.

Pentru $p = n+1$ şi pentru $p=1$ obţinem:

$$R_n = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \text{ , respectiv } R_n = \frac{(b-a)(b-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Definiţia 3.10. R_n obţinut pentru $p = n+1$ se numeşte *restul Lagrange de ordinul n* al formulei lui Taylor; iar R_n obţinut pentru $p=1$ se numeşte *restul Cauchy de ordinul n* al formulei lui Taylor.

Dacă în egalitatea (*) înlocuim pe b cu $x\in(a,b)$ obţinem *formula lui Taylor de ordinul n corespunzătoare funcţiei f în punctul a*, sau dezvoltarea funcţiei f cu formula lui Taylor în punctul a:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^n(a) + R_n(x).$$

Resturile Lagrange şi Cauchy devin:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \text{ , respectiv } R_n(x) = \frac{(x-a)(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \text{ , } \xi \in (a,x)$$

Pentru $a=0$ obţinem formula lui Mac-Laurin cu restul Lagrange:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),\ \xi \in (0,x),$$

sau cu restul Cauchy:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi),\ \xi \in (0,x).$$

Observaţia 3.6. Dacă în formula lui Taylor de ordinul n corespunzătoare funcţiei f în punctul a neglijăm restul $R_n(x)$ obţinem aproximarea funcţiei f printr-un polinom de grad n (polinomul lui Taylor de grad n): $f(x) \approx f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^n(a)$ cu eroarea cel mult: $\sup\limits_{x\in[a,b]} (R_n(x))$.

Definiţia 3.11. Fie $f: I \to \boldsymbol{R}$ o funcţie care admite derivate de orice ordin în punctul $a\in I$.

Seria de puteri $f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^n(a) + ...$ se numeşte *seria Taylor a funcţiei f în punctul a*.

Pentru $a = 0$ se obţine *seria Mac-Laurin a funcţiei f*: $f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^n(0) + ...$

Termenul general al şirului sumelor parţiale ale seriei Taylor corespunzătoare funcţiei f în punctul a, $s_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^n(a)$, $n\in\boldsymbol{N}$, coincide cu polinomul Taylor de grad n.

Din formula lui Taylor se observă că $f(x) = s_n(x) + R_n(x)$.

Propoziţia 3.3. Dacă $f: I\to \boldsymbol{R}$ este o funcţie care admite derivate de orice ordin în punctul $a\in I$, $R_n(x)$ este restul din formula Taylor a funcţiei f în a şi $X=\{x \in I \ / \ \lim_{n\to\infty} R_n(x)=0\}$ atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(x)$ este convergentă pe X şi are suma $f(x)$. Simbolic scriem $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(x)$, $x\in X$.

Definiţia 3.12. Egalitatea $f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^n(a)+\ldots$, $x\in X$, se numeşte *formula de dezvoltare în serie Taylor a funcţiei f în jurul punctului a*.

Teorema 3.4. Fie $f: I\to\boldsymbol{R}$ o funcţie care admite derivate de orice ordin într-o vecinătate V a punctului $a\in I$. Dacă derivatele $f^{(n)}$, $n\in\boldsymbol{N}$ sunt egal mărginite în V, adică există un număr $M>0$ astfel încît $\left|f^{(n)}(x)\right|<M$, $\forall\ n\in\boldsymbol{N}$, $x\in$V atunci seria Taylor a funcţiei f în punctul a este convergentă pe V către funcţia f, deci:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^n(a)+\ldots,\ \forall x\in V.$$

Observaţia 3.6. In condiţiile teoremei precedente pentru $a=0\in I$, obţinem:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^n(0)+\ldots,\ \forall x\in V,$$

deci seria Mac-Laurin este convergentă pe V către f.

Exemplu:

Fie funcţia $f: \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}, f(x)=e^x$. Această funcţie este admite derivate de orice ordin $f^{(n)}(x)=e^x$.

Acestea verifică relația: $\left|\ e^x\right|<e^k=M$, dacă $x\in(-k,k)$.

Astfel ele sunt egal mărginite într-o vecinătate $(-k,k)$ a lui zero.

Aplicând teorema precedentă putem afirma că pe intervalul $(-k,k)$ seria Mac-Laurin a funcţiei f este convergentă către f.

Cum $1=f(0)=f'(0)=f''(0)=f^n(0)=\ldots$ rezultă că avem:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \text{ sau prescurtat } e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Cum k este arbitrar ales în R, egalităţile precedente au loc $\forall x\in(-\infty,+\infty)$.

Observaţia 3.6. Obţinem de aici un rezultat remarcabil din analiza matematică:

$$e^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right).$$

Pentru diverse valori ale lui x găsim limitele unor şiruri importante. De exemplu găsim:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right), \text{ pentru } x=1;$$

$$e^2=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\ldots+\frac{2^n}{n!}\right), \text{ pentru } x=2;$$

$$\frac{1}{e}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}\right), \text{ pentru } x=-1, \text{ etc..}$$

3.4. Probleme rezolvate

1. Determinaţi raza de convergenţă şi mulţimea de convergenţă pentru fiecare din seriile:

$a)\ \sum_{n\geq 1}(-1)^n(2n+1)^2x^n,\ b)\ \sum_{n\geq 1}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n,\ c)\ \sum_{n\geq 1}\frac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(x+1)}$

$d)\ \sum_{n\geq 1}\frac{(x+3)^n}{n^2},\ e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}(x-1)^n.$

Soluţie:

$a)\quad a_n=(-1)^n(2n+1)^2$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(2(n+1)+1)^2}{(-1)^n(2n+1)^2}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+11n+3}{4n^2+4n+1}=1\Rightarrow R=\frac{1}{1}\Rightarrow$$

Seria este absolut convergentă pe $(-1,1)$.

Fie $x=-1\Rightarrow$ seria este $\sum_{n\geq 1}(-1)^n(2n+1)^2\cdot(-1)^n=\sum_{n\geq 1}(2n+1)^2.$

Deoarece limita termenului general este: $\lim_{n\to\infty}(2n+1)^2=\infty\neq 0\Rightarrow$ seria este divergentă.

Dacă $x=1\Rightarrow$ seria este $\sum_{\geq 1}(-1)^n(2n+1)^2\cdot 1^n=\sum_{n\geq 1}(-1)^n(2n+1)^2$.

Astfel $u_n=(-1)^n(2n+1)^2.$

$u_{2k}\underset{k\to\infty}{\to}\infty$ iar $u_{2k+1}\underset{k\to\infty}{\to}-\infty\Rightarrow$ şirul n-are limită. Rezultă că seria este divergentă în x=1.

Mulţimea de convergenţă a seriei de la punctul a) este $(-1,1)$.

$$b)\quad a_n=\frac{n}{(n+1)\cdot 2^n}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{(n+2)2^{n+1}}}{\frac{n}{(n+1)\cdot 2^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2n(n+2)}=\frac{1}{2}\Rightarrow R=2\Rightarrow$$

Seria este absolut convergentă pe $(-2,2)$.

Fie $x=-2\Rightarrow\sum_{n\geq 1}\frac{n}{n+1}\left(\frac{-2}{2}\right)^n=\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{n}{n+1}\Rightarrow u_n=(-1)^n\frac{n}{n+1}.$

Nu putem aplica Leibniz căci $\frac{n}{n+1}\underset{n\to\infty}{\to}1\neq 0$;

Dar $u_{2k}\underset{k\to\infty}{\to}1;\quad u_{2k+1}\underset{k\to\infty}{\to}-1\Rightarrow$ şirul $(u_n)_n$ n-are limita 0, rezultă seria este divergentă.

Fie $x=2\Rightarrow\sum_{n\geq 1}\frac{n}{n+1}\left(\frac{2}{2}\right)^n=\sum_{n\geq 1}\frac{n}{n+1}\Rightarrow u_n=\frac{n}{n+1}\underset{n\to\infty}{\to}1\neq 0\Rightarrow$ serie divergentă.

Deci mulţimea de convergenţă este $(-2,2)$.

$c)\quad\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}(x+1)$

Notăm $x+1=y\Rightarrow\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}y^n$

$$a_n = \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+2)\ln^2(n+2)}}{\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln^2(n+1)}{(n+2)\ln^2(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)}\right)^2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)}\right]^2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2} = -\frac{n+2}{\ln(n+2)} = 1\cdot 1 = 1 \Rightarrow R = 1 \Rightarrow$$

Seria în y este absolut convergentă pe $(-1,1) \Rightarrow y \in (-1,1) \Leftrightarrow (x+1) \in (-1,1) \Leftrightarrow x \in (-2,0)$.
Seria din enunţ este absolut convergentă pe $(-2,0)$.

$d)\ \sum_{n\geq 1}\frac{(x+3)^n}{n^2}$.

Notăm $x+3 = y \Rightarrow \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}y^n$.

$$a_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{y^2}{(n+1)^2} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1.$$

Seria în y este absolut convergentă pe $(-1,1) \Leftrightarrow x+3 \in (-1,1) \Leftrightarrow x \in (-1,-2)$.
Seria din enunţ este absolut convergentă pe $(-4,-2)$.

$e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}(x-1)^n$.

Notăm $x-1 = y \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot y^4$.

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2};\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{e} \Rightarrow$$

Seriaîn în y este absolut convergentă pe:
$\left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right) \Rightarrow y \in \left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right) \Leftrightarrow x-1 \in \left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right) \Leftrightarrow x \in \left(1-\frac{1}{e},1+\frac{1}{e}\right)$.

Seria din enunţ este absolut convergentă pe $\left(1-\frac{1}{e},1+\frac{1}{e}\right)$.

2. Să se dezvolte în serie Taylor în jurul lui x=2 funcţia $f:(0,\infty)\to R \quad f(x) = \ln x$.

Soluţie:
Funcţia dată este infinit derivabilă. Calculăm derivatele ei de diverse ordine.

$$f'(x)=\frac{1}{x}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}$$

$$f'''(x)=\frac{2}{x^3}$$

$$f^{(iv)}(x)=-\frac{6}{x^4}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\cdot\frac{(n-1)!}{x^n}$$

Demonstrăm prin inducţie matematică că $f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n}$

I. Etapa vereificării (a fost practic făcută) $n=1\Rightarrow f'(x)=(-1)^2\frac{0!}{x}=\frac{1}{x}\ (A)$

II. Presupunem $P(k)$ adevărată: $f^{(k)}(x)=(-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{x^k}$

şi demonstrăm că $P(k+1)$ este adevărată , $P(k+1)$: $f^{(k+1)}(x)=(-1)^{k+2}\frac{(k+1-1)!}{x^{k+1}}$.

$$f^{(k+1)}(x)=\left(f^{(k)}(x)\right)'=\left((-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{x^k}\right)'=(-1)^{k+1}\cdot(k-1)!\left(\frac{1}{x^k}\right)'=$$

$$=(-1)^{k+1}(k-1)!\left(x^{-k}\right)'=(-1)^{k+1}(k-1)!\cdot(-k)x^{-k-1}=(-1)^{k+2}k!\cdot\frac{1}{x^{k+1}}\Rightarrow$$

$\Rightarrow P(k)\rightarrow P(k+1)$,

deci $P(n)$ este adevărată $(\forall)\quad n\geq 1$ natural.

$$f(x)=f(2)+\frac{1}{1!}f'(2)(x-2)+\frac{1}{2!}f''(2)(x-2)^2+\frac{1}{3!}f'''(2)(x-2)^3+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(2)(x-2)^n+\cdots$$

$$\Rightarrow f(x)=\ln 2+\frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{2}(x-2)+\frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{-1}{2^2}\right)(x-2)^2+\frac{1}{3!}\frac{2}{2^3}(x-2)^3+\cdots+\frac{1}{n!}(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{2^n}\cdot(x-2)^n+\cdots$$

$$\ln x=\ln 2+\frac{x-2}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x-2}{2}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{x-2}{2}\right)^4+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n+\cdots$$

3. Să se dezvolte în serie Mac-Laurin funcţia $f:R\setminus\{1\}\rightarrow R$ $f(x)=\frac{1}{x-1}\Rightarrow f(x)=(x-1)^{-1}$

Soluţie: Calculăm mai întâi derivatele acestei funcţii.

$$f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$$

$$f'''(x)=-\frac{6}{(x-1)^4}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{(x-1)^{n+1}}$$

Demonstrăm prin inducţie matematică că formula intuită este corectă.

I. Etapa verificării $n=1 \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2} \quad (A)$

II. Etapa implicaţiei.

Presupunem $P(k)$ adevărată, $P(k)$: $\quad f^{(k)}(x)=(-1)^k \frac{k!}{(x-1)^{k+1}}$

Demonstrăm că $P(k+1)$ este adevărat, $P(k+1)$: $f^{(k+1)}(k)=(-1)^{k+1} \frac{(k+1)!}{(k-1)^{k+2}}$

$$f^{(k+1)}(x)=\left(f^{(k)}(x)\right)'=\left((-1)^k \frac{k!}{(k-1)^{k+1}}\right)'=(-1)^k \cdot k! \cdot \left((x-1)^{-(k+1)}\right)'=$$

$$=(-1)^k \cdot k! \cdot (-(k+1)) \cdot (x-1)^{-(k+1)-1}=(-1)^{k+1}(k+1)!(k-1)^{-(k+2)}=$$

$$=(-1)^{k+1} \frac{(k+1)!}{(k-1)^{k+2}} \Rightarrow P(k+1)$$

Deci este adevărată şi $P(k+1) \Rightarrow P(k) \to P(k+1) \Rightarrow P(n)$ adevărată $(\forall) n \geq 1$, număr natural. Aplicăm formula de dezvoltare în serie Mac-Laurin:

$$f(x)=f(0)+\frac{1}{1!}f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^4+\cdots$$

$$f(x)=\frac{1}{x-1}=-1+\frac{1}{1!}\cdot\left(-\frac{1}{1}\right)x+\frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{2}{-1}\right)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}(-1)^n \cdot \frac{n!}{(-1)^{n+1}}x^n+\cdots=$$

$$=-1-x-x^2-x^3-\cdots-x^n-\cdots=-\sum_{m\geq 1}x^n$$

Care este mulţimea de convergenţe pentru această serie?

$$a_n=1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=1 \Rightarrow R=\frac{1}{1} \Rightarrow (-1,1)$$

Dacă $x=1 \Rightarrow$ seria $\sum_{n\geq 0}1^n \Rightarrow$ divergentă.

Dacă x=-1 $\Rightarrow$ seria $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \Rightarrow$ divergentă $\Rightarrow$ Seria este convergentă pe $(-1,1)$.

4. Să se dezvolte în serie Taylor în jurul punctului x=2 funcţia $f(x)=e^{x+1}$

Soluţie:

Funcţia *f* este indefinit derivabilă pe tot domeniul de definiţie (R). Calculăm derivatele

$$f(x)=e^{x+1} \Rightarrow f'(2)=e^3$$

$$f''(x)=e^{x+1} \Rightarrow f''(2)=e^3$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=e^{x+1} \Rightarrow f^{(n)}(x)=e^3. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=f(2)+\frac{1}{1!}f'(2)(x-2)^1+\frac{1}{2!}f''(2)(x-2)^2+\frac{1}{3!}f'''(2)(x-2)^3+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(2)(x-2)^n+\cdots$$

$$e^{x+1}=e^3+\frac{1}{1!}e^3(x-2)+\frac{1}{2!}f^3(x-2)^2+\frac{1}{3!}e^3(x-2)^3+\cdots+\frac{1}{n!}e^3(x-2)^n+\cdots$$

$$e^{x+1}=e^3\left(1+\frac{1}{1!}(x-2)+\frac{1}{2!}(x-2)^2+\cdots+\frac{1}{x!}(x-2)^n+\cdots\right)$$

Calculăm raza de convergenţă pentru seria $\sum_{n\geq 0}\frac{e^3}{n!}(x-2)^n$

Facem substituţia $x-2=y \Rightarrow \sum_{n\geq 0} \frac{e^3}{n!} y^3$.

$$a_n = \frac{e^3}{n!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{e^3 n!}{e^3(n+1)!} = 0 \Rightarrow R = \infty.$$

Seria în y este convergentă pe $(-\infty,+\infty)$. Astfel seria în x este convergentă $\Leftrightarrow x-2 \in (-\infty,\infty) \Leftrightarrow x \in (-\infty,\infty)$.

5. Dezvoltaţi în serie Taylor în jurul lui x=4 funcţia $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$; $f: R\setminus\{1,2\} \to R$.

Soluţie: Pentru a calcula derivatele lui f o vom descompunem în fracţii simple.

$$f(x)=\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2} \Rightarrow A(x-2)+B(x-1)=1 \Rightarrow$$

$$A+B=0$$

$$-2A-B=1$$

$$\left.-A=1 \Rightarrow A=-1, B=1 \quad\right\} \Rightarrow \frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}.$$

Într-un exerciţiu precedent am demonstrat că $\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{(x-1)^{n+1}}$

Analog $\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{(x-2)^{n+1}}$, deci obţinem:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x-2}\right)'-\left(\frac{1}{x-1}\right)'=-\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{(x-2)^{n+1}}-(-1)^n\cdot\frac{n!}{(x-1)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow f(x)=f(4)+\frac{1}{1!}f'(4)(x-4)+\frac{1}{2!}f''(4)(x-4)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(4)(x-4)^n+\cdots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{1!}\left[-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right](x-4)+\frac{1}{2!}\left[\frac{2!}{2^3}-\frac{2!}{3^3}\right](x-4)^2+\cdots+$$

$$+\frac{1}{n!}\left[(-1)^n\cdot\frac{n!}{2^{n+1}}-(-1)^n\cdot\frac{n!}{3^{n+1}}\right](x-4)^n+\cdots=\frac{1}{6}+\left[-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right](x-4)+\left(\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}\right)(x-4)^2+\cdots+$$

$$+\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}+\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}\right)(x-4)^n+\cdots=\frac{1}{2}\sum(-1)^n\left(\frac{x-4}{2}\right)^n+\frac{1}{3}\sum(-1)^{n+1}\left(\frac{x-4}{3}\right)^n$$

$$\left|\frac{x-4}{2}\right|<1 \Leftrightarrow \quad -1<\frac{x-4}{2}<1 \Leftrightarrow -2<x-4<2 \qquad\qquad 2<x<6$$

$$\left|\frac{x-4}{3}\right|<1 \Leftrightarrow -1<\frac{x-4}{3}<1 \Leftrightarrow -3<x-4<3 \;\Rightarrow\; 1<x<7$$

Astfel dezvoltarea este valabilă pentru $x\in(2,6)$.

4. SPAŢIUL R^n. ŞIRURI ÎN R^n

4.1. Spaţiul n-dimensional R^n

Definiţia 4.1. Mulţimea R^n este mulţimea formată din toate *sistemele ordonate de n numere reale* $(x_1, x_2, ..., x_n)$. $R^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) / x_i \in R, i = \overline{1,n}\}$ sau $R^n = \underbrace{R \times R \times ... \times R}_{n\ ori}$.

Definim pe R^n *operaţia de adunare* astfel: dacă $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ şi $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ sunt două elemente arbitrare din R^n, atunci suma lor este $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$.

Se observă că adunarea este o operaţie internă pe R^n ce are următoarele proprietăţi:

1. $x + y = y + x, (\forall) x, y \in R^n$ (comutativitate)
2. $(x + y) + z = x + (y + z) (\forall) x, y, z \in R^n$ (asociativitate)
3. $\exists 0 = (0,0,...,0) \in R^n$ astfel încât $x + 0 = 0 + x\ (\forall) x \in R^n$ (există element neutru)
4. $(\forall) x \in R^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \exists\ -x = (-x_1, -x_2, ..., -x_n) \in R^n$ a.î. $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

Astfel $(R^n, +)$ este *grup comutativ*.

Considerăm corpul numerelor reale R şi mulţimea R^n şi definim o operaţia algebrică externă, numită *înmulţirea cu scalari* (numere reale) a elementelor din R^n, astfel: $(\forall) \lambda \in R$ şi $(\forall) x = (x_1, x_2, .., x_n) \in R^n$, atunci $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) \in R^n$.

Sunt adevărate proprietăţile:

1. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, (\forall) x, y \in R^n, (\forall) \lambda \in R$
2. $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x, (\forall) x \in R^n, (\forall) \lambda, \mu \in R$
3. $\lambda(\mu x) = (\lambda \mu) x, (\forall) x \in R^n, (\forall) \lambda, \mu \in R$
4. $1x = x, (\forall) x \in R^n$.

Astfel R^n este un *spaţiu vectorial* faţă de cele două operaţii. Elementele sale se mai numesc *vectori.*

Definiţia 4.2. Fie $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ şi $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ doi vectori din R^n se numeşte *produsul scalar* al vectorilor x şi y numărul real,notat $\langle x, y \rangle$, dat de $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$.

Propoziția 4.1. Produsul scalar definit anterior satisface relațiile:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0, (\forall) x \in R^n, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, (\forall) x, y \in R^n$
3. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle, (\forall) x, y, z \in R^n$
4. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle, (\forall) x, y \in R^n, (\forall) \lambda \in R$.

Observaţia 4.1. R^n înzestrat cu produsul scalar definit anterior este un spaţiu euclidian.

Definiţia 4.3. Fie $x \in R^n$,definim $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$. Acest număr real poartă numele de *norma* lui x .

Propoziţia 4.2. Norma definită anterior are proprietăţile următoare:

1. $\|x\| \geq 0, (\forall) x \in R^n , \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, (\forall) \lambda \in R, (\forall) x \in R^n$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, (\forall) x, y \in R^n$.

Observaţia 4.2. Deoarece orice spaţiu vectorial pe care s-a definit o normă poartă numele de spaţiu vectorial normat, deducem că R^n este un spaţiu vectorial normat. Norma definită anterior nu este singura normă ce se poate defini pe R^n. Astfel, $\|x\|_\infty = \max_{i=\overline{1,n}}(|x_i|)$, respectiv $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, sunt alte norme pe R^n; ele verifică relațiile din propoziția anterioară.

Definiţia 4.4. Aplicaţia $d : R^n \times R^n \to R_+$, $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$, se numeşte *distanţă (metrică)* pe R^n . Ea mai poartă denumirea de distanță euclidiană.

Propoziţia 4.3. Distanța definită anterior are proprietăţile următoare:

1. $d(x, y) \geq 0, (\forall) x, y \in R^n , d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x), (\forall) x, y \in R^n$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), (\forall) x, y, z \in R^n$

Pentru $n = 1, n = 2, n = 3$ regăsim formulele de calcul pentru distanţa dintre două puncte de pe o dreaptă $(d(x, y) = |x - y|)$, dintr-un plan sau din spaţiu $\left(d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{2 sau 3} (x_i - y_i)^2} \right)$.

Observaţia 4.3. R^n înzestrat cu distanţa anterioară este un spaţiu metric.

Observaţia 4.4. Se pot defini şi alte distanţe pe R^n (fiecare normă poate introduce o distanţă).

Astfel aplicaţia $d_\infty : R^n \times R^n \to R_+$, $d_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty = \max_{i=\overline{1n}}(|x_i - y_i|)$, este tot o *distanţă* pe R^n şi se numeşte distanţa Cebîșev (denumită și distanța pe tabla de sah, aceasta reprezentând numărul minim de mutări pe care trebuie să le execute regele pentru a se deplasa de la o pozițite la alta pe o tablă de șah).

Aplicaţia $d_1 : R^n \times R^n \to R_+$, $d_1(x, y) = \|x - y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$, este și ea o *distanță* pe R^n și se numeşte distanța Manhattan (denumită și distanța taxiului, căci în cazul n=2 ea reprezintă distanța parcursă de un taxi pentru a se deplasa între două locații din cartierul Manhattan, în care străzile sunt perpendiculare între ele).

Exemple:

1. Fie $x=(1;3;-6;0)$ și $y=(-2;0;10;4)$ două elemente din R^4. Să se determine normele lor precum și $\|x+y\|$ și să se verifice că are loc inegalitatea $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$. Să se afle apoi distanța euclidiană dintre acestea.

Soluție:

$\|x\|=\sqrt{1+9+36}=\sqrt{46}$, $\|y\|=\sqrt{4+100+16}=\sqrt{120}$,

$x+y=(-1;3;4;4)$, deci $\|x+y\|=\sqrt{1+9+16+16}=\sqrt{42}$

În mod evident are loc inegalitatea: $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$ ($\sqrt{42}\le\sqrt{46}+\sqrt{120}$)

$d(x,y)=\sqrt{9+9+256+16}=\sqrt{290}$.

2. Fie $x=(1;3;a)$ și $y=(1-a;2;-4)$ două elemente din R^3. Să se determine $a\in R$ astfel încât distanța dintre acestea să fie minimă și cât este această distanță.

$d(x,y)=\sqrt{a^2+1+(a+4)^2}=\sqrt{2a^2+8a+17}$.

Distanța este minimă dacă expresia de sub radical este minimă, deci avem de determinat minimul unei funcțiide gradul 2.

$\min(2a^2+8a+17)=\frac{-\Delta}{8}=\frac{72}{8}=9$; $\min d(x,y)=3$; ea se obține când $a=-\frac{8}{4}=-2$.

Definiția 4.5. Fie $I_1,I_2,...,I_n$ *n* intervale pe dreapta reală. Se numeşte *interval n-dimensional* produsul cartrezian $I=I_1\times I_2\times...\times I_n=\{(x_1,x_2,...,x_n)/\,x_i\in I_i\ (\forall)i\in\{1,..,n\}\}$.

Observația 4.5.

- Dacă toate intervalele $I_1,I_2,...,I_n$ sunt închise (deschise), I se numeşte *interval închis* (deschis).
- Dacă toate intervalele $I_1,I_2,...,I_n$ sunt mărginite, I se numeşte *interval mărginit*.
- Dacă cel puţin unul dintre intervalele $I_1,I_2,...,I_n$ este nemărginit, I se numeşte *interval nemărginit*.

În cele ce urmează prin interval n-dimensional vom înţelege un interval n-dimensional deschis şi mărginit, afară de cazul când se va specifica în mod expres altceva.

Exemple:

Considerăm cazul plan (n=2) și cel al spațiului tridimensional (n=3).

Intervalul $I=[-2,1]\times[0,4]$ este un interval închis şi mărginit; intervalul $I=(-1,9)\times(1,4)$ este un interval deschis şi mărginit; intervalul $[2,+\infty)\times(0,4)$ este un interval nemărginit.

Intervalul $I=[2,10]\times[0,8]\times[-10,2]$ este un interval închis şi mărginit; intervalul $I=(1,9)\times(-3,4)\times(-2,2)$ este un interval deschis şi mărginit; intervalul $[5,10)\times(0,+\infty)\times[-5,5]$ este un interval nemărginit.

Definiţia 4.6. Se numeşte *vecinătate* a unui punct $a \in R^n$, orice mulţime care conţine un interval n-dimensional ce conţine *a*. O vecinătate a lui *a* se notează cu *V*.

Exemple:

$V = [-2,4] \times [2,5]$ reprezintă o vecinătate a lui $a = (0,3) \in R^2$, deoarece $a \in (-1,1) \times (2,4) \subseteq V$.

$V = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \times \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$, reprezintă vecinătăți ale lui $(0,0) \in R^2$.

$V = \left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right) \times \left(2 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$, reprezintă vecinătăți ale lui $(1,2) \in R^2$.

Definiţia 4.7. Spunem că punctul $a \in R^n$ este *punct interior* mulţimii $A \subset R^n$, dacă există o vecinătate *V* a lui *a* inclusă în *A*, adică dacă este ea însăşi o vecinătate a lui *a*. Mulţimea punctelor interioare ale unei mulţimi *A* formează interiorul mulţimii *A* şi se notează cu $\overset{0}{A}$. Evident $\overset{0}{A} \subset A$.

Definiţia 4.8. Se numeşte *mulţime deschisă* o mulţime formată doar din puncte interioare.

Dacă $A \subset \overset{0}{A}$, atunci $\overset{0}{A} = A$, deci *A* este o mulţime deschisă.

Exemple:

Dacă $V = [-2,4] \times [2,5]$, atunci $\overset{0}{V} = (-2,4) \times (-2,4)$.

$V = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \times \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$, atunci $\overset{0}{V} = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \times \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = V$, adică *V* este o mulțime deschisă

$V = [2,7] \times [-1,3)$, atunci , $\overset{0}{V} = (-2,7) \times (-1,3) \neq V$, deci *V* nu reprezintă o mulțime deschisă.

Definiţia 4.9. Spunem că punctul $a \in R^n$ este *exterior* mulţimii *A* dacă este interior complementarei lui *A*, adică dacă există o vecinătate *V* a lui *a* astfel încât $a \in V \subset CA$.

Definiţia 4.10. Spunem că punctul $a \in R^n$ este *punct aderent* mulţimii *A* dacă orice vecinătate V a lui *a* conţine cel puţin un punct din *A*, adică $V \cap A \neq \varnothing$. Mulţimea punctelor aderente lui *A* se notează cu $\overline{A}$ şi se numeşte închiderea lui *A*. Evident $A \subset \overline{A}$.

Definiţia 4.11. Spunem că mulţimea *A* este *închisă* dacă îşi conţine toate punctele aderente, adică dacă $\overline{A} \subset A \left(\overline{A} = A\right)$.

Exemple:

Dacă $V = [-3,5] \times [1,6]$, atunci $\overline{V} = [-3,5] \times [1,6] = V$, deci *V* este o mulțime închisă.

$V=\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\times\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$, $n\geq 1$, atunci $\overline{V}=\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]\times\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]\neq V$, adică V nu este o mulțime închisă

$V=[2,7]\times[-1,3)$, atunci , $\overline{V}=[-2,7]\times[-1,3]\neq V$, deci V nu este o mulțime închisă.

Definiţia 4.12. Spunem că punctul $a\in R^n$ este *punct fronieră* al mulţimii A dacă orice vecinătate a sa conţine şi puncte din A şi puncte din complementara lui A (este aderent şi lui A şi complementarei lui A). Mulţimea punctelor frontieră ale mulţimii A se notează cu ∂A sau $Fr(A)$şi se numeşte *frontiera mulţimii A*.

Definiţia 4.13. Spunem că punctul $a\in R^n$ este *punct de acumulare* al mulţimii A dacă orice vecinătate V a lui a conţine cel puţin un punct al mulţimii A, diferit de a.

Definiţia 4.14. Spunem că punctul $a\in R^n$ este *punct izolat* al mulţimii A dacă există o vecinătate V a lui a astfel încât $V\cap A=\{a\}$.

Definiţia 4.15. Mulţimea A este *mărginită* dacă există un număr real, pozitiv, r, astfel încât $\|x\|\leq r,\forall x\in A$.

Definiţia 4.16. O mulţime închisă şi mărginită din R^n se numeşte *mulţime compactă.*

Exemple:

Fie $A=\{(x,y)\in R^2 / x^2+y^2\leq 9,\ y\in(0,\infty)\}\cup\{(8,8)\}$.

Punctul $B(1,\sqrt{2})$, $B'(-1,\sqrt{5})$ sunt puncte interioare şi de acumulare pentru A. $C(-3,0)$ este punct de acumulare pentru A ce nu aparţine lui A, şi este şi punct frontieră. $D(\sqrt{4},\sqrt{5})$ este punct frontieră şi punct de acumulare pentru A. $E(8,8)$ este un punct izolat al mulţimii A. $F(1,1)$ este punct interior lui A.

4.2.Şiruri de puncte în R^n

Definiţia 4.17. O funcţie $f:N\to R^n$ definită pe mulţimea N a numerelor naturale cu valori în R^n, se numeşte şir de puncte din spaţiul R^n. Notaţia folosită ese cea obişnuită $(x_k)_{k\in N}$, sau mai simplu (x_k).

Definiţia 4.18. Un punct $a\in R^n$ este *limita* unui şir (x_k) de puncte din R^n, dacă în afara oricărei vecinătăţi a lui a se află cel mult un număr finit de termeni ai şirului.

Notaţii folosite pentru a desemna un şir : $x_k\xrightarrow[k\to\infty]{}a$, $x_k\to a$, sau $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=a$.

Definiția rămâne valabilă și dacă $a\in\overline{R}^n$

Observaţia 3.6. Un punct $a\in R^n$ este *limita* unui şir (x_k) de puncte din R^n, dacă $(\forall)\varepsilon$ ›0, există un rang ce depinde de ε , $N(\varepsilon)$, astfel încât $(\forall)k\geq N(\varepsilon)$ să avem$\|x_k-a\|<\varepsilon$.

Observația 4.7. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\|x_k - a\| = 0$.

Definiția 4.19. Șirurile care au limită în R^n se numesc *șiruri convergente*.

Toate proprietățile șirurilor convergente de numere, în care nu intervine relația de ordine, se păstrează și pentru șirurile convergente de puncte din R^n.

Propoziția 4.4. Șirurile convergente din R^n au următoarele propietăți:

1. Limita unui șir convergent este unică.
2. Dacă (α_k) este un șir de numere convergent la zero și $\|x_k - a\| \le \alpha_k$, atunci $x_k \to a$.
3. Dacă $x_k \to a$, atunci $\|x_k\| \to \|a\|$
4. Orice șir convergent din R^n este mărginit, adică există un număr M astfel ca $\|x_k\| \le M, (\forall) k \in N$ (a spune că un șir de puncte din R^n este mărginit , revine la a spune că șirul format cu normele termenilor este mărginit.

Observația 4.8. Dacă $\|x_k\| \to \|a\|$, nu rezultă că șirul (x_k) este convergent. Dacă însă $\|x_k\| \to 0 \Rightarrow x_k \to 0$.

Propoziția 4.5. (Operații cu șiruri convergente din R^n).

Dacă $x_k \to a$ și $y_k \to b$, atunci:

$x_k + y_k \to a + b$;

$x_k y_k \to ab$;

dacă $y_k \ne 0, b \ne 0 \Rightarrow \dfrac{x_k}{y_k} \to \dfrac{a}{b}$;

dacă $\alpha_k \to \alpha, \quad \alpha, \alpha_k \in R \Rightarrow \alpha_k x_k \to \alpha a$.

Definiția 4.20. Un șir (x_k) de puncte din R^n este un *șir fundamental(sau șir Cauchy)* dacă oricare ar fi ε ›0, există un rang ce depinde de ε, notat $N(\varepsilon)$, astfel încât oricare ar fi $m, p \ge N(\varepsilon)$ să avem $\left\|a_m - a_p\right\|$ ‹ ε.

Propoziția 4.6. Un șir (x_k) de puncte din R^n are limita $a \in R^n$, dacă și numai dacă, pentru fiecare $i = 1,2,...,n$, șirul coordonatelor $(x_{ik})_{k\in N}$ are limita $pr_i a$.

Propoziția rămâne valabilă și în cazul în care $a \in \overline{R}^n$

Observația 4.9._$\lim\limits_{k\leftarrow\infty} x_k = a$, dacă și numai dacă,$(\forall)\varepsilon$›0, există un rang ce depinde de ε, notat $N(\varepsilon)$, astfel încât $(\forall) k \ge N(\varepsilon)$ să avem$|x_{ik} - a_i|$ ‹ ε, oricare ar fi $i = 1,2,..,n$.

Criteriul lui Cauchy Un șir de puncte din R^n este convergent dacă și numai dacă este șir fundamental.

Propoziția 4.7. Un șir (x_k) de puncte din R^n este convergent către $a \in R^n$, dacă și numai dacă, pentru fiecare $i = 1,2,...,n$, șirul coordonatelor $(x_{ik})_{k\in N}$ este convergent către $pr_i a$.

Proprietăţi importante

1. Orice subşir al unui şir convergent este convergent şi are aceeaşi limită.
2. Schimbând ordinea termenilor unui şir convergent se obţine tot un şir convergent, care are aceeaşi limită.
3. Adăugând sau eliminând un număr finit de termeni la un şir convergent se obţine tot un şir convergent, cu aceeaşi limită.
4. Orice şir mărginit de puncte din R^n conţine un subşir convergent (lema lui Cesaro).

Definiţia 4.21. Un spaţiu metric în care fiecare şir fundamental este convergent se numeşte spaţiu complet.

Definiţia 4.22. Un spaţiu normat complet se numeşte spaţiu Banach.

Observaţia 4.10. Spaţiul normat R^n este complet, deci este un spaţiu Banach.

Definiţia 4.23. Un spaţiu Banach în care norma se poate deduce dintr-un produs scalar se numeşte spaţiu Hilbert.

Observaţia 4.11. Spaţiul R^n, cu norma uzuală este un spaţiu Hilbert. R^n este de asemenea spaţiu Banach şi pentru normele $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, $\|x\|_\infty = \sup_{1\le i\le n} |x_i|$. Aceste norme nu se pot deduce dintr-un produs scalar. Deci în raport cu acestea R^n nu este spaţiu Hilbert.

Exemple:

1. Să se studieze convergența următoarelor șiruri din R^2, date prin expresiile termenilor generali.

$x_n = \left(\frac{2n+3}{n-1}, \frac{n^2-5n+6}{2n^2+1} \right), n \geq 2$;

$y_n = \left(\frac{2n+3}{n^2-1}, \frac{n^2-5n+6}{(3n+1)(2n+3)} \right), n \geq 2$;

$z_n = \left(\frac{2n^3+1}{5n-1}, \frac{n}{2n^2+1} \right), n \geq 1$.

Cum $pr_1 x_n = \frac{2n+3}{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$, iar $pr_2 x_n = \frac{n^2-5n+6}{2n^2+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$, atunci $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(2, \frac{1}{2}\right)$, deci $(x_n)_{n\geq 2}$ este un șir convergent în R^2.

Cum $pr_1 y_n = \frac{2n+3}{n^2-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, iar $pr_2 y_n = \frac{n^2-5n+6}{(3n+1)(2n+3)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{6}$, atunci $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(0, \frac{1}{6}\right)$, deci $(y_n)_{n\geq 2}$ este un șir convergent în R^2.

Cum $pr_1 z_n = \frac{2n^3+1}{5n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, iar $pr_2 z_n = \frac{n}{2n^2+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, atunci $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} (\infty, 0)$, deci $(z_n)_{n\geq 2}$ nu este un șir convergent în R^2.

2. Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n\geq 1}$ din R^3, cu termenul general:

$$x_n = \left(\left(\frac{2n+3}{2n-1} \right)^{n+5}, \frac{n^2}{(2n+1)(n+3)}, \frac{2+3^n}{2^n - 5\cdot 3^n} \right), n \geq 1.$$

Analog ca în cazul precedent studiem convergența șirurilor de numere reale $(pr_i x_n)_{n\geq 1}$, $i = \overline{1,3}$.

$$\lim_{n\to\infty} pr_1 x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+3}{2n-1} \right)^{n+5} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2n+3}{2n-1} - 1 \right)^{n+5} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{4}{2n-1} \right)^{n+5} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{4}{2n-1} \right)^{\frac{2n-1}{4}\cdot\frac{4}{2n-1}\cdot(n+5)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4(n+5)}{2n-1}} = e^2 .$$

$$pr_2 x_n = \frac{n^2}{(2n+1)(n+3)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}, \ \lim_{n\to\infty} pr_3 x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2+3^n}{2^n - 5\cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \left(\frac{2}{3^n} + 1 \right)}{3^n \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n - 5 \right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\frac{1}{5} .$$

Astfel $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(e^2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{5} \right)$, deci este un șir convergent din R^3.

5. FUNCŢII DE MAI MULTE VARIABILE

5.1.Funcţii vectoriale şi reale

Definiţia 5.1. Fie A o mulţime din R^n. O funcţie $f : A \to R^m$ se numeşte funcţie vectorială de o variabilă vectorială.

Argumentul funcţiei f este un vector din R^n, iar valorile funcţiei sunt, de asemenea, vectori.

Deoarece o variabilă vectorială $x \in R^n$ este echivalentă cu n variabile reale $x_1, x_2, ..., x_n$ (care sunt componentele lui x, sau coordonatele lui x în raport cu baza canonică a lui R^n), se mai spune că f este o funcţie vectorială de n variabile reale.

Valorile funcţiei se notează cu $f(x)$ sau $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

În cazul în care $m = 1$ se spune că f este o funcţie reală de o variabilă vectorială, sau de n variabile reale. Funcţiile reale de o variabilă vectorială se mai numesc funcţii scalare pe A, sau câmpuri scalare pe A.

Graficul unei funcţii reale de n variabile reale, $f : A \to R^m$, este format din toate punctele din spaţiul R^{n+1} de forma $(x_1, x_2, ..., x_n, f(x_1, x_2, ..., x_n))$ cu $(x_1, x_2, ..., x_n) \in A$.

Fiind dată o funcţie vectorială $f : A \to R^m$, putem obţine m funcţii reale definite pe A, prin compunerea lui f cu funcţiile proiecţie: $f_1 = pr_1 \circ f$, $f_2 = pr_2 \circ f$,...., $f_m = pr_m \circ f$. Pentru orice $x \in A$ notăm $f_1(x) = pr_1(f(x))$, $f_2(x) = pr_2(f(x))$,..., $f_m(x) = pr_m(f(x))$. Deci $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x))$, sau mai simplu scris $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$.

Funcţiile $f_1, f_2, ..., f_m$, sunt funcţii reale şi poartă numele de componentele reale ale funcţiei vectoriale *f*. Reciproc m funcţii reale definite pe aceeaşi mulţime A pot fi considerate totdeauna ca fiind componentele reale ale unei funcţii vectoriale.

Ţinând seama de consideraţiile precedente putem reduce totdeauna studiul unei funcţii vectoriale la studiul mai multor funcţii reale.

Vom studia în continuare funcţiile reale de mai multe variabile reale şi vom considera pentru început cazul $n = 2$, adică funcţiile reale de două variabile reale, urmând ca pe parcurs să generalizăm noţiunile pe care le vom studia, extinzându-le la cazul a n variabile reale.

5.2. Funcţii reale de două variabile. Limită şi continuitate

Definiţia 5.2. Fie $f : A \subseteq R^2 \to R$ o funcţie de două variabile şi $x_0 = (a, b)$ punct de acumulare pentru A. Spunem că $l \in R$ *este limita funcţiei f în punctul* (a, b) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât oricare ar fi $(x, y) \neq (a, b)$ cu proprietatea $\|(x, y) - (a, b)\| < \delta(\varepsilon)$, $(x, y) \in A$, să avem $|f(x, y) - l| < \varepsilon$.

Echivalent spunem că $l \in R$ este limita funcţiei f în punctul (a, b) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât oricare ar fi $(x, y) \neq (a, b)$ cu proprietatea $|x - a| < \delta(\varepsilon)$ şi $|y - b| < \delta(\varepsilon)$, $(x, y) \in A$, să avem $|f(x, y) - l| < \varepsilon$.

O altă formulare echivalentă se poate da cu ajutorul şirurilor convergente: spunem că $l \in R$ este limita funcţiei *f* în punctul (a,b) dacă pentru orice şir de puncte din A, $\{(x_n, y_n)\}_{n\in N}$, convergent către (a,b), cu $(x_n, y_n) \neq (a,b)$, şirul valorilor funcţiei converge către l.

Observăm că șirul valorilor funcției este un șir de numere reale, deci este vorba de convergența în *R* a acestuia.

Notaţiile folosite pentru limita unei funcţii sunt : $l = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ sau $l = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)$.

Definiţia 5.3. Fie $f : A \subseteq R^2 \to R$ o funcţie de două variabile şi $x_0 = (a,b) \in A$. Spunem că funcţia *f este continuă în* (a,b) dacă $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)$ există şi este egală cu valoarea funcţiei în punctul (a,b), adică $f(a,b) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)$.

Folosind definiţiile echivalente date limitei unei funcţii de două variabile într-un punct, putem obţinem dfiniții echivalente pentru continuitate.

Spunem că funcţia *f* este continuă în (a,b) dacă pentru orice ε >0, există $\delta(\varepsilon)$>0 astfel încât oricare ar fi $(x,y) \neq (a,b)$ cu proprietatea $|x-a| < \delta(\varepsilon)$ şi $|y-b| < \delta(\varepsilon)$, $(x,y) \in A$, să avem $|f(x,y) - f(a,b)| < \varepsilon$.

Spunem că funcţia *f* este continuă în (a,b) dacă pentru orice ε >0, există $\delta(\varepsilon)$>0 astfel încât oricare ar fi $(x,y) \neq (a,b)$ cu proprietatea $\|(x,y)-(a,b)\| < \delta(\varepsilon)$, $(x,y) \in A$, să avem $|f(x,y) - f(a,b)| < \varepsilon$.

Spunem că funcţia *f* este continuă în (a,b) dacă pentru orice şir de puncte din A, $\{(x_n, y_n)\}_{n\in N}$, convergent către (a,b), cu $(x_n, y_n) \neq (a,b)$, şirul valorilor funcţiei converge către $f(a,b)$, adică $f(x_n, y_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(a,b)$.

Exemple:

1. Să se studieze continuitatea funcţiei $f : R^2 \to R$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3xy}{\sqrt{4x^2+5y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ \dfrac{3}{2}, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Evident, funcţia este continuă în toate punctele lui R^2 mai puţin în $(0,0)$ deoarece pentru

$(x_n, y_n) \underset{n\to\infty}{\to} (a,b)$, $(a,b) \neq (0,0)$ avem $f(x_n, y_n) = \dfrac{3x_n y_n}{\sqrt{4x_n^2 + 5y_n^2}} \underset{n\to\infty}{\to} \dfrac{3ab}{\sqrt{4a^2+5b^2}} = f(a,b)$.

Studiem continuitatea lui *f* în $(0,0)$.

Fie $(x_n, y_n) \underset{n\to\infty}{\to} (0,0)$, $(x_n, y_n) \neq (0,0)$.

Avem: $0 \le \left| \dfrac{3x_n y_n}{\sqrt{4x_n^2+5y_n^2}} \right| \le \dfrac{3|x_n||y_n|}{\sqrt{4x_n^2}} = \dfrac{3}{2}|y_n|$

Prin trecere la limită în această dublă inegalitate obţinem:

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \left| f(x_n, y_n) \right| \le \lim_{n\to\infty} |y_n| = 0 .$$

Utilizând criteriul cleştelui deducem că $\lim_{n\to\infty} \left| f(x_n, y_n) \right| = 0$, şi deci şi $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = 0$.

Astfel funcţia are limită în punctul $(0,0)$ dar nu este continuă în acest punct deoarece

$$f(0,0) = \frac{3}{2} \ne \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y).$$

2. Să se studieze continuitatea funcţiei $f : R^2 \to R$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{2x^2+2y^2}, & (x,y) \ne (0,0) \\ \dfrac{1}{2} & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Analog ca în exemplul precedent, funcţia *f* este continuă pe $R^2 - \{(0,0)\}$.

Calculăm limita în punctul $(0,0)$.

Fie $(x_n, y_n) \underset{n\to\infty}{\to} (0,0)$ şi $(x_n, y_n) \ne (0,0)$.

Avem $f(x_n, y_n) = \dfrac{\sin(x_n^2 + y_n^2)}{2(x_n^2 + y_n^2)}$.

Observăm că $x_n^2 + y_n^2 = z_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Astfel avem: $\dfrac{\sin z_n}{z_n} \underset{n\to\infty}{\to} 1$ şi deci $f(x_n, y_n) \underset{n\to\infty}{\to} \dfrac{1}{2}$.

Astfel $f(0,0) = \dfrac{1}{2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$, adică *f* este continuă şi în punctul $(0,0)$, deci e continuă pe R^2.

Definiţia 5.4. Fie $f : A \subseteq R^2 \to R$ o funcţie de două variabile şi $x_0 = (a,b) \in A$. Spunem că funcţia *f este continuă (parţial) în raport cu x în punctul* (a,b)*,* dacă funcţia f_x, $f_x : \{x \in R / (x,b) \in A\} \subseteq R \to R$, dată de $f_x(x) = f(x,b)$ este continuă în punctul a.

Analog, spunem că funcţia *f este continuă (parţial) în raport cu y în punctul* (a,b)*,* dacă funcţia f_y, $f_y : \{y \in R / (a,y) \in A\} \to R$, dată de $f_y(y) = f(a,y)$ este continuă în punctul *a*.

Teorema 5.1. O funcţie continuă în punctul (a,b) este continuă (parţial) în raport cu fiecare variabilă.

Observaţia 5.1. Reciproca acestei teoreme nu este în general adevărată, adică există funcţii continue într-un punct în raport cu fiecare variabilă, fără a fi continue în acel punct.

Exemple: Fie funcţia $f : R^2 \to R$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^3}{x^4+4y^4}, & (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Să se arate că este continuă parţial în raport cu fiecare variabilă în toate punctele lui R^2, (deci şi în $(0,0)$) dar nu este continuă în $(0,0)$.

Evident *f* este continuă pe $R^2 - \{(0,0)\}$, deci conform teoremei precedente este continuă parţial în toate punctele lui $R^2 - \{(0,0)\}$.

Vom arăta că *f* este continuă şi în raport cu variabila x, şi în raport cu y în origine.

Avem $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x\cdot 0}{x^4 + 4\cdot 0^4} = 0 = f(0,0)$ şi $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\cdot 0\cdot y^3}{0^4 + 4\cdot y^4} = 0 = f(0,0)$, ceea ce justifică afirmaţia precedentă.

Studiem continuitatea lui *f* în $(0,0)$.

Pentru $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ şi $y_n = mx_n$ avem:

$$f(x_n, y_n) = \frac{2x_n y_n^3}{x_n^4 + 4y_n^4} = \frac{2m}{1+4m^4}.$$

Astfel $f(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2m}{1+4m^4}$ expresie ce depinde de *m*.

Deci *f* nu are limită în punctul $(0,0)$(vezi exemplul anterior), deci nu e continuă în $(0,0)$.

5.3. Derivate parţiale. Diferenţiabilitate

Definiţia 5.5. Fie $f : A \subseteq R^2 \to R$ o funcţie de două variabile şi $x_0 = (a,b)$ un punct interior mulţimii *A*. Spunem că *f este derivabilă parţial în raport cu x în punctul* (a,b), dacă $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a}$ există şi este finită.

Această limită, dacă există, se notează cu $f'_x(a,b)$ sau cu $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ şi poartă numele de *derivata paţială de ordinul întâi în raport cu x a funcţiei f în punctul* (a,b).

Analog avem: $f'_y(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim\limits_{y\to b} \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y-b}$, dacă există şi este finită limita din ultimul termen al egalităţii. Ea poartă numele de *derivata parţială de ordinul întâi în raport cu y a funcţiei f în punctul* (a,b).

Dacă *f* este deriabilă parţial în raport cu variabila *x* (sau *y*) în fiecare punct al lui *A*, spunem că este derivabilă parţial în raport cu *x* (sau *y*) pe *A*.

Observaţia 5.2. Când calculăm derivata parţială în raport cu o variabilă, celelalte variabile ce apar sunt considerate constante şi derivăm ca şi cum am avea o singură variabilă, folosind regulile de derivare de la funcţiile reale de o singură variabilă reală.

Exemple:

Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiilor

a) $f : R^2 \to R$, $f(x,y) = -x^3y^2 + 3x^2y^2 + xy - 5x$,

b) $f : R^2 - \{(0,0)\} \to R$, $f(x,y) = \dfrac{x+2y}{x^2+y^2}$.

Aplicând regula de deivare formulată în cadrul observației precedente obținem:

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -3x^2y^2 + 6xy^2 + y - 5$,

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2x^3y + 6x^2y + x$.

b) $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(x+2y)'_x(x^2+y^2) - (x+2y)(x^2+y^2)'_x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2+y^2-2x(x+2y)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{-x^2+y^2-4xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(x+2y)'_y(x^2+y^2) - (x+2y)(x^2+y^2)'_y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(x^2+y^2)-2y(x+2y)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{2x^2-2y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Observaţia 5.3. Dacă funcţia *f* este derivabilă parţial în raport cu *x* (sau *y*) în punctul (a,b), atunci *f* este continuă (parţial) în raport cu *x* (sau *y*) în punctul (a,b).

Pentru o funcţie de mai multe variabile (de exemplu n) definiţia se păstrează, în acest caz fiind fixate toate variabilele care apar cu excepţia celei în raport cu care se calculează derivata parţială (adică n-1 variabile se consideră constante). Astfel avem pentru $i \in \{1,2,...,n\}$

$$f'_{x_i}(a_1,a_2,...,a_n) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,a_2,...,a_n) = \lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1,...,a_{i-1},x,a_{i+1},...,a_n) - f(a_1,a_2,...,a_i,...,a_n)}{x - a_i},$$ dacă limita din ultimul termen există şi este finită.

Definiţia 5.5. Dacă $f : A \subseteq R^2 \to R$ este derivabilă parţial în raport cu *x*, respectiv *y*, în toate punctele lui *A* şi dacă derivatele parţiale $f'_x(x,y)$ şi $f'_y(x,y)$, care sunt şi ele funcţii reale de două variabile definite pe *A*, sunt la rândul lor derivabile parţial în raport cu *x* şi *y*, derivatele lor parţiale se numesc *derivatele parţiale de ordinul doi ale lui f* şi se notează astfel:

$$f''_{x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y),$$

$$f''_{y^2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y),$$

$$f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y),$$

$$f''_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y).$$

În mod asemănător se definesc derivatele parţiale de ordin mai mare decât doi şi se fololosesc notaţii asemănătoare.

Observaţia 5.4. Funcţiile f''_{xy}, respectiv f''_{yx} se mai numesc şi *derivate parţiale mixte* de ordinul doi pentru *f*. În general ele sunt diferite , dar există şi funcţii pentru care ele coincid.

Criteriul lui Schwarz. (Condiţii suficiente pentru ca derivatele parţiale mixte să coincidă)

Dacă funcţia $f : A \subseteq R^2 \to R$ are derivate parţiale mixte de ordinul doi într-o vecinătate *V* a unui punct $(a,b) \in A$, şi dacă acestea sunt continue în (a,b), atunci ele coincid în acest punct, adică $f''_{xy}(a,b) = f''_{yx}(a,b)$.

Consecinţa 5.1: Dacă derivatele parţiale mixte există şi sunt continue pe *A*, atunci ele sunt egale pe *A*.

Observaţia 5.5. Dacă f'_x, f'_y şi f''_{xy} există într-o vecinătete a lui (a,b)şi dacă cea din urmă este continuă în (a,b), atunci f''_{yx} există în punctul (a,b) şi $f''_{xy}(a,b) = f''_{yx}(a,b)$.

Exemple:

Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul doi pentru funcţiile:

a) $f : R^2 \to R$, $f(x,y) = x^3 y - 3x^2 y^2 + 4x$

b) $f : (0,\infty)^2 \to R$, $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x+y}$

a) Calculăm mai întâi derivatele de ordinul întâi ale lui f.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 y - 6xy^2 + 4,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 - 6x^2 y.$$

Derivând parţial derivatele parţiale de ordinul întâi ale lui *f* vom obţine derivatele parţiale de ordinul doi ale lui *f*.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6xy - 6y^2$ (am derivat parţial în raport cu *x* pe $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$)

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 3x^2 - 12xy$ (am derivat parţial în raport cu y pe $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$)

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -6x^2$ (am derivat parţial în raport cu y pe $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$)

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 3x^2 - 12xy$ (am derivat parţial în raport cu *x* pe $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$).

Derivatele parţiale mixte de ordinul doi ale lui *f* coincid pentru că este satisfăcută condiţia de continuitate ce apare în consecinţa criteriului lui Schwarz).

b) Calculăm mai întâi derivatele de ordinul întâi ale lui *f*.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy(x+y) - x^2 y}{(x+y)^2} = \frac{x^2 y + 2xy^2}{(x+y)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x^2(x+y)-x^2y}{(x+y)^2}=\frac{x^3}{(x+y)^2}.$$

Derivatele parțiale de ordinul doi ale lui *f* sunt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{(2xy+2y^2)(x+y)^2-(x^2y+2xy^2)2(x+y)}{(x+y)^4}=\frac{(2xy+2y^2)(x+y)\ -(x^2y+2xy^2)2}{(x+y)^3}=$$

$$=\frac{2y^3}{(x+y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{(x^2+4xy)(x+y)^2-(x^2y+2xy^2)2(x+y)}{(x+y)^4}=\frac{(x^2+4xy)(x+y)\ -(x^2y+2xy^2)2}{(x+y)^3}=$$

$$=\frac{x^3+3x^2y}{(x+y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=x^3\frac{-2}{(x+y)^3}=-\frac{2x^3}{(x+y)^3}$$

Derivând parţial în raport cu x pe $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ se obține $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{x^3+3x^2y}{(x+y)^3}$, care coincide cu celalată derivată mixtă, criteriul lui Schwarz fiind îndeplinit.

Definiţia 5.6. Fie $f: A\subseteq R^2\to R$ şi (a,b) un punct interior mulţimii A. Spunem că funcţia *f este diferenţiabilă în punctul* (a,b) dacă există două numere reale λ şi μ, şio funcţie $\omega: A\to R$, continuă şi nulă în punctul (a,b), astfel încât pentru orice punct $(x,y)\in A$ să avem:

$$(*)\ f(x,y)=f(a,b)+\lambda(x-a)+\mu(y-b)+\omega(x,y)\rho(x,y),\ \text{unde}$$

$$\rho(x,y)=\|(x,y)-(a,b)\|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\ .$$

Teorema 5.2. Fie $f: A\subseteq R^2\to R$ şi (a,b) un punct interior lui A în care f este diferenţiabilă. Atunci ea admite derivate parţiale în acest punct şi mai mult $\lambda=f'_x(a,b)$ iar $\mu=f'_y(a,b)$.

Demonstraţie:

Fixăm $y=b$. Pentru $x\neq a$, astfel încât $(x,b)\in A$, avem:

$$f(x,b)=f(a,b)+\lambda(x-a)+\omega(x,b)\rho(x,b).$$

Obţinem de aici relaţia: $\dfrac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}=\lambda+\omega(x,b)\dfrac{\rho(x,b)}{x-a}$.

Trecând la limită cu $x\to a$, şi folosind faptul că ω este continuă şi nulă în (a,b), deci implicit continuă parţial în raport cu variabila x în acest punct, obţinem: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}=\lambda$, de unde rezultă faptul că f este derivabilă parţial în raport cu x în punctul (a,b) şi că $f'_x(a,b)=\lambda$.

Analog deducem faptul că $\mu=f'_y(a,b)$

În condiţiile în care *f* este diferenţiabilă în punctul (a,b) putem scrie egalitatea (*) astfel:

$f(x,y)=f(a,b)+f'_x(a,b)(x-a)+f'_y(a,b)(y-b)+\omega(x,y)\rho(x,y)$.

Observaţia 5.6. Dacă *f* este diferenţiabilă pe *A* atunci ea are derivate parţiale pe *A*.

Teorema 5.3. O funcţie diferenţiabilă în punctul (a,b) este continuă în acest punct.

Afirmația precedentă se bazează pe faptul că toți termenii din membrul drept al egalităţii de mai sus, cu excepţia lui $f(a,b)$, au limita 0 în punctul (a,b), deci $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$, adică *f* este continuă în punctul (a,b).

Consecința 5.2. Dacă *f* este diferenţiabilă pe *A* atunci ea este continuă pe *A*.

În practică folosim foarte des urătoarea condiţie suficientă pentru a stabili că o funcţie este diferenţiabilă într-un punct.

Teorema 5.4. Dacă $f: A\subseteq R^2\to R$ este o funcţie ce admite derivate parţiale într-o vecinătate a unui punct (a,b), continue în acest punct, atunci *f* este diferenţiabilă în punctul (a,b).

Observaţia 5.6. Dacă derivatele parţiale ale lui *f* există şi sunt continue pe *A*, atunci ea este diferenţiabilă pe *A*.

Observaţia 5.7. Reciproca teoremei de mai sus nu este adevărată.

Observaţia 5.8. Pentru o funcţie reală de *n* variabile reale definită pe o mulţime $A\subseteq R^n$, se defineşte diferenţiabilitatea într-un punct interior $(a_1,a_2,...,a_n)\in A$ prin egalitatea:

$f(x_1,x_2,...,x_n)=f(a_1,a_2,...,a_n)+\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i(x_i-a_i)+\omega(x_1,x_2,...,x_n)\rho(x_1,x_2,...,x_n)$, unde λ_i, $i=\overline{1,n}$ sunt numere reale, $\rho(x_1,x_2,...,x_n)=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2}$, iar funcţia $\omega(x_1,x_2,...,x_n)$ are limita 0 în punctul $(a_1,a_2,...,a_n)$.

5.4. Diferenţiala unei funcţii de mai multe variabile

Fie $f: A\subseteq R^2\to R$ o funcţie diferenţiabilă în (a,b), punct interior mulţimii *A*. Putem scrie:

$f(x,y)=f(a,b)+f'_x(a,b)(x-a)+f'_y(a,b)(y-b)+\omega(x,y)\rho(x,y)$

Diferenţa $x-a$ se numeşte „creşterea” primei variabile de la *a* la *x*, iar diferenţa $y-b$ se numeşte „creşterea” celei de-a doua variabile de la *b* la *y*.

Diferenţa $f(x,y)-f(a,b)$ se numeşte „creşterea” funcţiei corespunzătoare „creşterilor” $x-a, y-b$ ale argumentelor.

Folosind faptul că funcţia ω are limita 0 în punctul (a,b) putem scrie, aproximativ, că: $f(x,y)-f(a,b)\approx f'_x(a,b)(x-a)+f'_y(a,b)(y-b)$.

Deci, „creşterea” (de fapt variația) funcţiei *f* poate fi aproximată cu funcţia liniară $f'_x(a,b)(x-a)+f'_y(a,b)(y-b)$.

Definiţia 5.7. Fie $f : A \subseteq R^2 \to R$ o funcţie diferenţiabilă în (a,b), interior mulţimii A.
Se numeşte *diferenţiala lui f în punctul* (a,b), funcţia liniară, notată cu $df(a,b)$, dată de:
$df(a,b)(x,y) = f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$.

Diferenţiala $df(a,b)$ este o funcţie definită peste tot în R^2, dar relaţia de aproximare: $f(x,y) - f(a,b) = df(a,b)(x,y)$, are sens numai pentru $(x,y) \in A$ (altfel membrul stâng nu are sens).

Adoptând o scriere mai simplă: $dx = (x-a), dy = y-b$, putem scrie diferenţiala astfel: $df(a,b) = f'_x(a,b)dx + f'_y(a,b)dy$.

Fără a mai pune în evidenţă punctul (a,b) obţinem expresia:

$$df = f'_x dx + f'_y dy \text{ sau } df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Formal ∂f poate fi interpretat ca un produs simbolic între ∂ şi f.

Putem scrie: $df = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)f$, cu ajutorul operatorului: $d = \frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy$, care poartă numele de operator de diferenţiere.

Observaţia 5.9. Pentru cazul unei funcţii de *n* variabile diferenţiala este:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i,$$

iar operatorul de diferenţiere este: $d = \frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}dx_i$.

Definiţia 5.8. Fie $f : A \subseteq R^2 \to R$ o funcţie şi (a,b) interior mulţimii A. Spunem că funcţia *f este diferenţiabilă de n ori în* (a,b)*, sau că f admite diferenţială de ordinul n în* (a,b), dacă toate derivatele parţiale de ordinul *n*-1 ale lui *f* există într-o vecinătate a lui (a,b) şi sunt diferenţiabile în acest punct.
Se spune că *f este diferenţiabilă de n ori pe A* dacă *f* este diferenţiabilă de *n* ori în fiecare punct al lui *A*.

Diferenţiala de ordinul *n* a lui *f* în punctul (a,b) se notează $d^n f(a,b)$ şi respectiv $d^n f$, dacă nu se mai pun în evidenţă variabilele diferenţialei.

Diferenţialele de ordin superior se definesc recurent prin relaţia: $d^n f = d(d^{n-1} f)$.

Observaţia 5.9. Dacă *f* este diferenţiabilă de *n* ori în (a,b), atunci toate derivatele parţiale de ordinul *n* există în acest punct, iar ordinea de derivare în (a,b) până la ordinul *n* inclusiv nu are importanţă.

Observaţia 5.10. Dacă funcţia *f* are, într-o vecinătate a punctului (a,b), toate derivatele parţiale de ordin *n* continue în (a,b), atunci *f* este diferenţiabilă de *n* ori în acest punct.

Cu ajutorul operatorului de diferenţiere putem scrie:

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f.$$

Dezvoltarea puterii de ordinul n a operatorului de diferenţiere este, din punct de vedere formal, asemănătoare binomului lui Newton. Astfel pentru n=2,3 obţinem următoarele expresii:

$$n = 2 \Rightarrow d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2,$$

$$n = 3 \Rightarrow d^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dxdy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3$$

Exemple:

1. Să se calculeze diferenţialele de ordinul unu, respectiv doi, ale funcţiei $f : R^2 \to R,\ f(x,y) = e^{-x^2+3y^2}$ în punctul $(-1,0)$.

Avem: $\frac{\partial f}{\partial x} = -2xe^{-x^2+3y^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = 6ye^{-x^2+3y^2} \Rightarrow df = -2xe^{-x^2+3y^2} dx + 6ye^{-x^2+3y^2} dy$.

Notând cu df_1, diferenţiala funcţiei *f* în punctul dat, avem:

$$df_1 = 2e^{-1} dx .$$

Calculăm derivatele parţiale de ordinul doi ale lui *f*. Avem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2e^{-x^2+3y^2} + 4x^2 e^{-x^2+3y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6e^{-x^2+3y^2} + 36y^2 e^{-x^2+3y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -12xye^{-x^2+3y^2} .$$

Diferenţiala de ordinul doi este:

$$d^2 f = \left(-2 + 4x^2\right)e^{-x^2+3y^2} dx^2 - 24xye^{-x^2+3y^2} dxdy + \left(6 + 36y^2\right)e^{-x^2+3y^2} dy^2 .$$

Notând cu $d^2 f_1$, diferenţiala de ordinul doi a funcţiei *f* în punctul dat avem:

$$d^2 f_1 = 2e^{-1} dx^2 + 6e^{-1} dy^2 .$$

2. Acelaşi enunţ ca la exerciţiul precedent pentru o funcţie de trei variabile reale $f : R^3 \to R,\ f(x,y,z) = 2x^2 - y^2 + z^2 - 3xyz$, punctul ales fiind $(1,2,1)$.

Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 3yz,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y - 3xz,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z - 3xy$$

Diferenţiala de ordinul întâi, într-un punct oarecare, este:

$$df = (4x - 3yz)dx + (-2y - 3xz)dy + (2z - 3xy)dz .$$

În punctul $(1,2,1) \Rightarrow df_1 = -2dx - 7dy - 4dz$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3z, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -3y, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -3x.$$

Obţinem diferenţiala de ordinul doi:

$$d^2 f = 4dx^2 - 2dy^2 + 2dz^2 - 6zdxdy - 6ydxdz - 6xdydz \Rightarrow$$

$$d^2 f_1 = 4dx^2 - 2dy^2 + 2dz^2 - 6dxdy - 12dxdz - 6dydz .$$

5.5. Derivatele parţiale şi diferenţialele funcţiilor compuse

Operaţiile algebrice efectuate cu funcţii ce au derivate parţiale sau sunt diferenţiabile conduc la funcţii de acelaşi fel. Diferenţiabilitatea se păstrează şi prin operaţia de compunere a funcţiilor, fapt care nu se realizează şi în ceea ce priveşte derivatele parţiale.

Teorema 5.4. Fie $u, v : A \subseteq R^2 \to R$, două funcţii diferenţiabile în $(a,b) \in A$, şi funcţia $\varphi : B \subseteq R^2 \to R$, $\varphi(u,v)$, diferenţiabilă în punctul $(c,d), c = u(a,b), d = v(a,b)$. Funcţia compusă $f : A \to R, f(x,y) = \varphi(u(x,y), v(x,y))$ este diferenţiabilă în (a,b), şi au loc relaţiile:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}.$$

Observaţia 5.11. Dacă funcţiile *u,v* sunt diferenţiabile pe *A*, iar funcţia φ este diferenţiabilă pe *B*, atunci funcţia compusă *f* este diferenţiabilă pe *A*.

Teorema 5.5. Dacă $u, v : A \subseteq R^2 \to R$ au derivate parţiale continue pe *A*, iar funcţia $\varphi : B \subseteq R^2 \to R$, $\varphi(u,v)$, are derivate parţiale continue pe *B*, atunci funcţia compusă $f : A \to R,\ f(x,y) = \varphi(u(x,y), v(x,y))$ are derivate parţiale continue pe *A* şi

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

Teorema 5.6. Dacă $u, v : A \subseteq R^2 \to R$ au derivate parţiale într-un punct $(a,b) \in A$, iar funcţia $\varphi : B \subseteq R^2 \to R$, $\varphi(u,v)$, este diferenţiabilă în punctul corespunzător, adică în punctul $(c,d) \in B, c = u(a,b), d = v(a,b)$, atunci funcţia compusă $f : A \to R,\ f(x,y) = \varphi(u(x,y), v(x,y))$ are derivate parţiale în punctul (a,b), şi ele se calculează cu aceleaşi formule ca în teorema precedentă.

Observaţia 5.12. Dacă funcţia φ nu este diferenţiabilă în punctul (c,d), atunci este posibil ca funcţia compusă *f* să nu aibă derivate parţiale în acest punct chiar dacă funcţiile *u* şi *v* sunt diferenţiabile în (a,b), iar φ are derivate parţiale în (c,d).

Observaţia 5.13. Dacă $u, v : A \subseteq R^2 \to R$ au derivate parţiale pe *A*, iar funcţia $\varphi : B \subseteq R^2 \to R$, $\varphi(u, v)$, este diferenţiabilă pe *B*, atunci funcţia compusă $f : A \to R$, $f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$ are derivate parţiale pe *A*, şi ele se calculează cu aceleaşi formule ca în teorema precedentă.

Exemple:

1. Să se precizeze dacă funcţia $f : R^2 \to R$, $f(x, y) = \varphi(x^2 y - 3xy, \sin xy)$ ese diferenţiabilă pe R^2, în condiţiile în care φ este diferenţiabilă pe domeniul maxim de definiţie, şi dacă da, să se calculeze diferenţiala de ordinul întâi a acesteia.

Alegând $u(x, y) = x^2 y - 3xy$, $v(x, y) = \sin xy$, $u, v : R^2 \to R$, ele sunt diferențiabile pe R^2.

Cum φ este diferenţiabilă pe domeniul maxim de definiţie atunci și *f* este diferenţiabilă pe R^2.

Avem: $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$.

Derivatele parţiale sunt date de:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Obţinem:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy - 3y,\ \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - 3x,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = y\cos xy,\ \frac{\partial v}{\partial y} = x\cos xy$$

Diferenţiala de ordinul întâi a lui *f* este:

$$df = \left((2xy - 3y)\frac{\partial \varphi}{\partial u} + y\cos xy\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)dx + \left((x^2 - 3x)\frac{\partial \varphi}{\partial u} + x\cos xy\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)dy.$$

2. Să se precizeze dacă funcţia $g : R \to R, g(x) = f(x^3 + 4x, e^{2x})$ este diferenţiabilă pe R, în condiţiile în care *f* este diferenţiabilă pe domeniul maxim de definiţie, şi dacă da, să se calculeze diferenţiala de ordinul întâi a acesteia.

Alegând $u(x) = x^3 + 4x, v(x) = e^{2x}$ acestea sunt derivabile pe R și deci *g* este diferenţiabilă, cu precizarea că *u* şi *v* sunt funcţii de o singură variabilă iar rolul funcţiei φ este luat de *f* (vezi observația 4.13).

Adaptând formulele anterioare pentru cazul în care *u* şi *v* depind de o singură variabilă, obţinem:

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x} dx = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx}.$$

$\frac{du}{dx} = 3x^2 + 4, \frac{dv}{dx} = 2e^{2x}$, de unde rezultă $dg = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot(3x^2 + 4) + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2e^{2x}\right)dx$.

3. Fie $\varphi : R^3 \to R$ diferențiabilă pe R^3. Să se calculeze diferenţiala de ordinul întâi a funcţiei $f : R^3 \to R$, $f(x,y,z) = \varphi\left(2x + 3y^2 z, xe^{y^2+2z^2}, xyz\right)$, în condiţiile în care aceasta există.

Notând $u(x,y,z) = 2x + 3y^2 z$, $v(x,y,z) = xe^{y^2+2z^2}$, $w(x,y,z) = xyz$, observăm că ele sunt diferenţiabile pe R^3.

Avem: $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}dz$

Adaptând formulele pentru cazul funcţiilor de trei variabile avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y},$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Derivatele parţiale ale funcţiilor u, v, w sunt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2, \frac{\partial u}{\partial y} = 6yz, \frac{\partial u}{\partial z} = 3y^2,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{y^2+2z^2}, \frac{\partial v}{\partial y} = 2xye^{y^2+2z^2}, \frac{\partial v}{\partial z} = 4xze^{y^2+2z^2},$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = yz, \frac{\partial w}{\partial y} = xz, \frac{\partial w}{\partial z} = xy.$$

Astfel obţinem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\frac{\partial \varphi}{\partial u} + e^{y^2+2z^2}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + yz\frac{\partial \varphi}{\partial w},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6yz\frac{\partial \varphi}{\partial u} + 2xye^{y^2+2z^2}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + xz\frac{\partial \varphi}{\partial w},$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3y^2\frac{\partial \varphi}{\partial u} + 4xze^{y^2+2z^2}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + xy\frac{\partial \varphi}{\partial w}.$$

şi deci

$$df = \left(2\frac{\partial \varphi}{\partial u} + e^{y^2+2z^2}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + yz\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)dx + \left(6yz\frac{\partial \varphi}{\partial u} + 2xye^{y^2+2z^2}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + xz\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)dy +$$
$$+\left(2y\frac{\partial \varphi}{\partial u} + 2xze^{y^2+z^2}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + 3xy\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)dz.$$

5.6. Formula lui Taylor pentru funcţii de mai multe variabile

Fie $f : A \subseteq R^2 \to R$ şi (a,b) punct interior lui *A*, o funcție de *n* ori diferenţiabilă în (a,b) cu derivatele parţiale mixte de acelaşi ordin egale (ordinea în care se derivează nu contează).

Definiţia 5.9. Se numeşte *polinom Taylor de gradul n ataşat funcţiei f în punctul* (a,b) polinomul de două variabile, de gradul *n*, notat $T_n(x,y)$, dat de:

$$T_n(x,y)=f(a,b)+\frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x-a)+\frac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y-b)\right]+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}(x-a)^2+2\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x\partial y}(x-a)(y-b)+\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}(y-b)^2\right]$$

$$+\ldots+\frac{1}{n!}\left[\sum_{i=0}^{n}C_n^i\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i}\partial y}(x-a)^{n-i}(y-b)^i\right]$$

$$T_n(x,y)=f(a,b)+\frac{1}{1!}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-a)+\frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right]f(a,b)+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-a)+\frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right]^2 f(a,b)+$$

$$+\ldots+\frac{1}{n!}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-a)+\frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right]^n f(a,b)$$

$R_n(x,y)=f(x,y)-T_n(x,y)$ se numeşte *restul de ordinul n al formulei lui Taylor.*

Relaţia $f(x,y)=T_n(x,y)+R_n(x,y)$ poartă numele *de formula lui Taylor de ordinul n*.

$R_n(x,y)$ reprezintă măsura erorii aproximării funcţiei *f* prin polinomul Taylor de gradul *n*.

Dacă funcţia $R_n(x,y)$ este continuă în (a,b), $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}R_n(x,y)=R_n(a,b)=0$, putem aproxima funcţia $f(x,y)$ cu polinomul Taylor de ordinul *n* pe o vecinătate a lui (a,b).

Teorema 5.7. Dacă funcţia $f:A\subseteq R^2\to R$ are derivate parţiale de ordinul *n* continue într-o vecinătate *V* a punctului (a,b), atunci restul de ordinul n se poate scrie sub forma:

$$R_n(x,y)=\frac{1}{n!}\omega(x,y)\rho^n(x,y),$$

unde funcţia $\omega(x,y)$ este continuă şi nulă în punctul (a,b), $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}\omega(x,y)=\omega(a,b)=0$, iar $\rho(x,y)=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$.

Observaţia 5.13. $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}R_n(x,y)=R_n(a,b)=0$

Observaţia 5.14. Teorema rămâne adevărată în condiţiile în care *f* este diferenţiabilă de *n* ori într-o vecinătate a lui (a,b), şi derivatele parţiale sunt continue doar în (a,b).

Teorema 5.8. Dacă funcţia $f:A\subseteq R^2\to R$ este diferenţiabilă de $n+1$ ori într-o vecinătate *V* a punctului (a,b), atunci pentru orice punct (x,y) din această vecinătate, există un punct $(\xi,\eta)\in A$, aflat pe segmentul ce uneşte punctele (x,y) şi (a,b), astfel că $R_n(x,y)=\dfrac{1}{(n+1)!}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}(x-a)+\dfrac{\partial}{\partial y}(y-b)\right)^{n+1}f(\xi,\eta)$

Observaţia 5.15. Formula lui Lagrange sau a creşterilor finite pentru o funcţie de două variabile reale

Dacă funcţia $f:A\subseteq R^2\to R$ este diferenţiabilă într-o vecinătate *V* a punctului (a,b), atunci pentru orice punct (x,y) din această vecinătate, există un punct $(\xi,\eta)\in A$, cu ξ între *x* şi *a*, şi η între *y* şi *b*, astfel încât: $f(x,y)-f(a,b)=f'_x(\xi,\eta)(x-a)+f'_y(\xi,\eta)(y-b)$

5.7. Extremele funcţiilor de mai multe variabile reale

5.7.1. Extreme locale pentru funcţii reale de două variabile reale

Fie $f : A \subseteq R^2 \to R$ şi $(a,b) \in A$.

Definiţia 5.10. Punctul (a,b) se numeşte *punct de maxim(minim) local* al funcţiei $f(x,y)$ dacă există o vecinătate V a lui (a,b) astfel încât pentru orice $(x,y) \in V \cap A$ să avem $f(a,b) \geq f(x,y)$($f(a,b) \leq f(x,y)$).

Punctul (a,b) din definiţia anterioară se numeşte punct de extrem local (sau relativ) al funcţie *f*.

Observaţia 5.16. (a,b) este punct de extrem local al lui *f* dacă diferenţa $f(x,y) - f(a,b)$ are semn constant pe o vecinătate V a punctului considerat.

Teorema 5.9. Dacă (a,b) este un punct interior lui A în care *f* are derivate parţiale, şi dacă acest punct este punct de extrem local al lui *f*, atunci derivatele parţiale se anulează în acest punct, adică:

$$f'_x(a,b) = 0 \text{ , } f'_y(a,b) = 0 .$$

Definiţia 5.11. Un punct (a,b) interior lui A se numeşte *punct staţionar* al funcţiei $f(x,y)$, dacă *f* este diferenţiabilă în punctul (a,b) şi dacă diferenţiala sa este nulă în acest punct.

$$df(a,b) = f'_x(a,b)dx + f'_y(a,b)dy \Rightarrow df(a,b) = 0 \Leftrightarrow f'_x(a,b) = f'_y(a,b) = 0$$

Astfel a spune că (a,b) este un punct staţionar al funcţiei *f*, înseamnă că funcţia este diferenţiabilă în acest punct iar derivatele parţiale în acest punct sunt nule.

Observaţia 5.17. Dacă *f* este diferenţiabilă în (a,b) şi (a,b) este punct de extrem local pentru *f*, atunci $df(a,b) = 0$, deci (a,b) este punct staţionar al funcţiei *f*.

Observaţia 5.18. Dacă A este o mulţime deschisă şi dacă funcţia *f* este diferenţiabilă pe A, punctele staţionare ale lui *f* sunt toate soluţiile sistemului $\begin{cases} f'_x(a,b) = 0 \\ f'_y(a,b) = 0 \end{cases}$.

Observaţia 5.19. Reciproca teoremei precedente nu este în general adevărată, adică dacă într-un punct (a,b) avem $f'_x(a,b) = f'_y(a,b) = 0$, nu rezultă neapărat că (a,b) este un punct de extrem local pentru *f*.

Punctele de extrem local ale funcţiei *f* se găsesc printre soluţiile sistemului $\begin{cases} f'_x(a,b) = 0 \\ f'_y(a,b) = 0 \end{cases}$, însă nu neapărat toate soluţiile acestui sistem sunt puncte de extrem local pentru funcţia *f*.

Exemple:

1. Fie $f : R^2 \to R, \quad f(x,y) = x^2 - 2y^4 - y^2$.

Avem: $\begin{cases} f'_x(x,y) = 2x \Rightarrow f'_x(0,0) = 0 \\ f'_y(x,y) = -8y^3 - 2y \Rightarrow f'_y(0,0) = 0 \end{cases}$,

Punctul $(0,0)$ nu este punct de extrem pentru *f* căci pe orice vecinătate a sa diferenţa $f(x,y) - f(0,0)$ nu păstrează semn constant.

Astfel fie *V* o vecinătate oarecare a lui $(0,0)$ şi fie $(x,0)$, $x \neq 0$, respectiv $(0,y)$, $y \neq 0$, puncte din *V*. Avem:

$$f(x,0) - f(0,0) = x^2 > 0$$

$$f(0,y) - f(0,0) = -2y^4 - y^2 < 0,$$

deci $(0,0)$ nu este punct de extrem local al funcţiei *f* cu toate că derivatele parţiale sunt nule în acest punct. Punctele staţionare care nu sunt puncte de extrem se numesc puncte şa.

2. Fie $f : R^2 \to R, \quad f(x,y) = 5x^2 + 10y^2 + 12xy$.

Avem: $\begin{cases} f'_x(x,y) = 10x + 12y \Rightarrow f'_x(0,0) = 0 \\ f'_y(x,y) = 20y + 12x \Rightarrow f'_y(0,0) = 0 \end{cases}$,

Se observă că punctul $(0,0)$ este punct staționar și este și punct de extrem pentru *f* căci pe orice vecinătate a sa, de fapt pe R^2 avem: $f(x,y) - f(0,0) = x^2 + y^2 + (2x + 3y)^2 \geq 0$, deci păstrează semn constant.

Teorema 5.10. (Condiţii suficiente pentru ca un punct staţionar să fie punct de extrem local)

Fie $f : A \subseteq R^2 \to R$ şi (a,b) un punct staţionar al lui *f*. Dacă *f* are derivate parţiale de ordinul doi continue într-o vecinătate *V* a lui (a,b), atunci:

1. Dacă $\begin{vmatrix} f''_{x^2}(a,b) & f''_{xy}(a,b) \\ f''_{xy}(a,b) & f''_{y^2}(a,b) \end{vmatrix} > 0$, atunci (a,b) este punct de extrem local al funcţiei *f* şi anume
   a. Dacă $f''_{x^2}(a,b) > 0$, (a,b) este punct de minim.
   b. Dacă $f''_{x^2}(a,b) < 0$, (a,b) este punct de maxim.
2. Dacă $\begin{vmatrix} f''_{x^2}(a,b) & f''_{xy}(a,b) \\ f''_{xy}(a,b) & f''_{y^2}(a,b) \end{vmatrix} < 0$, atunci (a,b) nu este punct de extrem local al funcţiei *f* ci este punct şa.

Una din metodele de determinare a punctelor de extrem local ale unei funcții de mai multe variabile presupune parcurgerea următoarelor trei etape:

Etapa I: determinarea punctelor staționare ale funcției date (rezolvând sistemul obținut prin anularea derivatelor parțiale de ordinul întâi);

Etapa II: calcularea derivatelor parțiale de ordinul doi;

Etapa III: testarea condițiilor din teorema precedentă pentru a stabili care dintre punctele staționare este punct de extrem local.

Exemple:

1. Să se determine punctele de extrem ale funcţiei $f : R^2 \to R, \; f(x,y) = x^3 + y^3 + 12xy - 4$

Etapa I. Determinăm punctele staţionare ale funcţiei.

Avem: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 12y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 12x \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4y = 0 \\ y^2 + 4x = 0 \end{cases}.$

Substituim $x=-\frac{y^2}{4}$ în prima ecuație șiobținem:

$$\frac{y^4}{16}+4y=0 \Rightarrow y^4+64y=0 \Rightarrow y(y+4)(y^2-4y+16)=0$$

Găsim două soluţii reale pentru acest sistem: $(0,0),(-4,-4)$.

Etapa II . Calculăm derivatele parţiale de ordinul doi ale lui *f*.

Avem: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=12$.

Etapa III. Testăm pe rând care din punctele staţionare găsite este şi punct de extrem local pentru *f* .

a) Pentru punctul $(0,0)$ obţinem $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=6, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=6, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)=12$.

Astfel $\begin{vmatrix} f''_{x^2}(0,0) & f''_{xy}(0,0) \\ f''_{xy}(0,0) & f''_{y^2}(0,0) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{vmatrix}=36-144=-108<0$

Conform teoremei precedente punctul $(0,0)$ nu este punct de extrem, ci este punct şa pentru *f*.

b) Pentru punctul $(-4,-4)$ obţinem $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-4,-4)=-24, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-4,-4)=-24, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-4,-4)=12$.

Astfel $\begin{vmatrix} f''_{x^2}(-4,-4) & f''_{xy}(-4,-4) \\ f''_{xy}(-4,-4) & f''_{y^2}(-4,-4) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -24 & 12 \\ 12 & -24 \end{vmatrix}=24^2-144=432>0$

Conform teoremei precedente punctul $(-4,-4)$ este punct de extrem pentru *f*.

Deoarece $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-4,-4)=-24<0$, rezultă că $(-4,-4)$ este un punct de maxim local pentru *f*.

Maximul local al lui *f* este: $f(-4,-4)=-64-64+12\cdot 16-4=60$.

3. Să se determine punctele de extrem ale funcţiei $f: R^2 \to R, f(x,y)=(2x-5)^2+3y^2$.

Etapa I. Determinăm punctele staţionare ale funcţiei

Derivatele parţiale ale lui *f* sunt: $f'_x=4(2x-5),\ f'_y=6y$

Construim sistemul obținut prin anularea derivatelor parțiale:

$$\begin{cases} 4(2x-5)=0 \\ 6y=0 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{5}{2},\ y=0 \text{ reprezintă soluția unică a sistemului.}$$

Astfel funcția admite un singur punct staționar.

Etapa II. Determinăm derivatele parțiale de ordinul doi.

Avem: $f''_{x^2}=8, f''_{y^2}=6, f''_{xy}=0$.

Etapa III. Testăm dacă punctul staționar găsit este punct de extrem.

În $\left(\frac{5}{2},0\right)$ derivatele parțiale de ordinul doi sunt: $f''_{x^2}\left(\frac{5}{2},0\right)=8, f''_{y^2}\left(\frac{5}{2},0\right)=6, f''_{xy}=0$

$$\begin{vmatrix} f''_{x^2}\left(\frac{5}{2},0\right) & f''_{xy}\left(\frac{5}{2},0\right) \\ f''_{xy}\left(\frac{5}{2},0\right) & f''_{y^2}\left(\frac{5}{2},0\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 48 > 0$$

Astfel $\left(\frac{5}{2},0\right)$ este punct de extrem local pentru f, fiind punct de minim deoarece ($f''_{x^2}\left(\frac{5}{2},0\right) = 8 > 0$).

Minimul funcţiei, notat m, este $m = f\left(\frac{5}{2},0\right) = 0$.

Am regăsit astfel un rezultat ce putea fi observat rapid deoarece *f* este o sumă de pătrate, totdeauna pozitivă, ea fiind egală cu 0 (având deci o valoare minimă) pentru valorile ce anulează pătratele, adică pentru $x = 2, y = 0$.

Pentru cazul general, al funcţiilor ce depind de *n* variabile reale următoarea teoremă furnizează condiţii suficiente pentru ca un punct staționar să fie punct de extrem local pentru *f.*

Teorema 5.11. Fie $f : A \subseteq R^n \to R$, care admite derivate parţiale de ordinul doi continue într-o vecinătate a punctului $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$, interior lui *A*, punct staţionar pentru *f.*

Considerând matricea următoare:

$$H(a) = \begin{pmatrix} f''_{x_1^2}(a) & ... & f''_{x_1 x_n}(a) \\ ... & ... & ... \\ f''_{x_n x_1}(a) & ... & f''_{x_n^2}(a) \end{pmatrix},$$

care poartă numele de matrice hessiană, construim şirul format de minorii ei principali, adică şirul: $\Delta_1 = f''_{x_1^2}(a)$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{x_1^2}(a) & f''_{x_1 x_2}(a) \\ f''_{x_2 x_1}(a) & f''_{x_2^2}(a) \end{vmatrix}$,...,

Dacă toţi minorii principali ai lui H sunt pozitivi (Δ_i >0, $(\forall) i = \overline{1,n}$), *a* este punct de minim local pentru *f,* iar dacă toţi minorii principali ai lui H, considerându-i aşezaţi în ordine crescătoare după rangul lor au semne alternând, începând cu semnul minus(Δ_1 < 0, Δ_2 >0,...), *a* este punct de maxim local pentru *f*.

Exemple:

1. Să se determine punctele de extrem ale funcţiei $f : (0,\infty]^3 \to R,\ f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{16x} + \frac{z^2}{y} + \frac{4}{z}$.

Etapa I.

Derivatele parţiale ale lui *f*, de ordinul unu, sunt:

$$f'_x = 1 - \frac{y^2}{16x^2},\quad f'_y = \frac{y}{8x} - \frac{z^2}{y^2},\quad f'_z = \frac{2z}{y} - \frac{4}{z},$$

Rezolvând sistemul

$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \\ f'_z = 0 \end{cases}$, şi ţinând cont de domeniul de definiţie al funcţiei f, obţinem soluţia:

$$a=\left(\frac{\sqrt[4]{2}}{2},2\sqrt[4]{2},\sqrt[4]{8}\right)$$

Astfel funcția admite un singur punct staționar.

Etapa II. Calculăm derivatele parțiale de ordinul doi pentru a construi matricea hessiană H.

Derivatele parţiale de ordinul doi ale lui *f* sunt:

$$f''_{x^2}=\frac{y^2}{8x^3},\ f''_{y^2}=\frac{1}{8x}+\frac{2z^2}{y^3},\ f''_{z^2}=\frac{2}{y}+\frac{8}{z^3}$$

$$f''_{xy}=-\frac{y}{8x^2},\ f''_{xz}=0,\ f''_{yz}=-\frac{2z}{y^2}.$$

Obținem următoarea matrice hessiană în acest punct este:

$$H(a)=\begin{pmatrix} 2\sqrt[4]{2^3} & -\frac{1}{\sqrt[4]{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt[4]{2}} & \frac{3}{4\sqrt[4]{2}} & -\frac{\sqrt[4]{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt[4]{2}}{2} & \frac{3}{\sqrt[4]{2}} \end{pmatrix}.$$

Etapa III. Testăm dacă punctul staționar este sau nu punct de extrem local.

Minorii principali sunt: $\Delta_1=2\sqrt[4]{8},\ \Delta_2=\frac{3\sqrt[4]{8}-2}{2\sqrt[4]{2}},\ \Delta_3=\frac{15}{\sqrt[4]{8}}$.

Ei sunt toţi strict pozitivi, astfel că punctul *a* este un punct de minim local pentru funcţia *f*.

Minimul funcţiei este $\min f=f\left(\frac{\sqrt[4]{2}}{2},2\sqrt[4]{2},\sqrt[4]{8}\right)=\frac{8}{\sqrt[4]{8}}=4\sqrt[4]{2}$.

5.7.2. Extreme cu legături pentru funcţii de mai multe variabile

Deseori se cere aflarea punctelor de extrem pentru anumite funcţii, specificându-se că ele trebuie să satisfacă anumite condiţii (restricţii). Astfel de probleme poartă numele de probleme de extreme cu legături sau de extreme condiţionate.

Definiţia 5.12. Fie $f:A\subseteq R^n\to R$ şi $A_0\subset A$. Spunem că funcţia *f* are în punctul $a\in A_0$ un extrem *relativ la mulţimea* A_0, dacă restricţia lui *f* la mulţimea A_0 are în a un extrem obişnuit. Astfel, a spune că *f* are în punctul a *un maxim (minim) local relativ la mulţimea* A_0, înseamnă că există o vecinătate *V* a lui *a*, astfel încât să avem: $f(x)\le f(a),\ (f(x)\ge f(a))\ (\forall)x\in V\cap A_0$.

Considerăm că mulţimea A_0 este definită ca mulţime a soluţiilor sistemului:

$$\begin{cases} F_1(x_1,x_2,...,x_n)=0 \\ F_2(x_1,x_2,...,x_n)=0 \\ ... \\ F_p(x_1,x_2,...,x_n)=0 \end{cases}$$

, unde $p<n$, iar funcţiile $F_i,\ i=\overline{1,p}$ sunt funcţii reale definite pe A.

Astfel avem $A_0=\{x\in A/F_i(x)=0,\ i=\overline{1,p}\}$.

Extremele funcţiei *f* relative la mulţimea A_0 se mai numesc extreme condiţionate, sau extreme supuse la legături (cele n variabile sunt legate între ele prin cele p relaţii ale sistemului anterior).

Metoda multiplicatorilor lui Lagrange pentru determinarea extremelor condiţionate

Principalele etape ale metodei sunt:

1. Se construieşte funcţia lui Lagrange, notată cu *L*, astfel: $L : R^{n+p} \to R$

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) = f(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i F_i(x),\ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in A,\ \lambda_i \in R, i = \overline{1, p}.$$

Parametrii $\lambda_i, i = \overline{1, p}$ se numesc multiplicatorii lui Lagrange.

2. Se determină punctele staționare ale funcţiei *L.* Sistemul ce trebuie rezolvat este:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \\ \ldots \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \\ F_1 = 0 \\ \ldots \\ F_p = 0 \end{cases}.$$

   Dacă $(a_1, a_2, ..., a_n, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p)$ este o soluţie a acestui sistem, punctul $a = (a_1, ..., a_n)$ este punct staţionar condiţionat pentru funcţia *f.*

3. Stabilim care din punctele staţionare condiţionate sunt puncte de extrem. Considerăm că atât funcţia *f*, cât şi funcţiile $F_i, i = \overline{1, p}$, au derivate parţiale de ordinul doi într-o vecinătate a punctului *a*. Studiem semnul diferenţei $f(x) - f(a)$. Înlocuind în expresia funcţie *L* multiplicatorii lui Lagrange cu valorile $(\alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_p)$, obţinem o nouă funcţie $\tilde{L}$ ce depinde doar de $(x_1, x_2, ..., x_n)$şi faptul că $f(x) - f(a) = \tilde{L}(x) - \tilde{L}(a)$. Construim diferenţiala de ordinul doi: $d^2\tilde{L} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \tilde{L}(a)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$.

4. Se diferenţiază sistemul ce defineşte mulţimea A_0 şi se obţin *p* relaţii liniare de forma: $\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} dx_k = 0, i = \overline{1, m}$, derivatele parţiale fiind calulate în punctul *a*. Din acest sistem se exprimă m diferenţiale în funcţie de celelalte n-m şi se înlocuiesc în expresia formei pătratice $d^2\tilde{L}$.

5. Dacă forma pătratică este definită, atunci diferenţa $f(x) - f(a) = \tilde{L}(x) - \tilde{L}(a)$ păstrează semn constant în jurul lui *a*, deci *a* este punct de extrem condiţionat pentru *f*, iar dacă nu este definită, atunci *a* nu este punct de extrem condiţonat pentru *f.* Dacă $d^2\tilde{L}$ este pozitiv definită, avem un minim condiţionat, iar dacă este negativ definită un maxim condiţionat.

Exemple:

1. Să se determine extremele funcţiei $f: R_+^3 \to R, f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2$, cu condiţia $xyz = 4\sqrt{2}$.

Parcurgem etapele prezentate anterior.

Funcţia ce defineşte relaţia de legătură este: $F(x,y,z) = xyz - 4\sqrt{2}$.

1.Construim funcţia lui Lagrange:

$$L(x,y,z,\lambda) = x^2 + 2y^2 + z^2 + \lambda\left(xyz - 4\sqrt{2}\right).$$

2. Cu derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei L construim sistemul ce defineşte punctele staţionare ale lui L. Acesta este:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \lambda yz = 0 \\ 4y + \lambda xz = 0 \\ 2z + \lambda xy = 0 \\ xyz - 4\sqrt{2} = 0 \end{cases}.$$

Rezolvând acest sistem şi ţinând cont de domeniul de definiţie al funcţiei *f* se obţine o unică soluţie: $\left(2,\sqrt{2},2,-\sqrt{2}\right)$.

3. Pentru a stabili dacă punctul $\left(2,\sqrt{2},2\right)$ este punct de extrem condiţionat pentru *f* fixăm $\lambda = -\sqrt{2}$ şi obţinem funcţia $\widetilde{L} = x^2 + 2y^2 + z^2 - \sqrt{2}\left(xyz - 4\sqrt{2}\right)$.

Avem: $\frac{\partial^2 \widetilde{L}}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 \widetilde{L}}{\partial y^2} = 4$, $\frac{\partial^2 \widetilde{L}}{\partial z^2} = 2$, $\frac{\partial^2 \widetilde{L}}{\partial x \partial y} = -\sqrt{2}z$, $\frac{\partial^2 \widetilde{L}}{\partial y \partial z} = -\sqrt{2}x$, $\frac{\partial^2 \widetilde{L}}{\partial x \partial z} = -\sqrt{2}y$.

Calculând aceste derivate parţiale de ordinul doi în punctul $\left(2,\sqrt{2},2\right)$ obţinem:

$$\frac{\partial^2 \widetilde{L}}{\partial x^2} = 2,\ \frac{\partial^2 \widetilde{L}}{\partial y^2} = 4,\ \frac{\partial^2 \widetilde{L}}{\partial z^2} = 2,\ \frac{\partial^2 \widetilde{L}}{\partial x \partial y} = -2\sqrt{2},\ \frac{\partial^2 \widetilde{L}}{\partial y \partial z} = -2\sqrt{2},\ \frac{\partial^2 \widetilde{L}}{\partial x \partial z} = -2.$$

Astfel forma pătratică pe care o obţinem este:

$$d^2\widetilde{L} = 2dx^2 + 4dy^2 + 2dz^2 - 2\sqrt{2}dxdy - 2dxdz - 2\sqrt{2}dydz.$$

4. Diferenţiem relaţia de legătură şi obţinem : $yzdx + xydz + xzdy = 0$.

Pentru punctul considerat vom avea $2\sqrt{2}dx + 2\sqrt{2}dz + 4dy = 0$.

Putem exprima o singură diferenţială în funcţie de celelalte două, fie de exemplu dx aceasta $\Rightarrow dy = -\frac{dx + dz}{\sqrt{2}}$.

Astfel avem:

$$d^2\widetilde{L} = 6dy^2 + 6dz^2 + 6dydz$$

$$d^2\widetilde{L} = 6\left(dy^2 + dz^2 + dydz\right) = 6\left(dy + \frac{dz}{2}\right) + \frac{9}{2}dz^2 .$$

5. $d^2\widetilde{L}$ este deci o formă pătratică pozitiv definită, de unde deducem că punctul $\left(2,\sqrt{2},2\right)$ este un punct de minim condiţionat pentru f.

Avem $\min\limits_{\substack{x,y,z \\ xyz=1}} f(x,y,z) = f\left(2,\sqrt{2},2\right) = 4+4+4 = 12$.

5.8. Funcţii implicite.

Să considerăm că f este o funcţie continuă şi strict crescătoare pe un segment $[a,b]$, cu valori în $[\alpha,\beta]$, atunci ecuaţia $f(x) - y = 0$ are, pentru fiecare $y \in [\alpha,\beta]$, o singură rădăcină $x = \varphi(y)$. Astfel ecuaţia dată defineşte o funcţie φ pe intervalul $[\alpha,\beta]$ şi numai una. Spunem că funcţia φ este definită implicit de ecuaţia considerată.

O ecuaţie de forma $F(x,y) = 0$ poate avea (în raport cu y) una sau mai multe soluţii pe o mulţime A, sau poate să nu aibă nici o soluţie.

Exemple:

Ecuaţia $x^4 + 2y^2 + 1 = 0$ nu are nici o soluţie reală, nici în raport cu x, nici în raport cu y.

Ecuaţia $x + 3y = 0$ are o singură soluţie reală în raport cu y pe R, şi anume $f(x) = -\frac{x}{3}$.

Definiţia 5.13. Dacă există o singură funcţie $f(x)$ definită pe o mulţime A care să verifice ecuaţia $F(x,y) = 0$ şi eventual şi alte condiţii suplimentare, spunem că funcţia $f(x)$ este definită de ecuaţia $F(x,y) = 0$, adică este o funcţie definită implicit, sau mai simplu *funcţie implicită*.

Propoziţia 5.1. Fie $A \subset R^n, n \geq 1, x_0$ un punct interior lui A, $B \subset R$ şi y_0 un punct interior lui B; fie funcţia reală $F : A \times B \to R$. Dacă $F(x_0, y_0) = 0$ şi dacă există o vecinătate $U \subseteq A$ a lui x_0 şi o vecinătate $V \subseteq B$ a lui y_0 astfel încât:

1. $(\forall)x \in U$ fixat, funcţia $y \to F(x,y)$ este continuă şi strict monotonă pe V;
2. $(\forall)y \in V$ fixat, funcţia $x \to F(x,y)$ este continuă în x_0;

atunci:

a) există o vecinătate $U_0 \subseteq A$ a lui x_0 şi o vecinătate $V_0 \subseteq B$ a lui y_0 astfel încât pentru orice punct $x \in U_0$ fixat, ecuaţia în y, $F(x,y) = 0$ să aibă o singură soluţie în V_0, $y = f(x) : F(x, f(x)) = 0,\ x \in U_0$,

b) funcţia implicită $f(x): U_0 \to V_0$, definită de ecuaţia $F(x, y) = 0$ verifică egalitatea $f(x_0) = y_0$ şi este continuă, în x_0.

Înlocuind 2 prin condiţia:

$2'$. Pentru orice $y \in V$ fixat, funcţia $x \to F(x, y)$ este continuă pe U (nu numai în x_0), atunci funcţia implicită $f(x)$ este continuă pe U_0 (nu numi în x_0).

Teorema 5.12. Fie $A \subset R^n, n \geq 1, x_0$ un punct interior lui A, $B \subset R$ şi y_0 un punct interior lui B; fie funcţia reală $F : A \times B \to R$ astfel încât $F(x_0, y_0) = 0$. Dacă:

1. Funcţia $F(x, y) = F(x_1, x_2, ... x_n, y)$ are derivate parţiale $F'_{x_1}, F'_{x_2}, ..., F'_{x_n}, F'_y$ continue pe o vecinătate $U \times V$ a lui (x_0, y_0);
2. $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$;

atunci :

a) există există o vecinătate $U_0 \subseteq A$ a lui x_0 şi o vecinătate $V_0 \subseteq B$ a lui y_0 şi o funcţie unică $y = f(x) : U_0 \to V_0$, astfel încât $y_0 = f(x_0)$ şi $F(x, f(x)) = 0,$ pentru $x \in U_0$,

b) funcţia $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ are derivate parţiale $f'_{x_1}, f'_{x_2}, ..., f'_{x_n}$ continue pe U_0, şi acestea sunt date de relaţiile:

$$f'_{x_i} = -\frac{F'_{x_i}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}, \; x \in U_0, \; i = \overline{1, n}$$

c) dacă *F* derivatele parţiale de ordinul *k* sunt continue pe $U \times V$, atunci funcţia implicită *f* are derivate parţiale de ordinul *k* şi acestea sunt continue pe U_0.

Pentru cazurile *n*=1, respectiv *n*=2, teorema anterioară devine:

Teorema 5.13. (n=1) Fie $F(x, y)$ o funcţie definită într-o vecinătate $V \subset R^2$ a unui punct (x_0, y_0) şi care se anulează în acest punct: $F(x_0, y_0) = 0$. Dacă F are derivate parţiale F'_x, F'_y continue pe V, iar $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, atunci există o unică funcţie $\varphi(x)$ definită şi continuă într-o anumită vecinătate a lui x_0, cu $\varphi(x_0) = y_0$ şi astfel ca funcţia $y = \varphi(x)$ să fie o soluţie a ecuaţiei $F(x, y) = 0$, adică $F(x, \varphi(x)) \equiv 0$. Funcţia φ are derivată continuă şi are loc egalitatea: $\varphi'(x) = -\dfrac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}, \; (y = \varphi(x))$.

Teorema 5.14. (n=2) Fie $F(x, y, z)$ o funcţie definită într-o vecinătate $V \subset R^3$ a unui punct (x_0, y_0, z_0) şi care se anulează în acest punct: $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Dacă F are derivate parţiale F'_x, F'_y, F'_z continue pe V, iar $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, atunci există o unică funcţie $f(x, y)$ definită şi continuă într-o anumită vecinătate a lui (x_0, y_0), cu $f(x_0, y_0) = z_0$ şi astfel ca funcţia $z = f(x, y)$ să fie o soluţie a ecuaţiei $F(x, y, z) = 0$, adică $F(x, y, f(x, y)) \equiv 0$. Funcţia f are derivate parţiale continue şi au loc egalităţile: $f'_x(x) = -\dfrac{F'_x}{F'_z}, \; f'_y = -\dfrac{F'_y}{F'_z}$.

5.9.Probleme rezolvate

1. Să se studieze continuitatea funcţiei $f : R^2 \to R$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+4y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Soluţie:

În mod evident, funcţia *f* este continuă pe $R^2 - \{(0,0)\}$.

Calculăm limita în punctul $(0,0)$.

Fie $\{(x_n, y_n)\}_{n\in N}$ astfel încât $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0,\ x_n \neq 0$ şi $y_n = mx_n$.

Astfel $(x_n, y_n) \underset{n\to\infty}{\to} (0,0)$ şi $(x_n, y_n) \neq (0,0)$.

Avem $f(x_n, y_n) = \dfrac{x_n y_n}{x_n^2 + 4y_n^2} \Rightarrow f(x_n, mx_n) = \dfrac{x_n mx_n}{x_n^2 + 4m^2x_n^2} = \dfrac{m}{1+4m^2}$.

Deci $f(x_n, mx_n) \underset{n\to\infty}{\to} \dfrac{m}{1+4m^2}$.

Cum limita depinde de valoarea lui *m*, funcţia din enunţ nu are limită în punctul $(0,0)$, deci, cu atât mai mult, nu este continuă în acest punct.

2. Fie funcţia $f : R^2 \to R$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^3y}{x^4+2y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Să se arate că este continuă parţial în raport cu fiecare variabilă în toate punctele lui R^2, (deci şi în $(0,0)$) dar nu este continuă în $(0,0)$.

Soluţie:

Evident *f* este continuă pe $R^2 - \{(0,0)\}$, deci conform teoremei precedente este continuă parţial în toate punctele lui $R^2 - \{(0,0)\}$. Vom arăta că *f* este continuă în raport cu variabila x în origine şi vom deduce că ea este continuă şi în raport cu y, deoarece x şi y au roluri simetrice.

Avem $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^3 \cdot 0}{x^4 + 0^4} = 0 = f(0,0)$, ceea ce justifică afirmaţia precedentă.

Vom studia continuitatea lui *f* în $(0,0)$.

Pentru $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ şi $y_n = mx_n$ avem:

$$f(x_n, y_n) = \frac{4x_n^3 y_n}{x_n^4 + 2y_n^4} = \frac{4m}{1+2m^4}.$$

Deci $f(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{4m}{1+2m^2}$, limită ce depinde de *m*.

Deducem de aici că *f* nu are limită în punctul $(0,0)$, deci *f* nu este continuă în $(0,0)$.

3. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiilor

a) $f : R^2 \to R$, $f(x, y) = x^3y^2 + 5x^2y^2 - xy - 2y$,

b) $f : R^2 - \{(0,0)\} \to R$, $f(x, y) = \frac{\sin(x+3y)}{x^2 + y^2}$.

Soluţie:

Aplicând regula de calcul pentru derivatele parţiale obţinem:

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2y^2 + 10xy^2 - y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^3y + 10x^2y - x - 2$

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\cos(x+3y)(x^2+y^2) - \sin(x+3y)2x}{(x^2+y^2)^2}$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\cos(x+3y)3(x^2+y^2) - \sin(x+3y)2y}{(x^2+y^2)^2}$$

4. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul doi pentru funcţiile:

a) $f : R^2 \to R$, $f(x, y) = 2x^3y + x^2y^2 - 3x^2y + 4x$

b) $f : (0, \infty)^2 \to R$, $f(x, y) = \frac{xy}{x+y}$.

Soluţie:

a) Calculăm mai întâi derivatele de ordinul întâi ale lui *f*.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x^2y + 2xy^2 - 6xy + 4,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^3 + 2x^2y - 3x^2,$$

Derivatele parțiale de ordinul doi ale lui *f* sunt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12xy + 2y^2 - 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 6x^2 + 4xy - 6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6x^2 + 4xy - 6x$$

Se observă că cele două derivate parţiale mixte de ordinul doi ale lui f coincid, pentru că, după cum se poate verifica imediat, este satisfăcută condiţia (de continuitate) ce apare în consecinţa criteriului lui Schwarz, consecința 4.1.

5. Să se arate că pentru funcția $f : R^2 \to R \quad f(x,y) = x^2y^2 - 5xy + \cos(2xy)$, au loc relațiile:

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = (x-y)(5 - 2xy + 2\sin(2xy))$

b) $2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \left(x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = 2xy(2xy - 5 - 2\sin(2xy))$.

Soluţie:

a) Într-adevăr avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 - 5y - 2y\sin(2xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y - 5x - 2x\sin(2xy).$$

Astfel obținem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} &= 2xy(y-x) - 5(y-x) - 2\sin(2xy)(y-x) = \\ &= (x-y)(5 - 2xy + 2\sin(2xy))\end{aligned}$$

b)Calculând derivatele parțiale de ordinul doi avem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2 - 4y^2\cos(2xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 - 4x^2\cos(2xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy - 5 - 2\sin(2xy) - 4xy\cos(2xy)$$

Astfel avem:

$$2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \left(x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) =$$

$$= 2xy(4xy - 5 - 2\sin(2xy) - 4xy\cos(2xy)) -$$

$$-\left(x^2\left(2y^2 - 4y^2\cos(2xy)\right) + y^2\left(2x^2 - 4x^2\cos(2xy)\right)\right) =$$

$$= 2xy(2xy - 5 - 2\sin(2xy)).$$

6. Să se arate că funcția $f : R^2 \to R$ $f(x, y) = \ln(2x^2 + 2y^2)$ satisface ecuația lui Laplace: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Soluţie:

Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4x}{2x^2 + 2y^2} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4y}{2x^2 + 2y^2} = \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

Astfel derivatele parțiale de ordinul doi sunt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(x^2 + y^2) - 4x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Prin însumarea celor două relații găsim într-adevăr:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Deci funcția dată satisface ecuația lui Laplace.

7. Să se determine diferenţiala de ordinul unu în punctul $(-2,1)$ pentru funcţia $f : R^2 \to R$, $f(x, y) = -2x^4y + x^3y^2 - 3y + 5x$

Soluţie:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -8x^3y + 3x^2y^2 + 5 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-2,1) = -8\cdot(-2)^3\cdot 1 + 3\cdot(-2)^2\cdot 1^2 + 5 = -64 + 12 + 5 = -47$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x^4 + 2x^3y - 3 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-2,1) = -32 + 2(-2)^3 - 3 = -32 - 16 - 3 = -51$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \Rightarrow df(-2,1) = -47dx - 51dy.$$

8. Să se calculeze diferenţialele de ordinul unu, respectiv doi, ale funcţiei *f* în punctul $(0,1)$.

$f : R^2 \to R,\ f(x,y) = e^{x^2+4y^2}$.

Soluţie:

Fără să mai punem în evidenţă argumentele funcților care apar, avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{x^2+4y^2},\ \frac{\partial f}{\partial y} = 8ye^{x^2+4y^2}$$

$$\Rightarrow df = 2xe^{x^2+4y^2}dx + 8ye^{x^2+4y^2}dy.$$

Notând cu df_1, diferenţiala funcţiei *f* în punctul dat, avem:

$$df_1 = 8e^4dy.$$

Pentru a obţine diferenţiala de ordinul doi calculăm derivatele parţiale de ordinul doi ale lui *f*.

Avem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^{x^2+4y^2} + 4x^2e^{x^2+4y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 8e^{x^2+4y^2} + 32y^2e^{x^2+4y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 16xye^{x^2+4y^2}.$$

Obţinem $d^2f = (2+4x^2)e^{x^2+4y^2}dx^2 + 32xye^{x^2+4y^2}dxdy + (8+32y^2)e^{x^2+4y^2}dy^2$.

Notând cu d^2f_1, diferenţiala de ordinul doi a funcţiei *f* în punctul dat, avem:

$$d^2f_1 = 2e^4dx^2 + 40e^4dy^2.$$

9. Să se determine y' și y'' dacă $y=y(x)$ este funcția definită implicit de ecuația:

$y^5+x^2y^3+x^2+y=0$ în vecinătatea punctului $(0,0)$.

Soluție:

Fie $\mathrm{F}(x,y)=y^5+x^2y^3+x^2+y, \quad (x,y)\in R^2$.

Evident, F este de clasă C^1 pe R^2.

$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=2xy^3+2x$.

$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=5y^4+3x^2y^2+1$.

$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\neq 0$.

Astfel ecuația $\mathrm{F}(x,y)=0$ definește pe y ca funcție de x în vecinătatea oricărui punct (x_0,y_0) din mulțimea R^2 care verifică ecuația dată. Punctul $(0,0)$ satisface această condiție.

Pentru orice x dintr-o vecinatate a punctului x_0, ecuatia data are solutie unica $\mathrm{y}(x)$ iar derivata acesteia se calculează cu formula din teorema 4.13:

$$y'(x)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))}.$$

Astfel pentru orice x din vecinătatea lui 0 ecuația dată are soluție unică $y=y(x)$.

Calculând derivatele acestei funcții obținem:

$y'(x)=-\frac{2xy^3+2x}{5y^4+3x^2y^2+1}$, adică $y'(0)=0$.

$$y''(x)=-\frac{\left(2y^3+2x3y^2y'+2\right)\left(5y^4+3x^2y^2+1\right)-\left(2xy^3+2x\right)\left(20y^3y'+6xy^2+6x^2yy'\right)}{\left(5y^4+3x^2y^2+1\right)^2}=$$

$$=-\frac{\left(2y^3+6xy^2\left(-\frac{2xy^3+2x}{5y^4+3x^2y^2+1}\right)+2\right)\left(5y^4+3x^2y^2+1\right)-\left(2xy^3+2x\right)\left(\left(20y^3+6x^2y\right)\left(-\frac{2xy^3+2x}{5y^4+3x^2y^2+1}\right)+6xy^2\right)}{\left(5y^4+3x^2y^2+1\right)^2}$$

Obținem: $y''(0)=2$.

10. Să se determine y' și y'' dacă $y=y(x)$ este funcția definită implicit de ecuația:

$y^2+x^5-1=0$ în vecinătatea punctului $(0,1)$.

Soluție:

Fie $F(x,y)=y^2+x^5-1, \ (x,y)\in R^2$.

Evident, F este de clasa C^1 pe R^2.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=2y+5x^4$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=2y$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\neq 0 \text{, dacă } y\neq 0.$$

Astfel ecuatia $F(x,y)=0$ defineşte pe y ca funcție de x în vecinătatea oricărui punct (x_0,y_0) din multimea R^2, cu $y_0\neq 0$, care verifică ecuația dată. Punctul $(0,1)$ satisface acestă condiție.

Pentru orice x dintr-o vecinătate a punctului x_0, ecuația dată are soluție unică $y(x)$ iar derivata acesteia se calculează cu formula din teorema 4.13:

$$y'(x)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))}.$$

Astfel pentru orice x din vecinătatea lui 0 ecuația dată are soluție unică $y=y(x)$.

Calculând derivatele acestei funcții obținem:

$$y'(x)=-\frac{2y+5x^4}{2y} \text{, adică } y'(0)=-1.$$

$$y''(x)=-\frac{(2y'+20x^3)2y-(2y+5x^4)(2y')}{4y^2}=-\frac{40x^3y-10x^4y'}{4y^2}$$

Obținem: $y''(0)=0$.

11. Să se determine y' şi y'' dacă $y=y(x)$ este funcția definită implicit de ecuația:

$4x^2-xy+y^2-4=0$ în vecinătatea punctului $(1,1)$.

Soluție:

Fie $F(x,y)=4x^2-xy+y^2-4,\ (x,y)\in R^2$.

Evident, F este de clasa C^1 pe R^2.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=8x-y$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=-x+2y$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\neq 0 \text{, dacă } -x+2y\neq 0.$$

Punctul $(0,1)$ satisface condițiile: $F(1,1)=0$ și $-1+2=1\neq 0$, astfel că pentru orice x dintr-o vecinătate a punctului 1, ecuația dată are soluție unică $y=y(x)$, iar derivata acesteia se calculează cu formula din teorema 4.13:

$$y'(x)=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))}.$$

Astfel pentru orice x din vecinătatea lui 1 ecuația dată are soluție unică $y=y(x)$.

Calculând derivatele acestei funcții obținem:

$$y'(x)=-\frac{8x-y}{-x+2y}\text{, adică } y'(1)=-7\,.$$

$$y''(x)=-\frac{(8-y')(-x+2y)-(8x-y)(-1+2y')}{(-x+2y)^2}=-\frac{15y-15xy'}{(-x+2y)^2}\text{, adică } y''(1)=-\frac{15+105}{1}=-120\,.$$

12. Să se determine derivatele parțiale de ordinul întâi și doi ale funcției z definite implicit de ecuația:

$$3x^2-y^2+z^2-3xz+2y=0.$$

Soluţie:

Fie $F(x,y,z)=3x^2-y^2+z^2-3xz+2y$.

Evident F este de clasă C^1 pe R^3.

Derivatele ei parțiale de ordinul întâi sunt:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=6x-3z\,,\ \frac{\partial F}{\partial y}=-2y+2\,,\ \frac{\partial F}{\partial z}=2z-3x\,.$$

Ecuația $F(x,y,z)=0$ definește pe z ca funcție ce depinde de x și y în vecinătatea oricărui punct (x_0,y_0,z_0) din mulțimea: $A=\{(x,y,z)\in R^3\,/\,F(x,y,z)=0,\,2z-3x\neq 0\}$.

Aplicăm formulele din teorema 4.14 calculăm derivatele parțiale de ordinul întâi ale lui z:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z(x,y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))},\ \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z(x,y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))}$$

Obținem:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=-\frac{6x-3z}{2z-3x}=\frac{3z-6x}{2z-3x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=-\frac{-2y+2}{2z-3x}=\frac{2y-2}{2z-3x}.$$

Pentru calculul derivatelor parțiale de ordinul doi vom deriva, ținând cont de faptul că $z=z(x,y)$ în relațiile obținute.

Astfel găsim:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y)=\frac{3z-6x}{2z-3x}=\frac{\left(3\frac{\partial z}{\partial x}-6\right)(2z-3x)-(3z-6x)\left(2\frac{\partial z}{\partial x}-3\right)}{(2z-3x)^2}=$$

$$=\frac{\left(3\frac{3z-6x}{2z-3x}-6\right)(2z-3x)-(3z-6x)\left(2\frac{3z-6x}{2z-3x}-3\right)}{(2z-3x)^2}=$$

$$=\frac{\left(\frac{9z-18x-12z+18x}{2z-3x}\right)(2z-3x)-(3z-6x)\left(\frac{6z-12x-6z+9x}{2z-3x}\right)}{(2z-3x)^2}=$$

$$=\frac{(-3z)(2z-3x)-(3z-6x)(-3x)}{(2z-3x)^3}=\frac{-6z^2+18xz-18x^2}{(2z-3x)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y)=\frac{2(2z-3x)-(2y-2)\left(2\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{(2z-3x)^2}=\frac{4z-6x-(2y-2)\left(2\frac{2y-2}{2z-3x}\right)}{(2z-3x)^2}=$$

$$=\frac{(4z-6x)(2z-3x)-(2y-2)(4y-4)}{(2z-3x)^2}=\frac{8z^2-8y^2+18x^2-24xz+16y-8}{(2z-3x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\left(3\frac{\partial z}{\partial y}\right)(2z-3x)-(3z-6x)\left(2\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{(2z-3x)^2}=$$

$$=\frac{\left(3\frac{2y-2}{2z-3x}\right)(2z-3x)-(3z-6x)\left(2\frac{2y-2}{2z-3x}\right)}{(2z-3x)^2}=$$

$$=\frac{\left(\frac{6y-6}{2z-3x}\right)(2z-3x)-(3z-6x)\left(\frac{4y-4}{2z-3x}\right)}{(2z-3x)^2}=\frac{6xy-6x}{(2z-3x)^3}.$$

6. INTEGRALE DUBLE ŞI TRIPLE

6.1. Noţiunea de integrala dublă

Fie $D \subset R^2$ o mulţime închisă şi mărginită (compactă) şi $f : D \subset R^2 \to R$ o funcţie mărginită pe *D*.

Definiţia 6.1. Se numeşte *diviziune* a domeniului *D* un şir finit de submulţimi închise şi mărginite ale lui *D*, $D_1, D_2, ..., D_n$, ce au proprietatea că au interioarele disjuncte două câte două, iar reunite dau mulţimea *D*, adică $\overset{o}{D}_i \cap \overset{o}{D}_j = \emptyset, i \neq j; \bigcup_{i=1}^{n} D_i = D$. Se mai spune că ele formează o diviziune Δ a domeniului *D*.

Definiţia 6.2. Numărul pozitiv, notat cu d_i, dat de relaţia $d_i = \sup_{P,Q \in D_i} d(P,Q)$, unde $d(P,Q)$ reprezintă distanţa euclidiană dintre P şi Q , puncte din R^2 se numeşte *diametrul* submulţimii D_i.

Exemple:

D_i - disc circular împreună cu frontiera sa $\Rightarrow$ d_i este diametrul său;

D_i -suprafaţă dreptunghiulară $\Rightarrow$ d_i este lungimea diagonalei dreptunghiului

Definiţia 6.3. Se numeşte *normă a diviziunii* Δ, numărul notat $\|\Delta\|$, dat de $\|\Delta\| = \max_{i=\overline{1,n}} d_i$.

Definiţia 6.4. Fie Δ o diviziune a lui *D*, $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ ariile corespunzătoare mulţimilor închise şi mărginite $D_1, D_2, ..., D_n$ ale diviziunii considerate, iar $P_i(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ câte un punct intermediar din fiecare $D_i, i = \overline{1,n}$, expresia $\sigma_\Delta(f, P_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\omega_i$ se numeşte *suma Riemann a funcţiei f relativă la diviziunea* Δ *şi la punctele intermediare* $P_i, i = \overline{1,n}$.

Definiţia 6.5. Se numeşte *suma Darboux inferioară a funcţiei f relativă la diviziunea* Δ expresia $s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i\omega_i$, unde $m_i = \inf_{(x,y) \in D_i} f(x,y), i = \overline{1,n}$ (*f* este presupusă mărginită, deci $\exists m_i \ (\forall) i = \overline{1,n}$).

Expresia $S_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i\omega_i$, unde $M_i = \sup_{(x,y) \in D_i} f(x,y), i = \overline{1,n}$, se numeşte *suma Darboux superioară a funcţiei f relativă la diviziunea* Δ.

Observaţia 6.1. Sumele Darboux nu depind de alegerea punctelor intermediare şi verifică relaţia $s_\Delta(f) \leq \sigma_\Delta(f, P_i) \leq S_\Delta(f)$.

Definiţia 6.6. Spunem că funcţia $f : D \subset R^2 \to R$ este *dublu integrabilă (integrabilă)* pe compactul *D*, dacă există un număr real *I* cu proprietatea că $(\forall)\varepsilon > 0$, $(\exists)\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice diviziune Δ, cu $\|\Delta\| < \delta(\varepsilon)$ şi orice alegere a punctelor intermediare $P_i \in D_i$ să avem: $|\sigma_\Delta(f, P_i) - I| < \varepsilon$ (şirul sumelor Riemann pentru diviziuni cu normele tinzând la zero este convergent).

Numărul *I* cu proprietatea de mai sus se numeşte integrala dublă a lui *f* pe *D* şi se notează

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy.$$

Criterii de integrabilitate

Criteriul I. Funcţia $f: D \subset R^2 \to R$ ste integrabilă pe compactul D dacă și numai dacă oriare ar fi şirul de diviziuni $\{\Delta_p\}_{p\in N}$ cu $\|\Delta_p\| \to 0$, şirul sumelor Riemann $\{\sigma_{\Delta_p}(f, P_i^p)\}_{p\in N}$ convearge către *I* pentru orice alegere a punctelor intermediare.

Criteriul II. (Darboux) O funcţie mărginită este dublu integrabilă pe D dacă și numai dacă pentru orice ε›0, există numărul $\delta(\varepsilon)$›0, astfel încât pentru orice diviziune Δ cu $\|\Delta\| \langle \delta(\varepsilon)$ să avem $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) \langle \varepsilon$.

Criteriul III. Dacă *f* este continuă pe *D* atunci *f* este integrabilă pe *D*.

6.2. Proprietăţi ale integralelor duble

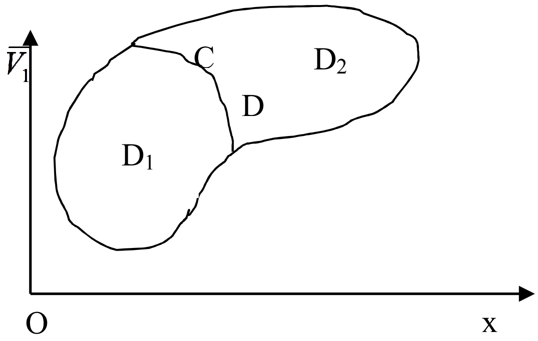
1. Dacă $f, g: D \to R$ sunt integrabile pe *D* şi $\lambda, \mu \in R$, atunci funcţia $\lambda f + \mu g$ este integrabilă pe *D* şi avem:

$$\iint_D (\lambda f(x,y) + \mu g(x,y))dxdy = \lambda \iint_D f(x,y)dxdy + \mu \iint_D g(x,y)dxdy.$$

2. Dacă *f* este integrabilă pe *D* şi *D* se descompune în două subdomenii disjuncte D_1, D_2 (ca în figură), printr-o curbă C, atunci *f* este integrabilă pe D_1 şi pe D_2 şi are loc relaţia:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

Proprietatea poartă numele de aditivitatea integralei duble faţă de domeniul de integrare.



3. Dacă funcţia *f* este integrabilă pe *D* şi $f(x,y) \geq 0$ $(\forall)(x,y) \in D$, atunci $\iint_D f(x,y)dxdy \geq 0$.

Astfel,dacă *f* şi *g* sunt integrabile pe *D* şi $f(x,y) \geq g(x,y)$ atunci

$\iint_D f(x,y)dxdy \geq \iint_D g(x,y)dxdy$ (proprietatea de monotonie a integralei duble).

4. Dacă funcţia *f* este integrabilă pe *D*, atunci şi $|f|$ este integrabilă pe *D*, iar

$$\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right| \leq \iint_D |f(x,y)|dxdy.$$

5. Dacă $m \leq f(x,y) \leq M$, $(\forall)(x,y) \in D$, atunci există un număr $\mu \in [m, M]$ astfel încât:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \mu aria(D).$$

6. Dacă f este continuă pe D atunci există un punct $(\xi,\eta)\in D$ astfel încât:

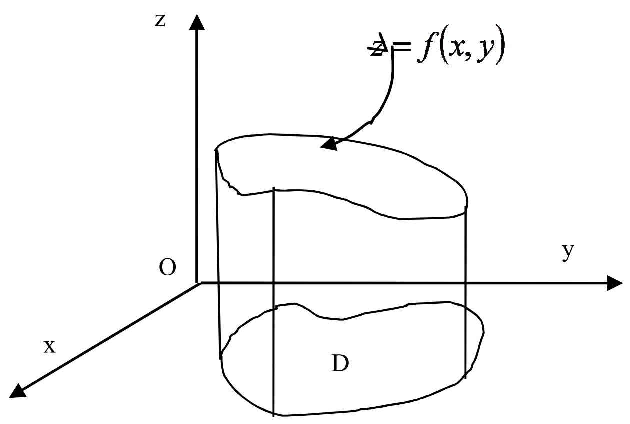
$$\iint_D f(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)aria(D).$$

6.3. Interpretarea geometrică a integralei duble

Să considerăm un reper cartezian în spaţiu şi un domeniu *D* situat în planul xOy. Fie $f : D \subset R^2 \to R$ o funcţie integrabilă pe D.

Volumul V, al corpului cilindric ce are ca bază domeniul *D*, generatoarea paralelă cu axa Oz și este mărginit în partea de sus de suprafaţa S, de ecuaţie $z = f(x,y)$, se calculează cu formula:

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy.$$



Dacă $f(x,y)=1,(\forall)(x,y)\in D$, suprafaţa S va fi paralelă şi congruentă cu D, iar înălţimea h a cilindrului drept format va fi egală cu unitatea. Astfel, volumul cilindrului va fi: $V = aria(D)h = aria(D)\cdot 1 = aria(D)$.

Deducem de aici relaţia: $\iint_D dxdy = aria(D)$.

6.4. Calculul integralei duble

În general calulul integralelor duble se poate reduce la calculul unor integrale simple.

Teorema 6.1. Dacă $f : I = [a,b]\times[c,d]\to R$ este mărginită şi integrabilă pe *I* şi dacă pentru orice $x\in[a,b]$ există integrala $F(x)=\int_c^d f(x,y)dy$,iar $F(x)$ este integrabilă pe $[a,b]$, atunci:

$$\iint_I f(x,y)dxdy = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx.$$

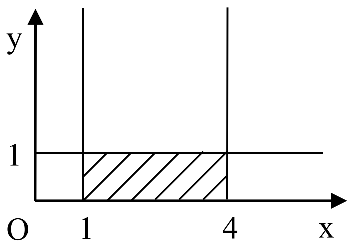
Observaţia 6.2. Dacă pentru orice $y\in[c,d]$ există integrala $F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$,iar $F(y)$ este integrabilă pe $[c,d]$, atunci:

$$\iint_I f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy .$$

Observaţia 6.3. Dacă $f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$, cu f_1, f_2 integrabile pe $[a,b]$, respectiv $[c,d]$, atunci $\iint_I f(x,y)dxdy = \int_a^b f_1(x)dx \cdot \int_c^d f_2(y)dy$ (integrala dublă se calculează ca un produs de integrale simple).

Exemple:

1. Să se calculeze $\iint_I (3+2x)(1+xy)dxdy,\ I = [1,4]\times[0,1]$.



Putem aplica şi teorema precedentă dar şi observaţia ce-i urmează. Calculăm integrala în ambele moduri.

Varianta 1- vom face mai întâi integrarea în raport cu variabila y şi apoi în raport cu variabila x (ca în teoremă).

Calculăm astfel pentru orice x din $[1,4]$ valoarea integralei $\int_0^1 (3+2x)(1+xy)dy$.

$$F(x) = \int_0^1 \left(3+3xy+2x+2x^2y\right)dy = \left(3y + x\frac{3y^2}{2} + 2xy + x^2y^2\right)\Bigg|_0^1 = .$$

$$= 3 + \frac{3x}{2} + 2x + x^2$$

F este integrabilă pe $[1,4]$, fiind o funcţie continuă pe acest interval.

Aplicând teorema precedentă deducem că:

$$\iint_I (3+2x)(1+xy)dxdy = \int_1^4 \left(3 + \frac{7x}{2} + x^2\right)dx = \left(3x + \frac{7x^2}{4} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^4 .$$

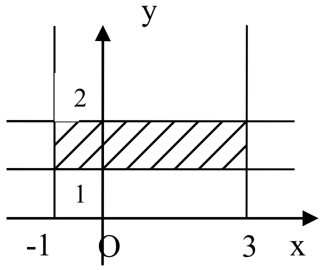
Astfel $\iint_I (3+2x)(1+xy)dxdy = \frac{225}{4}$.

Varianta 2 - schimbăm ordinea de integrare, integrând mai întâi în raport cu x, deci:

$$\iint_I (3+2x)(1+xy)dxdy = \int_0^1 \left(\int_1^4 \left(3+3xy+2x+2x^2y\right)dx \right) dy = \int_0^1 \left(24 + \frac{129}{2}y\right)dy =$$

$$= \left(24y + \frac{129}{4}y^2\right)\Bigg|_0^1 = \frac{225}{4}$$

1. Să se calculeze $\iint_I \left(1+x^2\right)(x+y)dxdy,\ I = [-1,3]\times[1,2]$.



Varianta 1- Integrăm în raport cu variabila y mai întâi, iar apoi în raport cu variabila *x*.

Calculăm astfel pentru orice *x* din $[-1,3]$ valoarea integralei $\int_1^2 (1+x^2)(x+y)dy$.

$$F(x)=(1+x^2)\int_1^2 (x+y)dy=(1+x^2)\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=(1+x^2)\left(x+\frac{3}{2}\right)=x^3+\frac{3}{2}x^2+x+\frac{3}{2}.$$

F fiind o funcție continuă este integrabilă pe $[-1,3]$.

Obținem:

$$\iint_I (1+x^2)(x+y)dxdy=\int_{-1}^{3}\left(x^3+\frac{3}{2}x^2+x+\frac{3}{2}\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{3}=44.$$

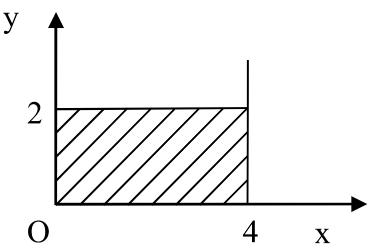
Astfel $\iint_I (1+x^2)(x+y)dxdy=44$.

Varianta 2 - schimbăm ordinea de integrare:

$$\iint_I (1+x^2)(x+y)dxdy=\int_1^2\left(\int_{-1}^{3}(x^3+x^2y+x+y)dx\right)dy=\int_1^2\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}y+\frac{x^2}{2}+xy\right)\Bigg|_{-1}^{3}dy=$$

$$=\int_1^2\left(20+\frac{28}{3}y+4+4y\right)\Bigg|dy=\int_1^2\left(24+\frac{40}{3}y\right)\Bigg|dy=\left(24y+\frac{20}{3}y^2\right)\Bigg|_1^2=44$$

3. Să se calculeze $\iint_I e^{2x+y}dxdy,\ I=[0,4]\times[0,2]$.

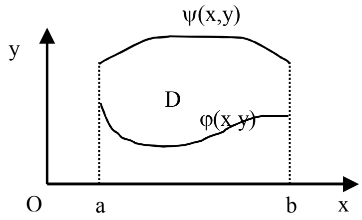


Observăm că $e^{2x+y}=e^{2x}\cdot e^y$.

Folosind ultima observaţie putem calcula integrala din enunţ ca pe un produs de două integrale simple. Avem astfel:

$$\iint_I e^{2x+y}dxdy=\int_0^4 e^{2x}dx\cdot\int_0^2 e^y dy=\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^4\cdot e^y\Big|_0^2=\frac{1}{2}(e^8-1)(e^2-1).$$

Definiţia 6.7. Dacă $D = \{(x,y) / a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$, şi φ, ψ sunt două funcţii continue pe $[a,b]$ astfel încât $\varphi(x) \langle \psi(x)$, $(\forall) x \in [a,b]$, spunem că *D* este un *domeniu simplu în raport cu axa Oy.*



Definiţia 6.8. Dacă $D = \{(x,y) / c \le y \le d,\ \varphi(y) \le x \le \psi(y)\}$, şi φ, ψ sunt două funcţii continue pe $[c,d]$ astfel încât $\varphi(y) \langle \psi(y)$, $(\forall) y \in [c,d]$, spunem că D este un *domeniu simplu în raport cu axa Ox.*

Teorema 6.2. (Descompunerea integralei duble în integrale simple)

Fie *f* o funcţie definită şi integrabilă pe domeniul *D* simplu în raport cu axa Oy. Dacă pentru orice $x \in [a,b]$ există integrala $F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$,iar $F(x)$ este integrabilă pe $[a,b]$, atunci:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right) dx .$$

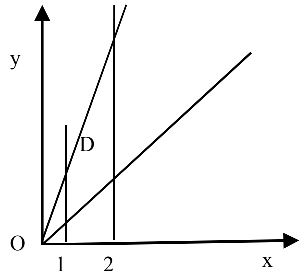
Observaţia 6.4. Analog, dacă *f* este o funcţie definită şi integrabilă pe domeniul D simplu în raport cu axa Ox, şi dacă pentru orice $y \in [c,d]$ există integrala $F(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx$, iar $F(y)$ este integrabilă pe $[c,d]$, atunci:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx \right) dy .$$

Observaţia 6.5. Dacă domeniul *D* nu este simplu în raport cu nici una din axe, atunci domeniul *D* se împarte în subdomenii simple în raport cu una din axe.

Exemple:

1. Să se calculeze $\iint_D (2x - 3y)dxdy$, unde *D* este domeniul din plan mărginit de dreptele $y = x,\ y = 3x,\ x = 1,\ x = 2$.

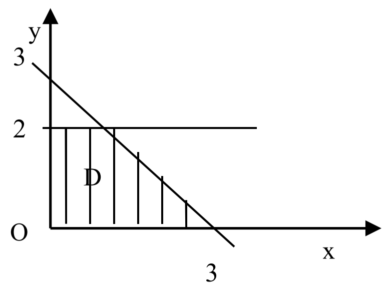


D poate fi definit astfel: $D = \{(x,y) / 1 \le x \le 2,\ x \le y \le 3x\}$, deci este simplu în raport cu axa Oy.

Astfel: $F:[1,2]\to R,\ F(x)=\int_x^{3x}(2x-3y)dy=\left(2xy-\frac{3}{2}y^2\right)\Big|_x^{3x}=-8x^2$, aceasta fiind integrabilă pe domeniul de definiţie.

Avem deci: $\iint_D(2x-3y)dxdy=\int_1^2-8x^2dx=-\frac{8}{3}x^3\Big|_1^2=-\frac{56}{3}$.

2. Să se calculeze $\iint_D\left(x+3y^2\right)dxdy$, unde D este domeniul din plan mărginit de dreptele $y=0,\ y=2,\ x=0,\ y=-x+3$.



Domeniul este simplu în raport cu axa Ox deci:

$$\iint_D\left(x+3y^2\right)dxdy=\int_0^2\left(\int_0^{3-y}\left(x+3y^2\right)dx\right)dy=\int_0^2\left(\frac{x^2}{2}+3y^2x\right)\Bigg|_0^{3-y}dy=$$

$$\int_0^2\left(-3y^3+\frac{19}{2}y^2-3y+\frac{9}{2}\right)dy=\left(-\frac{3y^4}{4}+\frac{19y^3}{6}-\frac{3}{2}y^2+\frac{9}{2}y\right)\Bigg|_0^2=\frac{49}{3}$$

6.5. Schimbarea de variabilă în integrala dublă

Fie D un domeniu mărginit de o curbă simplă închisă Γ, situat în planul xOy şi D' un domeniu mărginit de o curbă simplă închisă Γ', situat în planul $uO'v$, şi corespondenţa

$$\begin{cases}x=\alpha(u,v)\\ y=\beta(u,v)\end{cases},$$

cu $\alpha,\beta:D'\to R$, funcţii (bijective) care asociază fiecărui punct din D' un punct în D şi invers, realizând o corespondenţă biunivocă între cele două domenii. Această corespondenţă poartă numele de *transformare punctuală* (*biunivocă*), sau mai simplu *transformare*.

Definiţia 6.9. Transformarea se numeşte *regulată în punctul* (x_0,y_0) interior lui D', dacă funcţiile α şi β au derivate parţiale continue în acest punct, şi dacă determinantul, notat cu $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$, dat de relaţia:

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\alpha}{\partial u} & \frac{\partial\alpha}{\partial v}\\ \frac{\partial\beta}{\partial u} & \frac{\partial\beta}{\partial v}\end{vmatrix},$$

este nenul în punctul considerat.

Definiţia 6.10. $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ poartă numele de *jacobianul transformării.*

Definiţia 6.11. Corespondenţa dintre D' şi D se numeşte directă, dacă atunci când un punct se deplasează pe Γ' în sens trigonometric (direct), punctul corespunzător se deplasează pe Γ tot în sens trigonometric. În caz contrar corespondenţa se spune că e inversă.

Teorema 6.3. (Formula de schimbare de variabilă la integrala dublă)

Dacă funcţia f este continuă pe domeniul D mărginit de curba închisă Γ, şi transformarea $\begin{cases} x = \alpha(u,v) \\ y = \beta(u,v) \end{cases}$, $\alpha, \beta : D' \to R$ este regulată pe D', atunci are loc:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(\alpha(u,v),\beta(u,v))\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv .$$

Observăm că pentru a realiza corect o schimbare de variabilă trebuie să avem în vedere trei elemente:

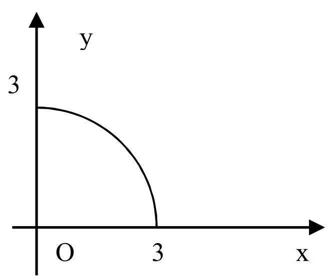
1.Faptul că vechiul domeniu D (parcurs de (x,y)) trebuie înlocuit cu noul domeniu pe care se va calcula integrala, și anume D', domeniul parcurs de noile variabile (u,v);

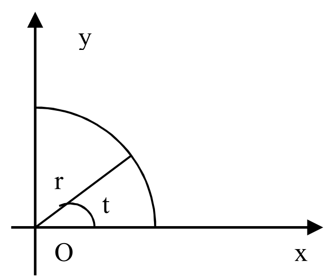
2.Faptul că integrandul trebuie să conțină numai noile variabile (vechile variabile se înlocuiesc peste tot cu noile expresii), formal $f(x,y)$ se înlocuiește cu $f(\alpha(u,v),\beta(u,v))$;

3.Faptul că integrarea se va face în raport cu noile variabile, ceea ce formal înseamnă că $dxdy$ trebuie substituit și el folosind relația: $dxdy = \left|\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv$.

Exemple:

1. Să se calculeze $\iint_D xydxdy$, unde D este un sfert de disc ce are centrul în origine şi raza 3.





Vom calcula această integrală utilizând trecerea de la coordonatele carteziene la cele polare, dată de transformarea de coordonate:

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}.$$

Pentru ca (x,y) să parcurgă domeniul D din enunţ trebuie ca $r \in [0,3], t \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Considerăm deci funcţiile $\alpha, \beta : D' = [0,3] \times \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right] \to R$ date de $\begin{cases} \alpha(r,t) = r\cos t \\ \beta(r,t) = r\sin t \end{cases}$.

Jacobianul acestei transformări este:

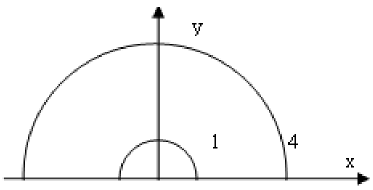
$$\frac{D(x,y)}{D(r,t)}=\begin{vmatrix}\cos t & -r\sin t\\ \sin t & r\cos t\end{vmatrix}=r\neq 0\text{, pentru toate punctele din }\overset{0}{D'}=(0,3)\times\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

Transformarea $\begin{cases}x=\alpha(r,t)=r\cos t\\ y=\beta(r,t)=r\sin t\end{cases}$ este deci o transformare regulată ce duce domeniul D în D' şi invers.

Aplicând formula de schimbare de variabilă în integrala dublă obţinem:

$$\iint_D xydxdy=\iint_{D'} r^2\sin t\cos t\cdot rdrdt=\int_0^3 r^3dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos tdt=\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^3\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2tdt=\frac{27}{4}\cdot\left.\frac{(-\cos 2t)}{4}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{27}{8}$$

2. Să se calculeze $\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy$, unde D este semicoroana circulară cuprinsă între cercurile cu centrele în origine şi de raze 1 şi 4.



Aceeaşi schimbare de variabile ca în exemplul precedent transformă domeniul D într-un interval bidimensional, $D'=[1,4]\times[0,\pi]$. Astfel avem:

$$\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy=\iint_{D'} e^{r^2}rdrdt=\int_1^4 e^{r^2}rdr\cdot\int_0^{\pi}dt=\pi\cdot\int_1^4 e^{r^2}\cdot\frac{2r}{2}dr=\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\left.e^{r^2}\right|_1^4=\frac{\pi}{2}\left(e^{16}-e^{1}\right).$$

6.6. Aplicaţii ale integralei duble

1. Calculul volumelor unor corpuri

V, volumul unui corp mărginit lateral de un cilindru cu generatoarele paralele cu axa Oz şi care are la bază domeniul D din planul xOy, iar superior este mărginit de suprafaţa de ecuaţie $z=f(x,y)$ se calculează astfel:

$$V=\iint_D f(x,y)dxdy$$

2. Calculul ariei unei suprafeţe plane

Aria unei suprafeţe plane D se poate calcula cu ajutorul integralei duble astfel:

$$aria(D)=\iint_D dxdy$$

3. Calculul masei unei plăci plane

Masa, notată cu M, a unei plăci plane, de densitate variabilă ρ, placă ce ocupă domeniul D, se calculează cu formula:

$$M=\iint_D \rho(x,y)dxdy.$$

4. Aflarea coordonatelor centrului de greutate al unei plăci plane omogene

Coordonatele lui G, centrul de greutate al unei plăci plane situată în planul xOy , ce ocupă domeniul D din acest plan, sunt date de relaţiile:

$$x_G = \frac{\iint\limits_D x dx dy}{\iint\limits_D dx dy}, \quad y_G = \frac{\iint\limits_D y dx dy}{\iint\limits_D dx dy}.$$

Dacă placa nu este omogenă ci prezintă o densitate variabilă ρ , avem formulele:

$$x_G = \frac{\iint\limits_D x\rho(x,y) dx dy}{\iint\limits_D \rho(x,y) dx dy}, \quad y_G = \frac{\iint\limits_D y\rho(x,y) dx dy}{\iint\limits_D \rho(x,y) dx dy}$$

5. Aflarea momentelor de inerţie pentru o placă plană omogenă

Considerând o placă situată în planul xOy, ce ocupă domeniul D din acest plan şi notând cu I_O, I_{Ox}, I_{Oy} momentele de inerţie în raport cu originea şi cu axele de coordonate Ox şi Oy avem relaţiile:

$$I_O = \iint\limits_D (x^2 + y^2) dx dy \; I_{Ox} = \iint\limits_D y^2 dx dy, \quad I_{Oy} = \iint\limits_D x^2 dx dy.$$

Dacă placa nu este omogenă ci prezintă o densitate variabilă ρ , avem formulele:

$$I_O = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\rho(x,y) dx dy, \; I_{Ox} = \iint\limits_D y^2\rho(x,y) dx dy, \; I_{Oy} = \iint\limits_D x^2\rho(x,y) dx dy.$$

Exemple:

1. Să se calculeze volumul unui paraboloid de rotaţie de înălţime h şi raza bazei R, ecuaţia unui astfel de paraboloid fiind $z = \frac{h}{R^2}(R^2 - x^2 - y^2)$.

Baza acestui paraboloid este un cerc de rază R, cu centrul în origine. Avem deci:

$$V = \iint\limits_D \frac{h}{R^2}(R^2 - x^2 - y^2) dx dy.$$

Trecând la coordonatele polare $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$, deducem că $r \in [0, R]$, $t \in [0, 2\pi]$.

Obţinem:

$$V = \frac{h}{R^2}\int_0^R (R^2 - r^2) r dr \cdot \int_0^{2\pi} dt = \frac{2\pi h}{R^2}\left(\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^R = \frac{\pi h R^2}{2}.$$

2. Să se regăsească formula pentru calculul ariei unui disc de rază R.

Notând cu D domeniul ocupat de disc şi cu A aria sa, avem relaţia:

$$A = \iint\limits_D dx dy.$$

Trecând la coordonatele polare obţinem:

$$A = \iint\limits_{D'} r dr dt = \int_0^{2\pi} dt \cdot \int_0^R r dr = 2\pi \cdot \frac{r^2}{2}\Bigg|_0^R = \pi R^2.$$

3. Să se afle poziţia centrului de greutate al unei plăci plane omogene având forma unui sfert de disc de rază *4*.

Folosind formulele de mai sus şi trecerea la coordonatele polare şi ţinând cont că pentru a parcurge un sfert de disc de rază R, $r \in [0,4]$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, avem:

$$x_G = \frac{\iint_D x dx dy}{\iint_D dx dy} = \frac{\int_0^4 r^2 dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt}{\frac{\pi 4^2}{4}} = \frac{1}{4\pi} \cdot \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^4 \cdot \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{3\pi},$$

$$y_G = \frac{\iint_D y dx dy}{\iint_D dx dy} = \frac{\int_0^4 r^2 dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt}{\frac{\pi 4^2}{4}} = \frac{1}{4\pi} \cdot \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^4 \cdot \left(-\cos t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{3\pi}.$$

Rezultatul confirmă faptul că centrul de greutate al plăcii se găseşte pe axa de simetrie a acesteia, care este prima bisectoare a axelor de coordonate.

4. Să se afle momentele de inerţie ale unei plăci plane dreptunghiulare de dimensiuni 2, 5, omogene, faţă de două din laturile sale.

Considerăm că deptunghiul are unul din vârfuri în originnea axelor de coordonate, lungimea $OA = 2$, iar lăţimea $OB = 5$. Astfel momentul de inerţie faţă de latura OA (situată pe axa Ox) este:

$$I_{OA} = \iint_D y^2 dx dy = \int_0^2 dx \cdot \int_0^5 y^2 dy = 2 \cdot \frac{5^3}{3} = \frac{375}{3}.$$

În mod analog găsim momentul de inerţie faţă de latura OB:

$$I_{OB} = \iint_D x^2 dx dy = 5 \cdot \frac{2^3}{3} = \frac{40}{3}.$$

Remarcăm că momentul de inerţie este mai mare faţă de latura de lungime mai mică.

6.7. Integrala triplă

Noţiunea de integrală (Riemann) se poate extinde şi pentru funcţii de trei sau mai multe variabile într-un mod analog modului de extindere pentru funcţii de două variabile.

Fie $f : D \subset R^3 \to R$ o funcţie mărginită definită pe un domeniu închis şi mărginit din spaţiu. Definiţiile enunţate pentru integralele duble rămân valabile şi pentru integralele triple înlocuind, acolo unde apar, ariile prin volume, şi ţinând cont că distanţa este în acest caz distanţa euclidiană din R^3.

Integrala triplă a funcţiei *f* pe domeniul *D* (limita şirului sumelor Riemann) se notează astfel:

$\iiint_D f(x,y,z) dx dy dz$, sau $\iiint_D f dv$, iar dacă nu apar confuzii $\int_D f dv$.

Rămân valabile şi criteriile de integrabilitate de la integrala dublă, cel mai important fiind următorul:

O funcţie continuă pe un domeniu închis este integrabilă pe acest domeniu.

Proprietăţile integralelor duble, adică: aditivitatea şi omogenitatea faţă de funcţii, aditivitatea faţă de domenii (aici presupunem că domeniul D este împărţit în două subdomenii D_1, D_2 printr-o suprafaţă de volum nul), monotonia şi formulele de medie, se păstrează şi în cazul integralelor triple, chiar sub aceeaşi formă, mai puţin formulele de medie, unde aria lui *D* e înlocuită cu volumul lui *D,* iar integralele duble cu cele triple.

6.8. Calculul integralelor triple

În cazul unei integrale triple, calculul se poate reduce la acela al unei integrale siple şi al unei integrale duble, sau la calculul a trei integrale simple.

În cele ce urmează vom presupune că toate integralele scrise există. În particular, acest lucru este asigurat impunând condiţia ca domeniile să fie închise şi funcţiile care intervin să fie continue.

Dacă $D = \{(x, y, z)/(x, y) \in \sigma,\ \varphi(x, y) \le z \le \psi(x, y)\}$, cu σ domeniu închis din planul xOy, de arie *S*, iar funcţiile φ, ψ definite şi continue pe σ, avem formula:

$$\iiint_D f(x, y, z)dxdydz = \iint_\sigma \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)dz \right) dxdy .$$

Dacă domeniul σ este, de exemplu, simplu în raport cu Oy, adică

$\sigma = \{(x, y)/\, a \le x \le b,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$, cu α, β funcţii continue pe $[a, b]$, putem scrie:

$$\iiint_D f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)dz \right) dy \right) dx .$$

Dacă domeniul σ este, de exemplu, simplu în raport cu Ox, adică

$\sigma = \{(x, y)/\, c \le y \le d,\ \alpha(y) \le x \le \beta(y)\}$, cu α, β funcţii continue pe $[c, d]$, putem scrie:

$$\iiint_D f(x, y, z)dxdydz = \int_c^d \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)dz \right) dx \right) dy .$$

Se pot scrie şi alte formule pentru cazurile în care ordinea de integrare este alta.

6.9. Schimbarea de variabilă în integrala triplă

Dacă $\begin{cases} x = \alpha(u, v, w) \\ y = \beta(u, v, w) \\ z = \gamma(u, v, w) \end{cases}$; $\quad (u, v, w) \in \Omega;\quad \alpha, \beta, \gamma \in C^1(\Omega);\quad \dfrac{D(\alpha, \beta, \gamma)}{D(u, v, w)} \ne 0$, atunci:

$$\iiint_D f(x, y, z)dxdydz = \iiint_\Omega f(\alpha(u, v, w), \beta(u, v, w), \gamma(u, v, w)) \cdot \left| \frac{D(\alpha, \beta, \gamma)}{D(u, v, w)} \right| dudvdw .$$

Cazuri importante de schimbări de variabilă

3. Coordonate sferice

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \sin\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases};\quad \rho \ge 0,\ \theta \in [0, 2\pi],\ \varphi \in [0, \pi];\quad \left| \frac{D(\alpha, \beta, \gamma)}{D(u, v, w)} \right| = \rho^2 \sin\varphi$$

3. Coordonate sferice geenralizate

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = b\rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = c\rho\cos\varphi \end{cases}; \quad \rho \ge 0,\ \theta \in [0,2\pi],\ \varphi \in [0,\pi]; \quad \left|\frac{D(\alpha,\beta,\gamma)}{D(u,v,w)}\right| = abc\rho^2 \sin\varphi$$

3. Coordonate cilindrice

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}; \quad \rho \ge 0,\ \theta \in [0,2\pi],\ z \in [h,H]; \quad \left|\frac{D(\alpha,\beta,\gamma)}{D(u,v,w)}\right| = \rho$$

Exemple:

1. Să se calculeze $\iiint_I (xy+3)dxdydz,\ I = [0,1]\times[2,4]\times[1,2]$.

Domeniul pe care se calulează integrala este un paralelipiped dreptunghic, de diemnsiuni: 1,2,1. Putem integra astfel în ordinea în care dorim.

Varianta 1. Putem scrie deci:

$$\iiint_I (xy+3)dxdydz = \int_0^1\left(\int_2^4\left(\int_1^2 (xy+3)dz\right)dy\right)dx = \int_0^1\left(\int_2^4\left((xy+3)\int_1^2 dz\right)dy\right)dx = \int_0^1\left(\int_2^4\left((xy+3)(z)\Big|_1^2\right)dy\right)dx =$$

$$= \int_0^1\left(\int_2^4((xy+3))dy\right)dx = \int_0^1\left(x\frac{y^2}{2}+3y\right)\Bigg|_2^4 dx = \int_0^1 (6x+6)dx = (3x^2+6x)\Big|_0^1 = 9$$

Varianta 2.

Vom calcula integrala schimbând ordinea în raport cu care facem integrarea.

Astfel putem scrie:

$$\iiint_I (xy+3)dxdydz = \int_1^2\left(\int_2^4\left(\int_0^1 (xy+3)dx\right)dy\right)dz = \int_1^2\left(\int_2^4\left(y\frac{x^2}{2}+3x\right)\Bigg|_0^1 dy\right)dx = \int_1^2\left(\int_2^4\left(\frac{y}{2}+3\right)dy\right)dx =$$

$$= \int_1^2\left(\left(\frac{y^2}{4}+3y\right)\Bigg|_2^4\right)dx = \int_1^2 (3+6)dx = 9x\Big|_1^2 = 9$$

2. Să se calculeze $\iiint_D 5zdxdydz$, unde D este un fert de sferă de rază unitară.

Varianta 1.

Putem reprezenta domeniul D astfel:

$$D = \{(x,y,z)/\, x^2+y^2+z^2 = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\} = \\ = \{(x,y,z)/\, x \in [0,1],\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2},\ 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\}.$$

Astfel avem:

$$\iiint_D 5zdxdydz = \int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 5zdz\right)dy\right)dx = \frac{5}{3}\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}\,dx\,.$$

Calulăm integrala rămasă făcând schimbarea de variabilă: $x = \cos t \Rightarrow t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ dx = -\sin t dt$.

Obţinem:

$$\int_0^1 \sqrt{\left(1-x^2\right)^3}\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^4 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - 2\cos 2t + \cos^2 2t\right) dt =$$

$$= \frac{1}{4}\left(t - \sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2t dt = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \cos 4t\right) dt = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{8} t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\sin 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{16}.$$

Deducem că:

$$\iiint_D 5z dx dy dz = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 5z dz \right) dy \right) dx = \frac{5}{3}\cdot\frac{3\pi}{16} = \frac{5\pi}{16}$$

Astfel integrala din enunţ are valoarea $\frac{5\pi}{16}$.

Varianta 2.

Pentru a calcula integrala precedentă putem folosi schimbarea de variabilă în integrala triplă, trecând la coordonatele sferice:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases};\quad \rho \in [0,1],\ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right];\quad \left|\frac{D(\alpha,\beta,\gamma)}{D(u,v,w)}\right| = \rho^2 \sin\varphi$$

Astfel avem:

$$\iiint_D 5z dx dy dz = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 5\rho\cos\varphi\rho^2 \sin\varphi d\varphi \right) d\theta \right) d\rho = \frac{5}{2}\int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi = .$$

$$= \frac{5}{2}\left(\frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_0^1 \left(\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{5\pi}{16}.$$

6.10. Aplicaţii ale integralelor triple

1. Calculul volumelor corpurilor

Calculul volumului unui corp, volum notat cu V, ce ocupă în spaţiu domeniul D se face cu formula:

$$V = \iiint_D dx dy dz.$$

2. Aflarea masei unui corp

Masa unui corp de densitate variabilă $\mu(x, y, z)$ ce ocupă domeniul D din spaţiu se calculează cu formula:

$$M = \iiint_D \mu(x, y, z) dx dy dz.$$

3. Aflarea coordonatelor centrului de greutate

Coordonatele centrului de greutate, G, pentru un corp omogen ce ocupă domeniul *D* din spaţiu se află cu formulele:

$$x_G = \frac{\iiint_D x\,dxdydz}{V}, \quad y_G = \frac{\iiint_D y\,dxdydz}{V}, \quad z_G = \frac{\iiint_D z\,dxdydz}{V}.$$

Pentru corpurile neomogene a căror densitate este $\mu(x,y,z)$ avem:

$$x_G = \frac{\iiint_D x\mu(x,y,z)dxdydz}{M}, \quad y_G = \frac{\iiint_D y\mu(x,y,z)dxdydz}{M}, z_G = \frac{\iiint_D z\mu(x,y,z)dxdydz}{M}.$$

4. Aflarea momentelor de inerţie

Momentele de inerţie în raport cu axele Ox, Oy, Oz, în raport cu planele xOy, xOz, yOz, şi în raport cu originea O, pentru un corp omogen ce ocupă domeniul *D* din spaţiu, se calculează astfel:

$$I_{Ox} = \iiint_D (y^2+z^2)dxdydz, \ I_{Oy} = \iiint_D (x^2+z^2)dxdydz, \ I_{Oz} = \iiint_D (y^2+x^2)dxdydz,$$

$$I_{xOy} = \iiint_D z^2 dxdydz, \quad I_{xOz} = \iiint_D y^2 dxdydz, \quad I_{yOz} = \iiint_D x^2 dxdydz,$$

$$I_O = \iiint_D (x^2+y^2+z^2)dxdydz.$$

În cazul unui corp neomogen de densitate μ, momentele de inerţie se calculează analog flosind formulele:

$$I_{Ox} = \iiint_D (y^2+z^2)\mu(x,y,z)dxdydz, \ I_{Oy} = \iiint_D (x^2+z^2)\mu(x,y,z)dxdydz,$$

$$I_{Oz} = \iiint_D (y^2+x^2)\mu(x,y,z)dxdydz,$$

$$I_{xOy} = \iiint_D z^2\mu(x,y,z)dxdydz, \ I_{xOz} = \iiint_D y^2\mu(x,y,z)dxdydz, \quad I_{yOz} = \iiint_D x^2\mu(x,y,z)dxdydz,$$

$$I_O = \iiint_D (x^2+y^2+z^2)\mu(x,y,z)dxdydz.$$

5. Calcularea potenţialului newtonian sau gravitaţional al unui corp

Potenţialul newtonian sau gravitaţional al unui corp *D* omogen, sau neomogen (având densitatea μ), în punctul $M(x_0, y_0, z_0)$, este dat de formula:

$$U(x_0,y_0,z_0) = \iiint_D \frac{\mu(x,y,z)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}dxdydz.$$

Exemple:

1. Să se calculeze volumul unui corp ce ocupă în spaţiu domeniul D mărginit de planele: *xOz*, *yOz*, *z*=0, *z*=6, x+2y=4.

Aplicăm formula: $V = \iiint_D dxdydz$.

Observăm că putem scrie: $D=\{(x,y,z)/(x,y)\in\sigma, 0\le z\le 6\}$, cu σ domeniu închis din planul xOy, mărginit de axele Ox, Oy și de dreapta x+2y=4. Observăm că el este un triunghi dreptunghic de catete: 4, respectiv 2. Astfel σ are aria $S=\frac{4\cdot 2}{2}=4$.

Obținem deci:

$$\iiint_D dxdydz=\iint_\sigma\left(\int_0^6 dz\right)dxdy=\left(\int_0^6 dz\right)\iint_\sigma dxdy=z\Big|_0^6 S=6\cdot 4=24.$$

Observăm că D reprezintă o prismă dreaptă triunghiulară, ce are înălțimea egală cu 6 um și baza un triunghi dreptunghic de catete 2 um și 4 um.

3. Să se calculeze masa unui corp ce ocupă în spaţiu domeniul D mărginit de planele: *xOz*, *yOz*, *z*=1, *z*=5, 2x+y=6, ştiind că densitatea este direct proporțională cu z, factorul de proporționalitate fiind 4.

Corpul are densitatea variabilă $\mu(x,y,z)=4z$

Aplicăm formula: $M=\iiint_D \mu(x,y,z)dxdydz \Rightarrow M=\iiint_D 4zdxdydz$.

Observăm că putem scrie: $D=\{(x,y,z)/(x,y)\in\sigma, 1\le z\le 5\}$, cu σ domeniu închis din planul xOy, mărginit de axele Ox, Oy și de dreapta 2x+y=6. Observăm că σ este un triunghi dreptunghic de catete: 3, respectiv 6. Astfel σ are aria $S=\frac{3\cdot 6}{2}=9$.

Obținem deci:

$$\iiint_D 4zdxdydz=\iint_\sigma\left(\int_1^5 4zdz\right)dxdy=\left(\int_1^5 4zdz\right)\iint_\sigma dxdy=2z^2\Big|_1^5 S=2\cdot 24\cdot 9=432.$$

3. Să se afle abscisa centrului de greutate, G, pentru un corp omogen mărginit de domeniul *D* (porțiune dintr-un elipsoid):

$$\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{16}=1,\quad y\ge 0$$

Abscisa centrului de greutate, pentru un corp omogen, se află cu formula:

$$x_G=\frac{\iiint_D xdxdydz}{\iiint_D dxdydz}.$$

Vom folosi coordonatele sferice generalizate pentru calculul integralelor triple din formulă:

$$\begin{cases}x=2\rho\cos\theta\sin\varphi\\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi\\ z=4\rho\cos\varphi\end{cases};\quad \rho\in[0,1],\ \theta\in[0,\pi],\ \varphi\in[0,\pi];\quad \left|\frac{D(\alpha,\beta,\gamma)}{D(u,v,w)}\right|=8\rho^2\sin\varphi$$

$$\iiint_D xdxdydz=\int_0^1\int_0^\pi\int_0^\pi 2\rho\cos\theta\sin\varphi\cdot 8\rho^2\sin\varphi d\rho d\theta d\varphi$$

VII. ELEMENTE DE TEORIA CÂMPURILOR

7.1. Vectori liberi. Expresii analitice ale operaţiilor cu vectori (recapitulare)

În studiul ştiinţelor naturii apar trei tipuri de mărimi: scalare, vectoriale, extensive (tensoriale). Mai des întâlnite sunt primele două tipuri de mărimi.

Mărimile scalare sunt bine determinate prin cunoaşterea unui singur număr real care exprimă în ce raport se găsesc ele faţă de o unitate de măsură aleasă ca etalon (alegerea fiind convenţională).

Exemple de mărimi scalare: lungimea, aria, volumul, masa, densitatea, lucrul mecanic, temperatura, energia potenţială, energia cinetică, etc..

Spre deosebire de acestea, mărimile vectoriale, pentru a fi bine determinate, au nevoie nu numai de măsura intensităţii lor ci şi de alte elemente (origine, direcţie, sens). Ele se reprezintă prin vectori.

Definiţia 7.1. Numim *vector* un segment de dreaptă orientat.

Elementele caracteristice ale unui vector sunt:

1. direcţie- dată de dreapta suport
2. sens –dat de modul de parcurgere a segmentului
3. mărime (sau modul) –dată de lungimea egmentului
4. origine

Notaţia folosită pentru a desemna un vector este: $\overline{AB}$, unde A este originea, B poartă numele de extremitate (sensul de parcurs fiind de la A la B). Mărimea vectorului se notează cu $\left\|\overline{AB}\right\|$.

Vectorii mai pot fi notaţi pentru simplitate cu o singură literă astfel: $\overline{a}, \overline{v}_1, \overline{V}_2, ...$

Exemple de mărimi vectoriale: forţa, viteza, acceleraţia, etc.

Un vector cu mărimea egală cu unitatea poartă numele de vector unitar.

Vectorul pentru care extremitatea coincide cu originea se numeşte vector nul. Mărimea sa este deci zero, direcţia şi sensul fiind nedeterminate. El se notează cu $\overline{0}$.

Clasificarea vectorilor

Vectorii se împart în trei mari categorii:

1. Legaţi - au originea într-un punct fix din spaţiu; de exemplu viteza unui punct material în mişcarea pe traiectorie.
2. Alunecători - originea se poate deplasa în lungul dreptei suport; de exemplu forţa care acţionează asupra unui solid rigid, deoarece punctul de aplicaţie al acesteia poate fi situat oriunde pe dreapta suport, efectul este acelaşi.
3. Liberi- originea poate fi situată oriunde în spaţiu.

Definiţia 7.2. Doi *vectori sunt egali* dacă au aceeaşi, direcţie, acelaşi sens şi acelaşi modul. În cazul vectorilor legaţi ei trebuie să aibă şi aceeaşi origine. .

Definiţia 7.3. Doi vectori se numesc *paraleli* dacă au aceeaşi direcţie.

Definiţia 7.4. Doi vectori se numesc *coliniari* dacă au ca suport aceeaşi dreaptă.

Observaţia 7.1. Pentru cazul vectorilor liberi cele două noţiuni coincid (a spune că doi vectori sunt paraleli este echivalent cu a spune că sunt coliniari).

Definiţia 7.5. Doi vectori se numesc *echipolenţi* dacă au aceeaşi direcţie, acelaşi sens şi acelaşi modul, cu alte cuvinte dacă pot fi suprapuşi printr-o mişcare de translaţie.

Observaţia 7.2. Pentru cazul vectorilor liberi noţiunea de echipolenţă este echivalentă cu cea de egalitate.

Definiţia 7.6. Doi vectori se numesc *opuşi* dacă au aceeaşi direcţie, acelaşi modul şi sensuri diferite. În cazul vectorilor legaţi ei trebuie să aibă şi aceeaşi origine.

Opusul unui vector $\overline{v}$ se notează $-\overline{v}$.

Vectorii liberi sunt cei mai des utilizaţi şi în cele ce urmează, dacă nu se specifică, vectorii cu care operăm vor fi consideraţi vectori liberi.

Precizăm de asemenea că dacă avem mai mulţi vectori liberi ei pot fi aduşi astfel încât să aibă aceeaşi origine.

Operaţii cu vectori

Definiţia 7.7. (Regula paralelogramului) Fie $\overline{V_1}$ şi $\overline{V_2}$ doi vectori daţi, pe care-i considerăm ca având originea în punctul *O*. Se numeşte *sumă* a vectorilor $\overline{V_1}$ şi $\overline{V_2}$, vectorul $\overline{OA}$, unde *A* este vârful opus lui *O* în paralelogramul construit cu ajutorul celor doi vectori (fig.1). Notaţia folosită este cea obişnuită pentru adunare:

$$\overline{V_1} + \overline{V_2} = \overline{OA}$$

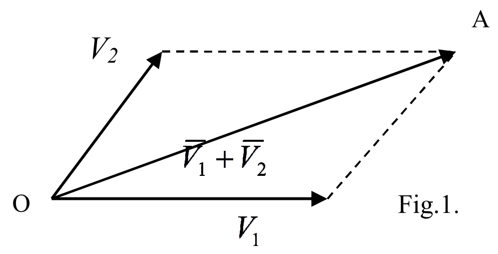


Fig.1.

Definiţia 7.8. (Regula liniei poligonale închise) Se numeşte *sumă* a vectorilor $\overline{V}_1$ şi $\overline{V}_2$, vectorul $\overline{OA}$, unde O este originea primului vector, iar A este extremitatea celui de-al doilea, acesta din urmă având originea în extremitatea primului (fig.2.).

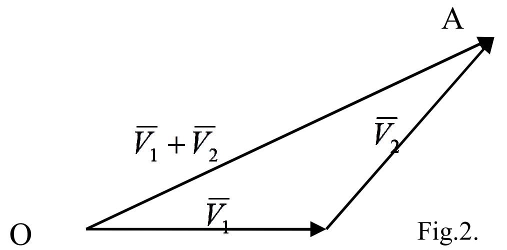


Fig.2.

Această regulă este echivalentă cu regula paralelogramului, dar prezintă avantajul că poate fi uşor aplicată cazului în care avem de făcut suma a *n* vectori $n \geq 2, n \in N$.

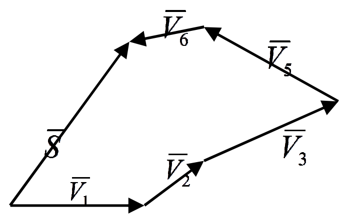


Fig.3.

$$\overline{S} = \sum_{i=1}^{6} \overline{V}_i .$$

Propoziția 7.1. Adunarea vectorilor are următoarele proprietăți

1. $\overline{V}_1 + \overline{V}_2 = \overline{V}_2 + \overline{V}_1$ (comutativitate).

2. $\left(\overline{V}_1 + \overline{V}_2\right) + V_3 = \overline{V}_1 + \left(\overline{V}_2 + \overline{V}_3\right)$ (asociativitate).

3. $\overline{V}_1 + \overline{0} = \overline{V}_1$

4. $\overline{V}_1 + \left(-\overline{V}_1\right) = \overline{0}$

Definiţia 7.9. *Diferenţa* dintre vectorii $\overline{V}_1$ şi $\overline{V}_2$ este un vector, $\overline{V}$, ce reprezintă de fapt suma dintre primul vector şi opusul celui de-al doilea: $\overline{V} = \overline{V}_1 - \overline{V}_2 = \overline{V}_1 + \left(-\overline{V}_2\right)$.

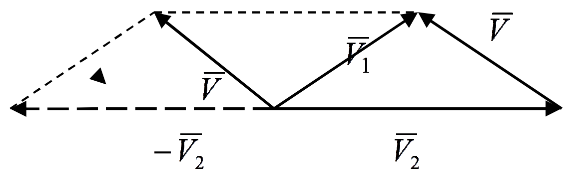


Fig. 4.

Se observă că vectorul diferenţă are originea în extremitatea scăzătorului şi extremitatea în cea a descăzutului.

Definiţia 7.10. Se numeşte *produs dintre scalarul a şi vectorul* $\overline{V}$ un alt vector, notat $a\overline{V}$, care are aceeaşi direcţie cu vectorul dat, acelaşi sens sau sens opus cu $\overline{V}$ după cum a este strict pozitiv, sau strict negativ, iar modulul este dat de relaţia: $\|a\overline{V}\| = |a|\|\overline{V}\|$

Observaţia 7.4. Prin înmulţirea unui scalar nul cu orice vector se obţine vectorul nul.

Propoziția 7.2. Înmulțirea vectorilor cu scalari are următoarele proprietăți:

1. $(a+b)\overline{V} = a\overline{V} + b\overline{V}$ (este distributivă faţă de adunarea scalarilor).
2. $a(\overline{V}_1 + \overline{V}_2) = a\overline{V}_1 + a\overline{V}_2$ (este distributivă faţă de adunarea vectorilor).
3. $a(b\overline{V}) = (ab)\overline{V}$.

Definiţia 7.11. Se numeşte *versor* al unui vector un vector unitar care are aceeaşi direcţie şi acelaşi sens cu vectorul dat._Versorul vectorului $\overline{V}$ se notează cu $vers\overline{V}$ şi este dat de relaţia: $vers\overline{V} = \dfrac{\overline{V}}{\|\overline{V}\|}$.

Descompunerea unui vector după două direcţii concurente din plan

Fie d_1, d_2 două direcţii în plan ce se intersectează în punctul *O*. Considerăm vectorul dat, $\overline{V}$, situat în planul celor două direcţii, având originea în *O* şi extremitatea în punctul *A* (Fig.5). Din *A* se duc paralele la d_1 şi d_2 şi se notează cu A_1, A_2 punctele de intersecţie.

Avem relaţia: $\overline{V} = \overline{OA} = \overline{OA_1} + \overline{OA_2}$. Vectorii $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}$ se numesc componentele vectoriale ale vectorului dat faţă de direcţiile d_1, d_2.

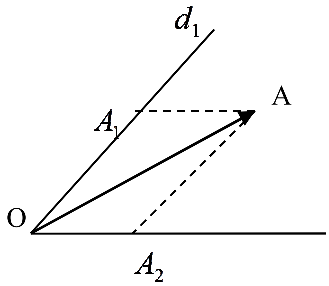


Fig.5.

Descompunerea unui vector după trei direcţii concurente necoplanare.

Fie d_1, d_2, d_3 cele trei direcţii concurente în *O* şi $\overline{V}$ vectorul dat, având originea în punctul *O* (fig.6).

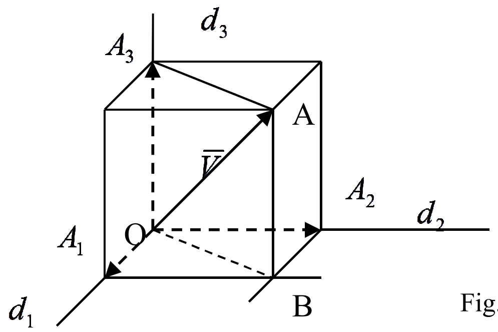


Fig. 6.

Din extremitatea *A* a vectorului dat, ducem o paralelă la dreapta d_3 până când aceasta intersectează planul format de d_1, d_2 în *B*. Din *B* ducem apoi paralele la d_1, d_2 şi notăm cu A_2, A_1 aceste intersecţii, iar din *A* ducem o paralelă la *OB* şi notăm cu A_3 intersecţia ei cu d_3.

Notând $\overline{V_1} = \overline{OA_1}, \overline{V_2} = \overline{OA_2}, \overline{V_3} = \overline{OA_3}$, obţinem:

$$\overline{V} = \overline{V_1} + \overline{V_2} + \overline{V_3},$$

iar $\overline{V_1}, \overline{V_2}, \overline{V_3}$ poartă numele de componentele vectorului dat după cele trei direcţii.

Propoziţia 7.3. Dacă vectorii $\overline{V_1}, \overline{V_2}$ sunt coliniari atunci între ei există relaţia $\alpha\overline{V_1} + \beta\overline{V_2} = \overline{0}$, cu $\alpha, \beta \in R^*$.

Observaţia 7.5. Doi vectori $\overline{V_1}, \overline{V_2}$ sunt coliniari dacă şi numai dacă există un scalar $a \in R^*$ astfel încât $\overline{V_1} = a\overline{V_2}$.

Proiecţia unui vector pe o axă

Prin axă înţelegem o dreaptă pe care s-a stabilit un sens pozitiv de parcurgere a punctelor sale. Vectorial o axă este caracterizată de un versor.

Definiţia 7.12. Numim *unghi* a doi vectori $\overline{V}_1, \overline{V}_2$ unghiul din intervalul $[0, \pi]$ format de sensurile lor pozitive, pe care-l notăm prin $\left(\overline{V}_1, \overline{V}_2\right)$.

Considerăm un vector $\overline{AB} = \overline{V}$ şi o axă *D*, de versor $\overline{u}$

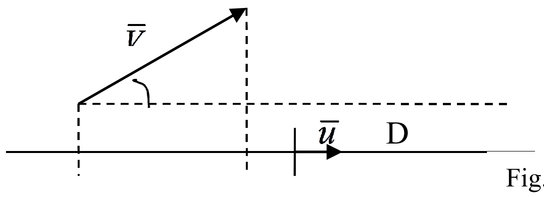


Fig.7.

Definiţia 7.13. Numim *proiecţie a vectorului* $\overline{V}$ *pe axa D* un scalar egal cu produsul dintre modulul vectorului considerat şi cosinusul unghiului format de acest vector cu axa *D*. Notăm:

$$pr_D\overline{V} = \left\|\overline{V}\right\| \cos\left(\overline{V}, D\right) \text{ sau } pr_{\overline{u}}\overline{V} = \left\|\overline{V}\right\| \cos\left(\overline{V}, \overline{u}\right).$$

Se observă că proiecţia unui vector pe o axă este un scalar pozitiv sau negativ, după cum unghiul dintre vector şi versorul axei este în primul sau al doilea cadran (ascuţit sau obtuz).

Expresia analitică a vectorilor

Să considerăm trei drepte D_1, D_2, D_3, concurente într-un punct *O*, şi ortogonale două câte două. Orientăm aceste trei drepte cu ajutorul versorilor $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ astfel încât triedul $O\left(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\right)$ să fie direct, adică un observator situat de-a lungul versorului $\overline{k}$, cu capul în sensul lui $\overline{k}$ să observa suprapunerea versorului $\overline{i}$ peste $\overline{j}$ de la dreapta spre stânga după un unghi de 90°. Figura geometrică astfel construită se numeşte reper cartezian ortogonal, iar axele se notează de obicei cu *Ox*, *Oy*, *Oz*.

Să considerăm un punct *M* în spaţiu.

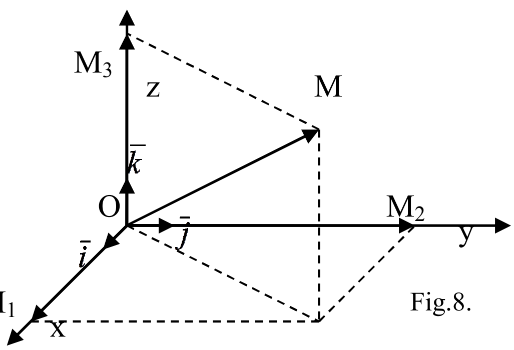


Fig.8.

Vectorul $\overline{OM}$ se numeşte vector de poziţie al punctului *M*. Descompunem acest vector după direcţiile axelor *Ox*, *Oy*, *Oz*. Astfel obţinem:

$$\overline{OM} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2} + \overline{OM_3}\ .$$

Vectorii $\overline{OM_1}, \overline{OM_2}, \overline{OM_3}$ poartă numele de *componentele vectoriale ale vectorului* $\overline{OM}$.

După cum se observă imediat vectorii ce reprezintă componentele vectorului de poziţie al lui *M* faţă de cele trei direcţii sunt coliniari cu versorii acestora. Astfel există scalarii x, y, z astfel încât $\overline{OM_1} = x\bar{i}$, $\overline{OM_2} = y\bar{j}$, $\overline{OM_3} = z\bar{k}$ şi deci

$$\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}\ .$$

Definiţia 7.14. Scalarii care apar poartă numele de *componentele sau coordonatele scalare ale vectorului* $\overline{OM}$.

O notaţie echivalentă pentru vectorul $\overline{OM}$ este aceea care precizează doar componentele scalare ale vectorului, adică: $\overline{OM}(x, y, z)$

Relaţia $\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ poartă numele de *expresia analitică a vectorului* $\overline{OM}$. Scalarii *x,y,z* se numesc *coordonatele carteziene* ale punctului *M*; *x* poartă numele de *abscisă, y* se numeşte *ordonata* iar *z cota* punctului *M*. Fiecărui punct din spaţiu îi corespunde în mod unic un triplet (ordonat) de numere reale, coodonate carteziene ale sale, şi reciproc.

Considerăm acum un vector oarecare determinat de coordonatele extremităţilor sale $A(x_1, y_1, z_1)$(origine), şi $B(x_2, y_2, z_2)$.

Avem: $\overline{V} = \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$. Dar $\overline{OA} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$, iar $\overline{OB} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$, astfel că obţinem:

$$\overline{V} = \overline{OB} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}\ .$$

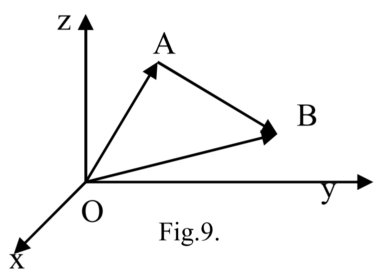


Fig.9.

Scalarii $(x_2 - x_1)$, $(y_2 - y_1)$, $(z_2 - z_1)$ se numesc componentele scalare ale vectorului $\overline{AB}$.

Transcrierea analitică a operaţiilor studiate.

Considerăm doi vectori daţi prin expresiile lor analitice:

$$\overline{V_1} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k} \text{ şi } \overline{V_2} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}.$$

$\overline{V_1} = \overline{V_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$;

$a\overline{V_1} = ax_1\bar{i} + ay_1\bar{j} + az_1\bar{k}$.

$\overline{V} = \overline{V_1} + \overline{V_2}$, are expresia analitică: $\overline{V} = (x_1 + x_2)\bar{i} + (y_1 + y_2)\bar{j} + (z_1 + z_2)\bar{k}$.

În cazul sumei a *n* vectori avem relaţia: $\overline{V} = \sum_{m=1}^{n} \overline{V_m} = \left(\sum_{m=1}^{n} x_m\right)\bar{i} + \left(\sum_{m=1}^{n} y_m\right)\bar{j} + \left(\sum_{m=1}^{n} z_m\right)\bar{k}$.

$\overline{V} = \overline{V_1} - \overline{V_2}$, avem expresia analitică: $\overline{V} = (x_1 - x_2)\bar{i} + (y_1 - y_2)\bar{j} + (z_1 - z_2)\bar{k}$.

Observaţia 7.6. Doi vectori $\overline{V_1}, \overline{V_2}$ sunt paraleli (coliniari) dacă şi numai dacă $\exists \alpha \in R$ astfel încât:

$$\overline{V_1} = \alpha\overline{V_2} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Produsul scalar

Definiţia 7.14. Se numeşte *produsul scalar* a doi vectori $\overline{V_1}, \overline{V_2}$, un scalar notat $\overline{V_1} \cdot \overline{V_2}$, egal cu produsul dintre modulele celor doi vectori şi cosinusul unghiuli format de aceştia, adică

$$\overline{V_1} \cdot \overline{V_2} = \left\|\overline{V_1}\right\| \left\|\overline{V_2}\right\| \cos\left(\overline{V_1}, \overline{V_2}\right).$$

În cazul particular al vectorilor egali obţinem: $\left\|\overline{V}\right\| = \sqrt{\overline{V} \cdot \overline{V}}$.

Propoziţia 7.4. Produsul scalar a doi vectori are următoarele proprietăţi:

1.Produsul scalar este nul în următoarele situaţi:

a) Dacă cel puţin unul dintre vectori este vectorul nul

b) Când vectorii, fiind nenuli, sunt ortogonali, deoarece în acest caz cosinusul unghiului dintre ei este egal cu zero.

De aici putem deduce următoarea propoziţie: condiţia necesară şi suficientă ca doi vectori nenuli să fie ortogonali este ca produsul lor scalar să fie nul.

2. Produsul scalar a doi vectori este egal cu produsul dintre modulul unui vector şi proiecţia celuilalt pe el, adică:

$$\overline{V}_1 \cdot \overline{V}_2 = \left\|\overline{V}_1\right\|\left(pr_{\overline{V}_1}\overline{V}_2\right), \text{ sau schimbând rolurile vectorilor }, \overline{V}_1 \cdot \overline{V}_2 = \left\|\overline{V}_2\right\|\left(pr_{V_2}\overline{V}_1\right).$$

3. Proiecţia unui vector pe o axă este egală cu produsul scalar dintre vectorul dat şi versorul axei.

4. Este comutativ, adică $\overline{V}_1 \cdot \overline{V}_2 = \overline{V}_2 \cdot \overline{V}_1$.

5. Este distributiv faţă de adunarea vectorilor, adică:

$$\overline{V}_1 \cdot \left(\overline{V}_2 + \overline{V}_3\right) = \overline{V}_1 \cdot \overline{V}_2 + \overline{V}_1 \cdot \overline{V}_3 .$$

6. Dacă a, b sunt scalari, avem: $\left(a\overline{V}_1\right)\cdot\left(b\overline{V}_2\right) = (ab)\left(\overline{V}_1 \cdot \overline{V}_2\right)$.

Observăm că avem următoarele relaţii:

$$\bar{i}\cdot\bar{i} = \bar{j}\cdot\bar{j} = \bar{k}\cdot\bar{k} = 1 \qquad \bar{i}\cdot\bar{j} = \bar{j}\cdot\bar{k} = \bar{k}\cdot\bar{i} = 0$$

Considerăm $\overline{V}_1 = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$ şi $\overline{V}_2 = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$.

Expresia analitică a produsului scalar este:

$$\overline{V}_1 \cdot \overline{V}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 .$$

În cazul particular al vectorilor egali obţinem:

$$\overline{V}\cdot\overline{V} = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \left\|\overline{V}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} .$$

Deducem formula cu ajutorul căreia putem calcula cosinusul unghiului format de doi vectori (direcţii) şi apoi expresia analitică a sa. Avem:

$$\cos\left(\overline{V}_1, \overline{V}_2\right) = \frac{\overline{V}_1 \cdot \overline{V}_2}{\left\|\overline{V}_1\right\|\left\|\overline{V}_2\right\|} \Rightarrow$$

$$\cos\left(\overline{V}_1, \overline{V}_2\right) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} .$$

Observaţia 7.7. O condiţie necesară şi suficientă ca doi vectori să fie ortogonali este:

$$\overline{V}_1 \perp \overline{V}_2 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0 .$$

Definiţia 7.15. Cosinusurile unghiurilor pe care le face un vector cu axele reperului cartezian poart numele de *cosinusurile directoare* al vectorului considerat.

Notând cu α, β, γ unghiurile pe care le face $\overline{V} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ cu axele de coordonate, atunci:

$$\cos\alpha = \cos\left(V, \bar{i}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \qquad \cos\beta = \cos\left(V, \bar{j}\right) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos\gamma = \cos(\overline{V}, \overline{k}) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Expresia analitică a versorului lui $\overline{V}$ este:

$$\overline{u} = \frac{\overline{V}}{\|\overline{V}\|} = \frac{x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \cos\alpha\overline{i} + \cos\beta\overline{j} + \cos\gamma\overline{k}.$$

Exemple:

1. Se dau vectorii $\overline{V}_1 = 2\overline{i} + 3\overline{j} - 4\overline{k}$ şi $\overline{V}_2 = 2\overline{j} - \overline{k}$. Să se determine produsul lor scalar, modulele şi versorii lor precum şi unghiul dintre cei doi vectori.

Soluţie: Produsul lor scalar este:

$$\overline{V}_1 \cdot \overline{V}_2 = 6 + (-1)(-4) = 10$$

Modulele lor sunt: $\|\overline{V}_1\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{56}$, $\|\overline{V}_2\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

Versorii celor doi vectori sunt:

$$\overline{u}_1 = \frac{\overline{V}_1}{\|\overline{V}_1\|} = \frac{2}{\sqrt{56}}\overline{i} + \frac{3}{\sqrt{56}}\overline{j} - \frac{4}{\sqrt{56}}\overline{k}, \ \overline{u}_2 = \frac{\overline{V}_2}{\|\overline{V}_2\|} = \frac{2}{\sqrt{5}}\overline{j} - \frac{1}{\sqrt{5}}\overline{k}$$

Unghiul dintre cei doi vectori este determinat cu ajutorul cosinusului său:

$$\cos(\overline{V}_1, \overline{V}_2) = \frac{\overline{V}_1 \cdot \overline{V}_2}{\|\overline{V}_1\|\|\overline{V}_2\|} \Rightarrow \cos(\overline{V}_1, \overline{V}_2) = \frac{10}{\sqrt{56}\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}}.$$

2. Pentru ce valori ale numărului real m vectorii $\overline{V}_1 = m\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$ şi $\overline{V}_2 = \overline{i} + m\overline{j} - 3\overline{k}$ sunt ortogonali?

Soluţie: $\overline{V}_1 \perp \overline{V}_2 \Leftrightarrow \overline{V}_1 \cdot \overline{V}_2 = 0$, şi deci $3m - 3 = 0 \Rightarrow m = 1$.

Produsul vectorial.

Definiţia 7.16. *Produsul vectorial* a doi vectori $\overline{V}_1, \overline{V}_2$, consideraţi în această ordine, este un vector notat $\overline{V}_1 \times \overline{V}_2$, perpendicular pe vectorii $\overline{V}_1, \overline{V}_2$, orientat astfel încât triedul $\overline{V}_1, \overline{V}_2, \overline{V}_1 \times \overline{V}_2$ să fie drept (orientarea este dată de regula mâinii drepte sau a burghiului, adică este sensul de înaintare a burghiului astfel încât vectorul $\overline{V}_1$ să se suprapună peste $\overline{V}_2$ pe drumul cel mai scurt), iar modulul este dat de relaţia:

$$\|\overline{V}_1 \times \overline{V}_2\| = \|\overline{V}_1\|\|\overline{V}_2\|\sin(\overline{V}_1, \overline{V}_2).$$

Propoziţia 7.5. Produsul vectorial are urătoarele proprietăţi:

1. Modulul produsului vectorial este un scalar reprezentând aria paralelogramului construit pe cei doi vectori;

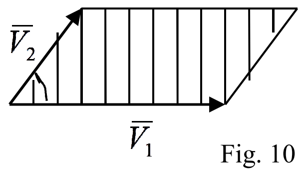


Fig. 10

De aici putem deduce o formulă pentru calculul ariei unui triunghi ABC. Avem:

$$\sigma_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overline{AB} \times \overline{AC}\right\|$$

2. Produsul vectorial se anulează în următoarele situaţii:

$\overline{V_1} = \overline{0}$ sau $\overline{V_2} = \overline{0}$ sau $\overline{V_1} = \overline{V_2} = \overline{0}$,

$\sin\left(\overline{V_1}, \overline{V_2}\right) = 0 \Rightarrow \left(\overline{V_1}, \overline{V_2}\right) = 0$ sau $\left(\overline{V_1}, \overline{V_2}\right) = \pi$;

3. $\overline{V_1} \times \overline{V_2} = -\overline{V_2} \times \overline{V_1}$ (este anticomutativ);

4. $\left(a\overline{V_1}\right) \times \left(b\overline{V_2}\right) = (ab)\left(\overline{V_1} \times \overline{V_2}\right)$, pentru orice scalari *a*,*b*;

5. $\overline{V_1} \times \left(\overline{V_2} + \overline{V_3}\right) = \overline{V_1} \times \overline{V_2} + \overline{V_1} \times \overline{V_3}$ (este distributiv faţă de adunarea vectorilor).

Expresia analitică a produsului vectorial

Pornind de la relațiile evidente:

$$\overline{i} \times \overline{i} = \overline{j} \times \overline{j} = \overline{k} \times \overline{k} = 0$$

$$\overline{i} \times \overline{j} = \overline{k},\ \overline{j} \times \overline{k} = \overline{i},\ \overline{k} \times \overline{i} = \overline{j},$$

obținem următoarea expresie analitică a produsului vectorial al lui $\overline{V_1} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}$ cu $\overline{V_2} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}$, în această ordine:

$$\overline{V_1} \times \overline{V_2} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Exemple:

1. Se dau vectorii $\overline{V_1} = 4\overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k}$ şi $\overline{V_2} = 3\overline{i} + 2\overline{j} - 2\overline{k}$. Să se determine versorul unei direcţii perpendiculare pe planul determinat de cei doi vectori.

Soluţie: Vectorii daţi sunt necoliniari $\left(\frac{4}{3} \neq \frac{3}{2}\right)$ şi deci irecțiile lor determină într-adevăr un plan. Toate dreptele perpendiculare pe planul determinat de vectorii daţi sunt paralele între ele. Astfel, există două direcţii (drepte orientate) cu proprietatea din enunţ, una având drept versor versorul lui $\overline{V_1} \times \overline{V_2}$ şi cealaltă versorul opus.

$$\overline{V_1} \times \overline{V_2} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \overline{i}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4\overline{i} + 5\overline{j} - \overline{k}$$

Astfel unul din versori este: $\overline{u} = -\frac{4}{\sqrt{42}}\overline{i} + \frac{5}{\sqrt{42}}\overline{j} - \frac{1}{\sqrt{42}}\overline{k}$.

Celălalt versor este: $-\overline{u} = \frac{4}{\sqrt{42}}\overline{i} - \frac{5}{\sqrt{42}}\overline{j} + \frac{1}{\sqrt{42}}\overline{k}$.

2. Fiind date punctele $A(-1,3,1)$, $B(1,1,1)$ şi $C(0,-1,2)$ să se determine perimetrul şi aria triunghiului pe care aceste îl determină .

Soluţie: Calculăm lungimile laturilor triunghiului. Avem:

$\overline{AB} = 2\overline{i} - 2\overline{j} \Rightarrow \left\|\overline{AB}\right\| = \sqrt{8}$, $\overline{AC} = \overline{i} - 4\overline{j} + \overline{k} \Rightarrow \left\|\overline{AC}\right\| = \sqrt{18}$,

$\overline{BC} = -\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k} \Rightarrow \left\|\overline{BC}\right\| = \sqrt{6}$.

Astfel $P_{ABC} = \sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{6}$.

Aria este dată de: $\sigma_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overline{AB} \times \overline{AC}\right\|$.

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -2\overline{i} - 2\overline{j} - 6\overline{k} \Rightarrow \left\|\overline{AB} \times \overline{AC}\right\| = \sqrt{44}\text{, deci } \sigma_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{44} = \sqrt{11}$$

Produsul mixt

Definiţia 7.17. *Produsul mixt* a trei vectori $\overline{V}_1, \overline{V}_2, \overline{V}_3$, consideraţi în această ordine, este un scalar, notat $\left(\overline{V}_1, \overline{V}_2, \overline{V}_3\right)$, egal cu produsul scalar dintre vectorii $\overline{V}_1$ şi $\overline{V}_2 \times \overline{V}_3$, adică,

$$\left(\overline{V}_1, \overline{V}_2, \overline{V}_3\right) = \overline{V}_1 \cdot \left(\overline{V}_2 \times \overline{V}_3\right).$$

Observaţia 7.7. Valoarea absolută a produsului mixt este egală cu volumul paralelipipedului construit pe cei trei vectori.

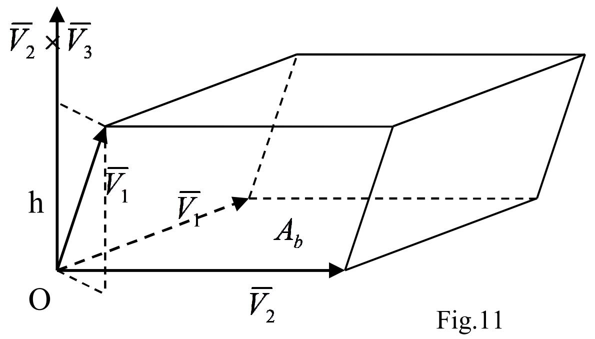


Fig.11

Produsul mixt a trei vectori $\overline{V}_1 = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}$, $\overline{V}_2 = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}$, $\overline{V}_3 = x_3\overline{i} + y_3\overline{j} + z_3\overline{k}$, are următoarea expresie analitică:

$$\left(\overline{V}_1, \overline{V}_2, \overline{V}_3\right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Propoziţia 7.5. Produsul mixt are următoarele proprietăţi:

1. $\left(\overline{V}_1, \overline{V}_2, \overline{V}_3\right) = \left(\overline{V}_2, \overline{V}_3, \overline{V}_1\right) = \left(\overline{V}_3, \overline{V}_2, \overline{V}_1\right)$,

2. $\left(a\overline{V}_1, b\overline{V}_2, c\overline{V}_3\right) = (abc)\left(\overline{V}_1, \overline{V}_2, \overline{V}_3\right)$,

3. Este aditiv în oricare dintre argumentele sale, de exemplu $\left(\overline{V}_1, \overline{V}_2, \overline{V}_3 + \overline{V}_4\right) = \left(\overline{V}_1, \overline{V}_2, \overline{V}_3\right) + \left(\overline{V}_1, \overline{V}_2, \overline{V}_4\right)$, deoarece

4. $\left(\overline{V}_1, \overline{V}_2, \lambda\overline{V}_2\right) = 0, (\forall)\lambda \in R$.

5. Trei vectori: $\overline{V}_1 = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}$, $\overline{V}_2 = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}$ şi $\overline{V}_3 = x_3\overline{i} + y_3\overline{j} + z_3\overline{k}$ sunt coplanari dacă şi numai dacă

$$\left(\overline{V}_1, \overline{V}_2, \overline{V}_3\right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Exemple:

1.Se dau trei forţe: $\overline{F}_1 = -\overline{i} + 3\overline{j} + 2\overline{k}$, $\overline{F}_2 = -\overline{i} - 6\overline{j} + 2\overline{k}$, $\overline{F}_3 = -3\overline{i} + 12\overline{j} + 6\overline{k}$. Să se arate că toate acţionează în acelaşi plan.

Soluţie: Folosim condiţia necesară şi suficientă ca trei vectori să fie coplanari:

$$\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3\right) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & -6 & 2 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Dublul produs vectorial.

Definiţia 7.18. *Dublul produs vectorial* a trei vectori $\overline{V}_1, \overline{V}_2, \overline{V}_3$, consideraţi în această ordine, este un vector, notat cu $\overline{V}$, dat de egalitatea: $\overline{V} = \overline{V}_1 \times \left(\overline{V}_2 \times \overline{V}_3\right)$.

Propoziţia 7.6. Vectorul $\overline{V} = \overline{V}_1 \times \left(\overline{V}_2 \times \overline{V}_3\right)$ este coplanar cu vectorii $\overline{V}_2, \overline{V}_3$ şi verifică relaţia:

$$\overline{V} = \overline{V}_1 \times \left(\overline{V}_2 \times \overline{V}_3\right) = \left(\overline{V}_1 \cdot \overline{V}_3\right)\overline{V}_2 - \left(\overline{V}_1 \cdot \overline{V}_2\right)\overline{V}_3,$$

aceasta purtând numele de formula de descompunere a dublului produs vectorial.

7.2. Elemente de teoria câmpurilor

Amintim că se numeşte *câmp scalar* o funcţie scalară reală *u* definită pe un domeniu *D*.

Presupunem că *D* este un domeniu din spaţiul euclidian tridimensional şi că este raportat la un reper cartezian ortogonal cu originea în *O* şi cu versorii axelor $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$. Orice punct din *D*, definit prin vectorul lui de poziţie $\overline{x} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$, poate fi precizat prin cele trei coordonate (x, y, z).

Astfel câmpul scalar este o funcţie:

$$u : D \to R, u\left(\overline{x}\right) = u(x, y, z).$$

Exemple de câmpuri scalare: masa specifică, sarcina specifică, temperatura într-un corp, presiunea într-un fluid, etc..

În cele ce urmează vom caracteriza variaţia câmpului în raport cu argumentele spaţiale. Pentru a putea face această caracterizare presupunem că funcţia u are derivate parţiale de ordinul întâi continue şi că cel puţin una dintre acestea este nenulă.

Definiţia 7.19. Se numeşte *suprafaţă de nivel* mulţimea tuturor punctelor din D pentru care câmpul are aceeaşi valoare (funcţia u rămâne constantă).

Ecuaţia unei suprafeţe de nivel este: $u(\overline{x}) = c$.

Observaţia 7.8. Se deduce de aici că două suprafeţe de nivel nu se pot intersecta fără să coincidă.

Justificarea rezultă din faptul că dacă avem două suprafeţe de nivel distincte $u(\overline{x}) = c_1$, $u(\overline{x}) = c_2, c_1 \neq c_2$ şi presupunem că ele ar avea puncte comune, acestea ar fi soluţiile sistemului

$$\begin{cases} u(\overline{x}) = c_1 \\ u(\overline{x}) = c_2 \end{cases},$$

de unde $c_1 = c_2$, adică o contradicţie, Astfel, *prin orice punct din D trece o suprafaţă de nivel şi numai una.*

Noţiunea de suprafaţă de nivel permite construirea unei imagini geometrice a câmpului scalar, independentă de sistemul de coordonate ales.

Într-un domeniu cu două dimensiuni, ecuaţia $u(\overline{x}) = u(x, y) = c$, reprezintă o *curbă de nivel.*

7.2.1. Derivata după o direcţie a câmpului scalar.

Fie o suprafaţă de nivel $u(\overline{x}) = c$, şi un punct P ce se poate deplasa fie pe suprafaţa considerată, fie în afara acesteia. Analizăm cele două situaţii.

a) Deplasarea se face pe suprafaţa de nivel (fig. 1).

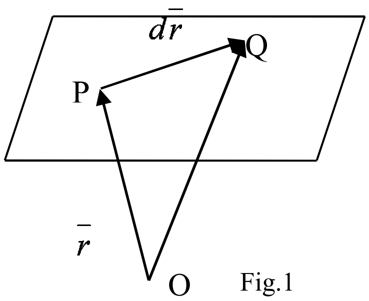


Fig.1

La o deplasare infinitezimală a punctului corespunde variaţia funcţiei ce îndeplineşte condiţia: $du = 0$. Cum

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

putem considera că membrul drept provine dintr-un produs scalar a doi vectori:

$\overline{G} = \frac{\partial u}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\overline{k}$ şi $d\overline{r} = \overline{i}dx + \overline{j}dy + \overline{k}dz$.

Astfel obţinem: $\overline{G} \cdot d\overline{r} = 0$.

Cum $d\overline{r}$ se află în planul tangent în punctul P la suprafaţa de nivel, deducem că $\overline{G}$ este vector normal în P la suprafaţa de nivel considerată.

Definiţia 7.20. Vectorul $\overline{G}$, notat $gradu$, dat de: $\overline{G} = gradu = \frac{\partial u}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\overline{k}$, poartă numele de *gradientul funcţiei u.*

Definiţia 7.21. Operatorul ∇ sau *nabla*, dat de $\nabla = \overline{i}\frac{\partial}{\partial x} + \overline{j}\frac{\partial}{\partial y} + \overline{k}\frac{\partial}{\partial z}$, poartă numele de *operatorul lui Hamilton.*

Putem scrie simbolic gradientul astfel:

$$\overline{G} = gradu = \left(\overline{i}\frac{\partial}{\partial x} + \overline{j}\frac{\partial}{\partial y} + \overline{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)u = \nabla u .$$

b) Deplasarea se face în afara suprafeţei de nivel (fig. 2).

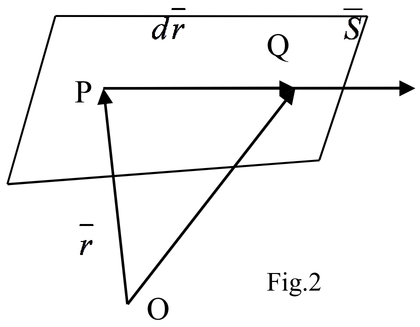


Fig.2

Variaţia câmpului scalar la trecerea din P în Q este: $\delta u = u(\overline{r} + d\overline{r}) - u(\overline{r})$, ea depinde atât de distanţa $\|\overline{PQ}\|$, cât şi de direcţia de deplasare $\overline{S}$, de versor $\overline{s}$.

Elementul liniar pe direcţia de versor $\overline{s}$ este:

$$\delta s = \|\overline{PQ}\| = \|d\overline{r}\|.$$

Definiţia 7.22. Se numeşte *derivata funcţiei u după direcţia de versor* $\overline{s}$ în punctul *P*, sau derivata câmpului scalar *u* după direcţia de versor $\overline{s}$, limita raportului $\frac{\delta u}{\delta s}$, pentru $\delta s \to 0$, atunci când limita există. Se notează $\frac{du}{ds}$. Avem:

$$\frac{du}{ds} = \lim_{\delta s \to 0} \frac{\delta u}{\delta s}.$$

Notând cu α, β, γ unghiurile pe care le face direcţia $\overline{s}$ cu axele *Ox,Oy, Oz* avem relaţia:

$$\overline{s} = \cos\alpha \overline{i} + \cos\beta \overline{j} + \cos\gamma \overline{k}.$$

De asemenea se ştie că $d\overline{r} = \overline{s}\left\|d\overline{r}\right\| = \overline{s}\delta s$.

De aici obţinem:

$$dx\overline{i} + dy\overline{j} + dz\overline{k} = \cos\alpha\delta ds\overline{i} + \cos\beta\delta s\overline{j} + \cos\gamma\delta s\overline{k},$$

de unde rezultă relaţiile:

$$dx = \cos\alpha\delta s,\ dy = \cos\beta\delta s,\ dz = \cos\gamma\delta s.$$

Astfel obţinem:

$$\delta u = u(x + \cos\alpha\delta s, y + \cos\beta\delta s, z + \cos\gamma\delta s) - u(x, y, z).$$

Funcţia fiind diferenţiabilă avem:

$$\delta u = u(x, y, z) + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + R - u(x, y, z),\ \text{cu}$$

$$\lim_{\delta s \to 0} \frac{R}{\delta s} = 0.$$

Deducem că

$$\lim_{\delta s \to 0} \frac{\delta u}{\delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

Astfel *derivata funcţiei scalare u după direcţia* $\overline{s}$ se obţine folosind relaţia:

$$\frac{du}{ds} = \overline{G} \cdot \overline{s} = grad u \cdot \overline{s}.$$

Ţinând cont de proprietăţile produsului scalar putem spune că derivata funcţiei scalare u după direcţia $\overline{s}$ reprezintă proiecţia gradientului pe direcţia de versor $\overline{s}$

$$\frac{du}{ds} = \left\|\overline{G}\right\|\left\|\overline{s}\right\|\cos\left(\overline{s},\overline{G}\right) = \left\|\overline{G}\right\|\cos\left(\overline{s},\overline{G}\right).$$

Observaţia 7.9. Modulul gradientului reprezintă derivata câmpului scalar u după direcţia normalei în punctul respectiv la suprafaţă. Deducem de aici că:

$$\overline{G} = \frac{du}{dn}\overline{n}.$$

Justificarea este imediată deorarece dacă $\overline{s} = \overline{n}$, obţinem:

$$\frac{du}{dn} = \left\|\overline{G}\right\|\cos\left(\overline{G},\overline{n}\right) = \left\|\overline{G}\right\|\cos 0^0 = \left\|\overline{G}\right\|$$

Observaţia 7.10. Mărimea gradientului este valoarea maximă între derivatele după o direcţie oarecare.

Avem într-adevăr:

$$\frac{du}{ds} = \left\|\overline{G}\right\|\cos\left(\overline{s},\overline{G}\right) \le \left\|\overline{G}\right\| \Rightarrow \max\frac{du}{ds} = \left\|\overline{G}\right\|.$$

Observaţia 7.11. Derivatele după direcţiile pozitive ale axelor de coordonate coincid cu derivatele parţiale în raport cu variabila respectivă, iar cele în raport cu direcţiile negative sunt opusele derivatelor parţiale.

De aici ca o concluzie deducem că derivata după o direcţie depinde nu numai de direcţia respectivă ci şi de sensul ales pe această direcţie.

Propoziția 7.7. Gradientul are următoarele proprietăți:

1. $grad(\alpha\varphi) = \alpha\, grad\varphi$, dacă $\alpha = const.$,
2. $grad(\varphi + \phi) = grad\varphi + grad\phi$,
3. $\nabla(\varphi\phi) = \varphi\nabla\phi + \phi\nabla\varphi$,
4. $\nabla(F(\varphi(x,y,z))) = F'(\varphi)\nabla\varphi$.

Propoziția 7.8. Proprietăţile derivatei unui câmp scalar după o direcţie sunt:

1. $\frac{d}{ds}(f+g) = \frac{df}{ds} + \frac{dg}{ds}$

2. $\dfrac{d}{ds}(fg) = g\dfrac{df}{ds} + f\dfrac{dg}{ds}$

3. $\dfrac{d}{ds}(F(\varphi)) = F'(\varphi)\dfrac{d\varphi}{ds}$.

Exemple: Fie câmpul scalar $u : R^3 \to R$, $u(x,y,z) = 2xy + x^2z + 3y$ și direcția de versor $\bar{s} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\bar{i} + \bar{j} - \bar{k})$. Să se calculeze gradientul lui u și derivata sa după direcția dată, în punctul $A(-1,0,2)$.

$$gradu = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}.$$

Derivatele parțiale de ordinul întâi ale lui u sunt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y + 2xz, \ \frac{\partial u}{\partial y} = 2x + 3, \ \frac{\partial u}{\partial z} = x^2.$$

Obținem: $gradu = (2y + 2xz)\bar{i} + (2x + 3)\bar{j} + (x^2)\bar{k}$.

În punctul dat gradientul este: $gradu(-1,0,2) = -4\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$.

Pentru calculul derivatei lui u după direcția dată aplicăm formula: $\dfrac{du}{ds} = gradu \cdot \bar{s}$

Astfel obținem: $\dfrac{du}{ds} = gradu \cdot \bar{s} = (2y + 2xz)\dfrac{1}{\sqrt{3}} + (2x + 3)\dfrac{1}{\sqrt{3}} - (x^2)\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

În punctul *A,* derivata lui u după direcția dată este:

$$\frac{du}{ds}(-1,0,2) = -\frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Definiţia 7.23. Se numeşte *câmp vectorial* o funcţie vectorială $\overline{V}$ definită pe un domeniu D.

Ca şi în cazul câmpului scalar presupunem că D este un domeniu din spaţiul euclidian tridimensional şi că este raportat la un reper cartezian ortogonal cu originea în O şi cu versorii axelor $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Exemple de câmpuri vectoriale: câmpul vitezelor, câmpul acceleraţiilor, câmpul momentelor, câmpul electromagnetic, câmpul gravitaţional, câmpul obţinut prin aplicarea operatorului grad unui câmp scalar, etc..

Faţă de un reper cartezian ales, câmpul vectorial se defineşte prin funcţiile reale P, Q, R, componentele funcţiei vectoriale considerate, pe care le presupunem în general de clasă $C^1(D)$. Avem astfel $\overline{V}(x,y,z) = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$.

În continuare vom caracteriza variaţia spaţială a unui câmp vectorial.

Pentru a calcula variaţia unui câmp vectorial în vecinătatea unui punct *M*, de vector de poziţie $\overline{r}$, câmp ce variază diferit pe diferitele direcţii ale spaţiului, vom considera o dreaptă ce trece prin *M* de versor $\overline{s}$, sau o curbă a cărui tangentă în *M* are direcţia de versor $\overline{s}$, pe care alegem punctul M', de vector de poziţie $\overline{r}+d\overline{r}$, şi procedând ca în cazul câmpului scalar obţinem pentru variaţia $\delta\overline{V}$ a funcţiei vectoriale $\overline{V}$ expresia:

$\delta\overline{V}=\frac{\partial\overline{V}}{\partial x}\cos\alpha\delta s+\frac{\partial\overline{V}}{\partial y}\cos\beta\delta s+\frac{\partial\overline{V}}{\partial z}\cos\gamma\delta s$, unde α,β,γ sunt unghiurile pe care le face direcţia $\overline{s}$ cu axele *Ox,Oy, Oz*.

Definiţia 7.24. Se numeşte *derivata funcţiei* $\overline{V}$ *după direcţia de versor* $\overline{s}$ sau *derivata câmpului vectorial* $\overline{V}$ *după direcţia de versor* $\overline{s}$, limita raportului $\frac{\delta\overline{V}}{\delta s}$ când $\delta s\to 0$, atunci când această limită există. Se notează: $\frac{d\overline{V}}{ds}=\lim\limits_{\delta s\to 0}\frac{\delta\overline{V}}{\delta s}$.

Avem: $\frac{d\overline{V}}{ds}=\frac{\partial\overline{V}}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial\overline{V}}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial\overline{V}}{\partial z}\cos\gamma$.

Cu ajutorul operatorului gradient putem scrie mai simplu relaţia precedentă:

$$\frac{d\overline{V}}{ds}=\left(\overline{s}\cdot\nabla\right)\overline{V}.$$

Propoziția 7.9. Proprietăţile derivatei unui câmp vectorial după o direcţie sunt:

1. $\frac{d}{ds}\left(\overline{V}+\overline{W}\right)=\frac{d\overline{V}}{ds}+\frac{d\overline{W}}{ds}$

2. $\frac{d}{ds}\left(f\overline{V}\right)=\frac{df}{ds}\overline{V}+f\frac{d\overline{V}}{ds}$

3. $\frac{d}{ds}\left(\overline{V}\times\overline{W}\right)=\frac{d\overline{V}}{ds}\times\overline{W}+\overline{V}\times\frac{d\overline{W}}{ds}$

4. $\frac{d}{ds}\left(\overline{V}\cdot\overline{W}\right)=\frac{d\overline{V}}{ds}\cdot\overline{W}+\overline{V}\cdot\frac{d\overline{W}}{ds}$.

Definiţia 7.25. Se numeşte *derivata vectorului* $\overline{V}$ *în raport cu vectorul* $\overline{A}$ expresia:

$$\frac{d\overline{V}}{d\overline{A}}=\left(\overline{A}\cdot\nabla\right)\overline{V}=A_x\frac{\partial\overline{V}}{\partial x}+A_y\frac{\partial\overline{V}}{\partial y}+A_z\frac{\partial\overline{V}}{\partial z}.$$

Definiţia 7.26. Funcţia scalară $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ se numeşte *divergenţa* funcţiei vectoriale $\overline{V}$ de componente $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$.

Se notează astfel:

$$div\overline{V}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\text{, sau } div\overline{V}=\nabla\cdot\overline{V}.$$

Propoziția 7.10. Divergența prezintă următoarele proprietăți:

1. $div\left(\overline{V}+\overline{W}\right)=div\overline{V}+div\overline{W}$,

2. $div\left(f\overline{V}\right)=gradf\cdot\overline{V}+fdiv\overline{V}$

Exemplu: Fie câmpul vectorial $\overline{v}:R^3\to R^3$, $\overline{v}(x,y,z)=xy\overline{i}+2z\overline{j}-3x^2yz\overline{k}$. Să se calculeze $div\overline{v}$ în punctul $A(0,1,2)$.

Se știe că $div\overline{v}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$, unde *P,Q, R* reprezintă componentele scalare ale lui $\overline{v}$.

Avem:

$P(x,y,z)=xy,\quad Q(x,y,z)=2z,\quad R(x,y,z)=-3x^2yz$.

$\frac{\partial P}{\partial x}=y$, $\frac{\partial Q}{\partial y}=0$, $\frac{\partial R}{\partial z}=-3x^2y$.

Obținem astfel: $div\overline{v}=y+0-3x^2y$.

În punctul *A* divergența câmpului vectorial dat este: $div\overline{v}(0,1,2)=1$

Definiţia 7.27. Se numeşte *rotorul* sau *vârtejul câmpului vectorial* $\overline{V}$ şi se notează cu $rot\overline{V}$ sau $\nabla\times\overline{V}$ vectorul dat de relaţia:

$$rot\overline{V}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overline{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\overline{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\overline{k}.$$

Propoziția 7.11. Rotorul prezintă următoarele proprietăți:

1. $rot\overline{V}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$,

2. $rot\left(\overline{V}+\overline{W}\right)=rot\overline{V}+rot\overline{W}$,

3. $rot\left(f\overline{V}\right)=gradf\times\overline{V}+frot\overline{V}$.

Exemplu: Fie câmpul vectorial $\bar{v}: R^3 \to R^3$, $\bar{v}(x,y,z) = (x+2y)\bar{i} + (y^2 - 3z)\bar{j} + xyz\bar{k}$ să se caluleze rotorul acestuia în punctul $A(1,2,0)$

Se știe că $rot\bar{v} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{k}$, unde *P,Q,* *R* reprezintă componentele scalare ale lui $\bar{v}$.

Avem:

$P(x,y,z) = x+2y, \quad Q(x,y,z) = y^2 - 3z, \quad R(x,y,z) = xyz$.

Derivatele parțiale necesare în formulă sunt:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2\,,\ \frac{\partial P}{\partial z} = 0\,,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 0\,,\ \frac{\partial Q}{\partial z} = -3\,,\ \frac{\partial R}{\partial x} = yz\,,\ \frac{\partial R}{\partial y} = xz\,.$$

Obținem astfel: $rot\bar{v} = (xz+3)\bar{i} + (-yz)\bar{j} + (-2)\bar{k}$

În punctul *A* rotorul câmpului vectorial dat este:

$$rot\bar{v}(1,2,0) = 3\bar{i} - 2\bar{k}$$

7.3. Probleme rezolvate:

1. Fie câmpul scalar $u: R^3 \to R$, $u(x,y,z) = x^2yz + 3xz^3$ și direcția $\bar{d} = 2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$. Să se calculeze gradientul lui *u* și derivata sa după direcția $\bar{d}$, în punctul $A(-1,2,1)$.

Soluție: $gradu = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$.

Calculând derivatele parțiale de ordinul întâi avem:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xyz + 3z^3\,,\ \frac{\partial u}{\partial y} = x^2z\,,\ \frac{\partial u}{\partial z} = x^2y + 9xz^2\,.$$

Obținem: $gradu = (2xyz + 3z^3)\bar{i} + (x^2z)\bar{j} + (x^2y + 9xz^2)\bar{k}$.

În punctul dat gradientul este: $gradu(-1,2,1) = -\bar{i} + \bar{j} - 7\bar{k}$.

Pentru calculul derivatei lui *u* după direcția dată trebuie mai întâi calculat versorul acesteia $\bar{s}$, iar apoi aplicată formula: $\frac{du}{ds} = gradu \cdot \bar{s}$

Versorul direcției date este: $\bar{s} = \frac{\bar{d}}{\|\bar{d}\|} = \frac{2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{6}}\bar{i} - \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{k}$.

Astfel obținem: $\frac{du}{ds} = gradu \cdot \bar{s} = (2xyz + 3z^3)\frac{2}{\sqrt{6}} - (x^2z)\frac{1}{\sqrt{6}} + (x^2y + 9xz^2)\frac{1}{\sqrt{6}}$.

În punctul *A,* derivata lui *u* după direcția dată este:

$$\frac{du}{ds}(-1,2,1) = -\frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} - 7\frac{1}{\sqrt{6}}\,.$$

2. Fie câmpul vectorial $\bar{v}: R^3 \to R^3$, $\bar{v}(x,y,z) = x^2 y\bar{i} + \sin\left(\frac{xyz\pi}{2}\right)\bar{j} - 2xyz^2\bar{k}$. Să se calculeze $div\bar{v}$ în punctul $A(2,1,-1)$.

Soluţie:

Se ştie că $div\bar{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$, unde *P,Q, R* reprezintă componentele scalare ale lui $\bar{v}$.

Avem:

$$P(x,y,z) = x^2 y,\quad Q(x,y,z) = \sin\left(\frac{xyz\pi}{2}\right),\quad R(x,y,z) = -2xyz^2.$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2xy\,,\ \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{xz\pi}{2}\cos\left(\frac{xyz\pi}{2}\right),\ \frac{\partial R}{\partial z} = -4xyz\,.$$

Obținem astfel:

$$div\bar{v} = 2xy + \frac{xz\pi}{2}\cos\left(\frac{xyz\pi}{2}\right) - 4xyz\,.$$

În punctul *A* divergența câmpului vectorial dat este:

$$div\bar{v}(2,1,-1) = 4 + \frac{-2\pi}{2}\cos\left(\frac{-2\pi}{2}\right) + 8 = 12 - \pi\cos(\pi) = 12 + \pi\,.$$

3. Pentru câmpul vectorial din problema precedentă să se caluleze rotorul în punctul precizat.

Soluţie:

Se ştie că $rot\bar{v} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{k}$, unde *P,Q, R* reprezintă componentele scalare ale lui $\bar{v}$.

Avem:

$$P(x,y,z) = x^2 y,\quad Q(x,y,z) = \sin\left(\frac{xyz\pi}{2}\right),\quad R(x,y,z) = -2xyz^2.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x^2,\ \frac{\partial P}{\partial z} = 0\,,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{yz\pi}{2}\cos\left(\frac{xyz\pi}{2}\right),\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{xy\pi}{2}\cos\left(\frac{xyz\pi}{2}\right),\ \frac{\partial R}{\partial x} = -2yz^2\,,\ \frac{\partial R}{\partial y} = -2xz^2\,.$$

Obținem astfel:

$$rot\bar{v} = \left(-2xz^2 - \frac{xy\pi}{2}\cos\left(\frac{xyz\pi}{2}\right)\right)\bar{i} + \left(2yz^2\right)\bar{j} + \left(\frac{yz\pi}{2}\cos\left(\frac{xyz\pi}{2}\right) - x^2\right)\bar{k}$$

În punctul *A* rotorul câmpului vectorial dat este:

$$rot\bar{v} = \left(-4 - \frac{2\pi}{2}\cos(-\pi)\right)\bar{i} + 2\bar{j} + \left(\frac{-\pi}{2}\cos(-\pi) - 4\right)\bar{k}\,.$$

$$rot\bar{v} = (-4+\pi)\bar{i} + 2\bar{j} + \left(\frac{\pi}{2} - 4\right)\bar{k}\,.$$

4. Să se deducă pe baza proprietăţilor mărimilor ce intervin relaţiile următoare:

a) $div\, grad f = \Delta f$, unde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$,

b) $rot\, rot\overline{V} = grad\, div\overline{V} - \Delta\overline{V}$.

Soluţie: Relaţiile se deduc prin calcule directe.

a) Avem $grad f = \bar{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial f}{\partial z}$.

De aici deducem componentele reale ale câmpului vectorial $grad f$. Acestea sunt: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$

Aplicând definiţia divergenţei găsim: $div\, grad f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f$.

b) Pentru a demonstra relaţia de egalitate între vectori vom demonstra că cele trei componente scalare ale lor coincid.

Fie $\overline{V}(x,y,z) = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$, atunci:

$$rot\overline{V} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{k} \Rightarrow rot\, rot\overline{V} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} & \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Dezvoltând determinantul după elementele din prima linie găsim componentele vectorului după cele trei axe de coordonate.

Componenta în lungul axei Ox este: $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial x}$

Pentru componenta în lungul axei Ox a membrului drept avem:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(div\overline{V}\right) - \Delta P = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}.$$

Cum $\overline{V} \in C^1(D) \Rightarrow$ derivatele parţiale mixte sunt egale, şi astfel componentele coincid.

Analog se demonstrează şi egalitatea componentelor în lungul axelor *Oy, Oz,* deci vectorii sunt egali, adică: $rot\, rot\overline{V} = grad\, div\overline{V} - \Delta\overline{V}$.

8. INTEGRALE CURBILINII ȘI DE SUPRAFAȚĂ

8.1. Integrale curbilinii

8.1.1. Integrale curbilinii în raport cu coordonatele (de speța a doua)

Vom considera mulțimea punctelor din plan (spațiu) raportate la un reper cartezian ortonormat $R=\{O,\bar{i},\bar{j}\}$ ($R=\{O,\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$.

Definiția 7.1. Fie I un interval al axei reale. Se numește *curbă plană parametrizată de clasă* C^k*,* o aplicatie $\alpha: I\subset R\to R^2$, $\alpha(t)=(\varphi(t),\psi(t))$, astfel încât componentele scalare ale lui α să aibă derivatele de ordinul k și ele să fie continue pe I.
Se mai spune că ea este reprezentată de *ecuațiile paramtrice* (sau scalare)

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, \quad t\in I$$

Mulțimea punctelor din plan de coordonate $(\varphi(t),\psi(t))$, $t\in I$ (sau de vector de poziție $\bar{r}(t)=\varphi(t)\bar{i}+\psi(t)\bar{j}$), notată Γ, se numește *suportul* sau *urma curbei* (uneori o vom numi simplu curbă).

Pentru un același suport Γ, din plan, există mai multe reprezentări parametrice.

Definiția 8.2. Fie două curbe plane parametrizate de clasă C^1(netedă), $\alpha_1: I_1\to R^2$ și $\alpha_2: I_2\to R^2$. Spunem că ele *sunt echivalente* dacă există o funcţie $\mu: I_2\to I_1$ bijectivă de clasă C^1 cu μ^{-1} tot de clasă C^1așa încât $\alpha_2=\alpha_1\circ\mu$. Funcţia μ se numeşte *schimbare de parametru.*
Dacă în plus ea este strict crescătoare, spunem că cele două reprezentări parametrice sunt echivalente și *cu aceeaşi orientare*.
Evident ele au același suport Γ în plan.

Definiția 8.3. Dacă $M(\varphi(t),\psi(t))$, spunem că *t* reprezintă *coordonata curbilinie* a punctului *M*, și convenim să notăm $M(t)$.

Definiția 8.4. *M* se numește punct simplu dacă există o singură valoare $t_0\in I$, astfel încât $(\varphi(t_0),\psi(t_0))$ să reprezinte coordonatele lui *M.*

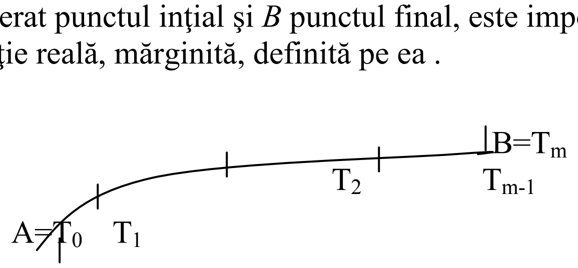
Definiția 8.5. Un punct M se numește *punct ordinar* (sau nesingular, regulat) al curbei parametrizate de clasă C^1 dacă $(\varphi'(t_0))^2+(\psi'(t_0))^2\neq 0$, unde t_0 este coordonata curbilinie a lui *M*. În caz contrar el se numște *punct singular* al curbei.

Vectorul $\bar{r}'(t)=\varphi'(t)\bar{i}+\psi'(t)\bar{j}$ este tangent la curbă în punctul $M(t)$.

Dacă $I=[a,b]$, atunci $A(a)$, respectiv $B(b)$ se numesc capetele curbei.

Dacă $\alpha(a)=\alpha(b)$ spunem că Γ reprezintă o curbă închisă.

Fie o curbă simplă (formată doar cu puncte simple) deschisă, orientată, de suport Γ, din planul *x*O*y*, dată parametric: $x=\varphi(t), y=\psi(t), t\in[\alpha,\beta]$, iar *A* și *B* două puncte de pe aceasta (*A* considerat punctul inţial şi *B* punctul final, este important sensul de parcurs pe Γ) și fie *F*(*x*,*y*) o funcţie reală, mărginită, definită pe ea .



Definiția 8.6. Punctele T_i (i=0,…,m), așezate pe urma curbei în ordinea T_0, T_1, …,T_m, cu $T_0=A$ și $T_m=B$, ce o împart în m arce (ce au evident interioarele disjuncte) constituie o diviziune Δ a curbei AB .

Fie $t_0 = \alpha, t_1, ...t_m = \beta$ valorile parametrului *t*, din $[\alpha, \beta]$, corespunzătoare punctelor alese. Ele constituie o diviziune a intervalului $[\alpha, \beta]$.

Notăm $l(\Delta) = \sum_{i=0}^{m-1} d(T_i, T_{i+1})$, unde $d(T_i, T_{i+1})$ reprezintă distanța euclidiană între punctele T_i, T_{i+1}.

Observația 8.1. Pentru o curbă parametrizată de clasă C^1 există $\sup_{\Delta} l(\Delta)$ (se mai spune că este rectificabilă), și această margine superioară, notată cu *L*, poartă numele de lungimea curbei. Ea se evaluează astfel:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt$$

Definiţia 8.7. Prin norma diviziunii Δ înţelegem cea mai mare dintre lungimile coardelor $T_{i-1}T_i$, i=1,m, şi o notăm $N(\Delta)$.

Pe fiecare arc $T_{i-1}T_i$ alegem câte un punct arbitrar, denumit *punct intermediar*, $M_i(\xi_i, \eta_i)$. Considerăm suma dată de:

(1) $$s = \sum_{i=1}^{m} F(\xi_i, \eta_i)(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})) = \sum_{i=1}^{m} F(\xi_i, \eta_i)(x_i - x_{i-1}),\ x_i = \varphi(t_i),\ i = \overline{1, n}.$$

Definiţia 8.8. Dacă pentru orice şir de diviziuni $\{\Delta_n\}_{n\in N}$ ale curbei *AB*, cu $N(\Delta_n) \to 0$, sumele corespunzătoare s_n tind către o limită independentă de alegerea şirului de diviziuni $\{\Delta_n\}_n$ şi de alegerea punctelor intermediare, această limită se numeşte *integrala curbilinie a funcţiei F(x,y) în raport cu x*.

Această limită se notează astfel:

$$\int_{AB} F(x, y)dx \quad .$$

Teorema 8.1. Fie Γ o curbă simplă parametrizată de clasă C^1 dată de: $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta]$, și $F(x,y)$ o funcţie continuă pe Γ. În acest caz, există integrala curbilinie a funcţiei $F(x,y)$ în raport cu x pe curba Γ şi are loc egalitatea:

$$\int_{AB} F(x, y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} F(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)dt \qquad (*).$$

Observaţia 8.2. Dacă ecuaţia curbei Γ este de forma $y=f(x)$, cu f continuă pe [a,b], iar $F(x,y)$ este continuă pe curbă, atunci: $\int_{AB} F(x, y)dx = \int_{a}^{b} F(x, f(x))dx$

Analog se poate vorbi despre *integrala curbilinie în raport cu y* a unei funcţii $G(x,y)$, înlocuind sumele integrale de forma (1) cu sume integrale de forma:

$$s = \sum_{i=1}^{n} G(\xi_i, \eta_i)(\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} G(\xi_i, \eta_i)(y_i - y_{i-1}),\ y_i = \psi(t_i),\ i = \overline{1, n}$$

Integrala se notează: $\int_{AB} G(x, y)dy$.

Observaţia 8.3. Dacă *G* este continuă integrala curbilinie în raport cu *y* se calculează astfel:

$$\int_{AB} G(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} G(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)dt \quad (**)$$

Observaţia 8.4. Dacă *F* și *G* sunt continue, atunci:

$$\int_{AB} Fdx + Gdy = \int_{AB} Fdx + \int_{AB} Gdy = \int_{\alpha}^{\beta} \left(F(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + G(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\right)dt.$$

Observaţia 8.5. Dacă $F(x,y,z)$, $G(x,y,z)$ şi $H(x,y,z)$ sunt funcții contiue definite pe curbe în R^3, definim analog $\int_{AB} F(x,y,z)dx$, $\int_{AB} G(x,y,z)dy$, respectiv $\int_{AB} H(x,y,z)dz$.

Are loc relația: $\int_{AB} Fdx + Gdy + Hdz = \int_{AB} Fdx + \int_{AB} Gdy + \int_{AB} Hdz$,

unde

$$\int_{AB} F(x,y,z)dx = \int_{\alpha}^{\beta} F(\varphi(t),\psi(t),\lambda(t))\varphi'(t)dt, \quad \int_{AB} G(x,y,z)dy = \int_{\alpha}^{\beta} G(\varphi(t),\psi(t),\lambda(t))\psi'(t)dt,$$

$$\int_{AB} H(x,y,z)dx = \int_{\alpha}^{\beta} H(\varphi(t),\psi(t),\lambda(t))\lambda'(t)dt.$$

Astfel $\quad \int_{AB} Fdx + Gdy + Hdz = \int_{\alpha}^{\beta} (F\varphi' + G\psi' + H\lambda')dt$.

Integralele curbilinii de tipul precedent se mai numesc *integrale curbilinii de speţa a doua*.

<u>**Proprietăţi**</u> (pentru integrala curbilinie în raport cu x)

1. Dacă $F_1(M)$ şi $F_2(M)$ sunt integrabile pe Γ de la A la B, atunci $F_1(M)+ F_2(M)$ este integrabilă şi are loc relaţia:

$$\int_{AB} (F_1 + F_2)dx = \int_{AB} F_1dx + \int_{AB} F_2dx$$

2. Dacă $F(M)$ integrabilă pe Γ de la A la B, atunci $\alpha F(M)$ este integrabilă, oricare ar fi $\alpha \in R$ şi are loc relaţia:

$$\int_{AB} \alpha F(M)dx = \alpha \int_{AB} F(M)dx$$

3. Dacă $C \in \Gamma$ între A şi B şi dacă există integrala funcţiei $F(M)$ de la A la C şi de la C la B, atunci există şi integrala lui $F(M)$ de la A la B şi are loc:

$$\int_{AB} Fdx = \int_{AC} Fdx + \int_{CB} Fdx$$

4. $\int_{BA} Fdx = -\int_{AB} Fdx$

5. Dacă Γ este un segment perpendicular pe axa Ox, atunci:

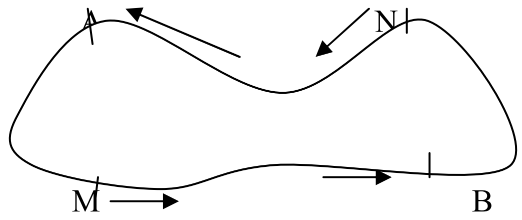
$$\int_{\Gamma} Fdx = 0.$$

Proprietăți analoage au loc și pentru celelalte integrale (în raport cu y, respectiv z).

Observaţia 8.6. Dacă Γ este o curbă plană simplă închisă orientată în sens direct, atunci :

$$\int_{\Gamma} (Fdx + Gdy) = \int_{AMB} (Fdx + Gdy) + \int_{BNA} (Fdx + Gdy),$$

unde A, M, B, N sunt puncte de pe curbă scrise în ordinea orientării.



În mod analog de defineşte integrala curbilinie pe o curbă închisă în R^3.

8.1.2. Integrale curbilinii în raport cu lungimea arcului (de speța întâi)

Fie Γ o curbă simplă parametrizată de clasă C^1 de extremităţi A şi B, fie $F(x,y)$ o funcţie definită pe Γ și Δ o diviziune a lui AB (dată cu ajutorul punctelor $A=T_0,\ldots,T_m=B$).

Definiţia 8.9. Prin normă a diviziunii Δ înţelegem, în acest caz, cea mai mare dintre lungimile arcelor $T_{i-1}T_i$.

Considerăm pe fiecare arc $T_{i-1}T_i$ câte un punct arbitrar, notat cu M_i . Formăm sume de forma: $\sigma = \sum_{i=1}^{m} F(M_i)s_i$, unde s_i este lungimea arcului $T_{i-1}T_i$.

Definiţia 8.10. Dacă pentru orice şir de diviziuni $\{\Delta_n\}_{n\in N}$ ale curbei AB, cu $N(\Delta_n)\to 0$, sumele corespunzătoare σ_n tind către o limită independentă de alegerea şirului de diviziuni $\{\Delta_n\}_n$ şi de alegerea punctelor intermediare, această limită se numeşte *integrala curbilinie a funcţiei F(x,y) în raport cu lungimea arcului*, şi se notează astfel:

$$\int_{AB} F(M)ds .$$

Integrala precedentă mai poartă numele de *integrala curbilinie de prima speţă* a lui F.

Observaţia 8.7. Dacă Γ este dată de:

$$x = x(s), y = y(s), 0 \le s \le L ,$$

unde s este lungimea arcului AM , iar L lungimea curbei, atunci $\int_{AB} F(M)ds = \int_0^L F[x(s), y(s)]ds$.

Observaţia 8.8. Dacă $x = \varphi(t)$ şi $y = \psi(t)$ sunt ecuaţiile parametrice ale curbei simple parametrizate de clasă C^1, Γ, notând prin $s(t)$ lungimea arcului $AM,$ avem relaţia:

$$s'(t) = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} .$$

Pentru $t \in [\alpha,\beta]$ obţinem: $\int_{AB} F(M)ds = \int_\alpha^\beta F[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\,dt$

Observaţia 8.9. Dacă Γ este dată sub forma:

$$y = f(x), x \in [a,b] \Rightarrow \int_{AB} F(M)ds = \int_a^b F(x, f(x))\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx .$$

Observaţia 8.10. Dacă F şi G sunt continue pe curba netedă Γ iar α este unghiul dintre sensul pozitiv al tangentei la curbă (sensul determinat pe ea de sensul creșterii arcului AM) şi sensul pozitiv al axei Ox, atunci:

$$\int_{AB} Fdx + Gdy = \int_{AB} (F\cos\alpha + G\sin\alpha)ds .$$

Exemple:

1. Să se calculeze $\int\limits_{AB}\left(x^2+3y^2\right)ds$, unde AB reprezintă suportul unei curbe dată parametric astfel: $x=2t+1,\quad y=t-2,\quad t\in[0,1]$.

În acest caz $\varphi(t)=2t+1,\quad \psi(t)=t-2,\quad t\in[0,1]$, deci sunt funcții de clasă C^1 și

$$\varphi'(t)=2\quad \psi'(t)=1,\quad t\in[0,1].$$

Astfel avem: $\int\limits_{AB}\left(x^2+3y^2\right)ds=\int\limits_0^1\left[(2t+1)^2+3(t-2)^2\right]\sqrt{5}dt=\int\limits_0^1\left(7t^2-8t+13\right)\sqrt{5}dt=$

$$=\sqrt{5}\left(7\frac{t^3}{3}-4t^2+13t\right)\Bigg|_0^1=\frac{34\sqrt{5}}{3}.$$

2. Să se calculeze $\int\limits_{AB}2xyds$, unde AB reprezintă porţiunea din cadranul doi a elipsei: $\frac{x^2}{9}+y^2=1$.

O reprezentare parametrică a curbei AB este: $x=3\cos t,\quad y=\sin t,\quad t\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

În acest caz $\varphi(t)=3\cos t,\quad \psi(t)=\sin t,\quad t\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, deci sunt funcții de clasă C^1 și

$\varphi'(t)=-3\sin t,\quad \psi'(t)=\cos t,\quad t\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

Astfel avem: $\int\limits_{AB}2xyds=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}6\cos t\sin t\sqrt{9\sin^2 t+\cos^2 t}dt$.

Făcând schimbarea de variabilă: $u=9\sin^2 t+\cos^2 t\Rightarrow$
$du=(18\sin t\cos t-2\sin t\cos t)dt=16\sin t\cos tdt$

Astfel, $6\cos t\sin tdt=\frac{3du}{8}$. Obţinem deci:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}6\cos t\sin t\sqrt{9\sin^2 t+\cos^2 t}dt=\int\limits_4^1\frac{3\sqrt{u}}{8}du=\frac{3}{8}\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Bigg|_3^1=\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{3^3}\right)=\frac{1}{4}\left(1-3\sqrt{3}\right).$$

3. Să se calculeze $\int\limits_{AB}xyds$, unde AB reprezintă arcul de parabolă: $y=x^2$ de la $A(1,1)$ la $B(3,9)$.

Observăm că arcul este dat ca în observația 7.9, cu $F(x,y)=xy$, $f(x)=x^2$, $x\in[1,3]$

Astfel $\int\limits_{AB}xyds=\int\limits_1^3x^3\sqrt{1+(2x)^2}dx=\int\limits_1^3x^3\sqrt{1+4x^2}dx$.

Făcând schimbarea de variabilă $t^2=1+4x^2\Rightarrow 2tdt=8xdx$, și obținem

$$\int\limits_1^3x^3\sqrt{1+4x^2}dx=\frac{1}{4}\int\limits_{\sqrt{5}}^{\sqrt{37}}\left(t^2-1\right)t\frac{t}{4}dt=\frac{1}{16}\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{\sqrt{5}}^{\sqrt{37}}=\frac{1}{16\cdot 15}\left(106\cdot 37\sqrt{3}-50\sqrt{5}\right)=\frac{1}{120}\left(1961\sqrt{3}-25\sqrt{5}\right)$$

8.2.Integrale de suprafaţă

8.2.1. Aria unei suprafeţe

Fie Σ o suprafaţă netedă definită parametric astfel:

$$\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \quad (u,v) \in D \subseteq R^2 \\ z = h(u,v) \end{cases}$$

cu $f, g \in C^1(D), A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, unde

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Amintim că are loc de asemenea relaţia:

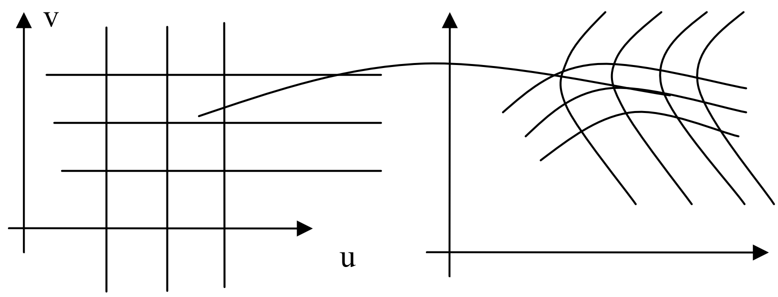
$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2 \ ,$$

unde

$$E = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial h}{\partial v}.$$



Divizăm domeniul D din planul (u,v) prin drepte paralele cu axele de coordonate. Obţinem $\delta=\{D_1,D_2,\ldots,D_n\}$ şi corespunzător ei, diviziunea $\Delta=\{S_1,S_2,\ldots,S_n\}$.

Definiţia 8.11. Se numeşte norma diviziunii Δ, numărul notat $\upsilon(\Delta) = \|\Delta\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}}\{diam(S_i)\}$, unde diam($S_i$) reprezintă diametrul celei mai mici sfere din R^3 ce conţine S_i .

Analog definim norma diviziunii δ ca fiind:

$$\upsilon(\delta) = \max_{i=\overline{1,n}}\{diam(D_i)\}$$

Observaţia 8.11. Este adevărată următoarea relaţie:

$$\upsilon(\delta) \to 0 \Leftrightarrow \upsilon(\Delta) \to 0$$

Observaţia 8.12. Aria suprafeţei Σ se poate calcula astfel:

$$Aria(\Sigma)=\iint_D \sqrt{EG-F^2}\,dudv$$

Observaţia 8.13. Dacă Σ este dată sub forma: $z=z(x,y),(x,y)\in D$

atunci aria este dată de: $Aria(\Sigma)=\iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy$, unde $p=\frac{\partial z}{\partial x}, q=\frac{\partial z}{\partial y}$.

Observaţia 8.14. Dacă Σ este dată prin ecuaţia implicită Φ(x,y,z)=0→z=z(x,y), avem :

$$p=-\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}}, q=\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}} \Rightarrow$$

$$aria\Sigma=\iint_D \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|}dxdy$$

Observaţia 8.15. Elementul $d\sigma=\sqrt{EG-F^2}\,dudv$ se numeşte *elementul de arie* al suprafeţei Σ.

8.2.2. Integrala de suprafaţă în raport cu elementul de arie (de speța întâi)

Fie suprafaţa netedă Σ dată parametric sub forma:

$$\begin{cases} x=f(u,v) \\ y=g(u,v) \\ z=h(u,v) \end{cases},$$

cu $(u,v)\in D\subset R^2$, D compact şi $\delta=\{D_1,D_2,\ldots,D_n\}$o diviziune a lui D iar $\Delta=\{S_1,S_2,\ldots,S_n\}$ o diviziune a lui Σ, aceasta fiind presupusă a fi o suprafaţa netedă.

Fie F: Σ→R şi un sistem de puncte intermediare $M_i(\xi_i,\eta_i)\in S_i$. Construim o sumă integrală de forma:

$$\sigma_D(F,M_i)=\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)ariaS_i$$

Definiţia 8.8. Dacă pentru orice şir de diviziuni $\{D_n\}$ ale lui Σ, şirul $\{\sigma_{Dn}(F,M_i)\}$ are o limită finită I, când şirul normelor $\upsilon(D_n)$ tinde la zero, pentru orice sistem de puncte intermediare, spunem că această limită I reprezintă *integrala de suprafaţă a funcţiei F în raport cu elementul de arie, sau integrala de suprafaţă de prima speţă a funcţiei F pe suprafaţa* Σ .

Notaţia folosită este: $I=\iint_\Sigma F(x,y,z)d\sigma$

Elementul $d\sigma$ din formula precedentă reprezintă *elementul de arie*. Astfel se obţine relaţia:

$$I=\iint_D F(f(u,v),g(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,dudv$$

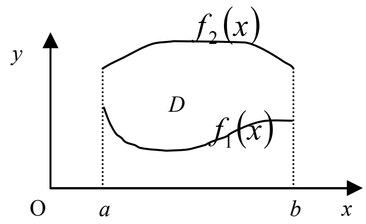
Observaţia 8.16. Dacă Σ este dată de $z=z(x,y),(x,y)\in D$, unde D reprezintă proiecţia lui Σ pe planul xOy ($D=pr_{xOy}\Sigma$) atunci avem:

$$\iint_{\Sigma} F(x,y,z)d\sigma = \iint_{D} F(x,y,z(x,y))\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy,$$

unde $p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

8.2.3. Formula lui Green (formulă care leagă integrala curbilinie de integrala dublă)

Fie un domeniu D din plan, definit prin inegalităţile: $a \le x \le b, f_1(x) \le y \le f_2(x)$, unde f_1 şi f_2 sunt continue pe [a,b] şi $f_1(x) < f_2(x)$, $a<x<b$ (simplu în raport cu Oy). Fie Γ frontiera domeniului. O vom considera orientată direct.



Fie $F(x,y)$ continuă pe D astfel încât $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ există şi este continuă pe D. Are loc relaţia:

$$\iint_{D} \frac{\partial F}{\partial y} dxdy = -\int_{\Gamma} Fdx.$$

Fie acum un domeniul D (simplu în raport cu Ox), astfel încât: $g_1(y) \le x \le g_2(y)$ şi $c \le y \le d$, cu g_1 şi g_2 continue pe $[c,d]$ şi $g_1(y)<g_2(y)$, $c<y<d$. Notăm cu Γ frontiera sa, presupusă orientată direct.

Fie $G(x,y)$ continuă pe D astfel încât $\frac{\partial G}{\partial x}(x,y)$ există şi este continuă pe D . Are loc relaţia:

$$\iint_{D} \frac{\partial G}{\partial x} dxdy = \int_{\Gamma} Gdy$$

Dacă D este simplu în raport cu ambele axe atunci are loc relaţia (**formula lui Green**):

$$\int_{\Gamma} Fdx + Gdy = \iint_{D} \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) dxdy$$

În continuare vom studia condiţiile în care integrala curbilinie $\int_{AB} Fdx + Gdy$ nu depinde de drum, adică nu depinde de curba Γ ce leagă punctele A şi B, ci doar de aceste puncte.

Teorema 8.2. Integrala curbilinie de mai sus nu depinde de drumul în domeniul D dacă şi numai dacă ea este nulă pe orice curbă închisă conţinută în D.

Teorema 8.3. Dacă $F(x,y)$ şi $G(x,y)$ sunt funcţii continue în domeniul D, integrala curbilinie nu depinde de drumul ales în domeniul D dacă şi numai dacă există $V(x,y)$ diferenţiabilă în D astfel ca $dV=Fdx+Gdy$.

În acest caz are loc relaţia:

$$\int_{AB} Fdx + Gdy = V(B) - V(A)$$

Observaţia 8.18. Dacă integrala curbilinie nu depinde de drum, ea se notează simplu:

$$\int_A^B (Fdx + Gdy).$$

Teorema 8.4. Fie $F(x,y)$ şi $G(x,y)$ două funcţii continue în domeniul simplu D (adică, dacă D include o curbă închisă Γ, el include şi domeniul mărginit de Γ). Dacă

$$\frac{\partial F}{\partial y} \text{ şi } \frac{\partial G}{\partial x} \text{ există şi sunt continue în } D,$$

atunci $\int_{AB} Fdx + Gdy$ nu depinde de drumul în domeniul D dacă şi numai dacă: $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x}$.

Exemplu: Să se calculeze $\iint_{\Sigma} (x + y + z)d\sigma$, unde $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z > 0$.

Soluţie: Observăm că Σ reprezintă o sferă cu centrul în origine de rază 2. O reprezentare parametrică a ei este:

$$\begin{aligned} x &= 2\sin u \cos v, \\ y &= 2\sin u \sin v, \text{ cu } (u,v) \in D = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi). \\ z &= 2\cos u \end{aligned}$$

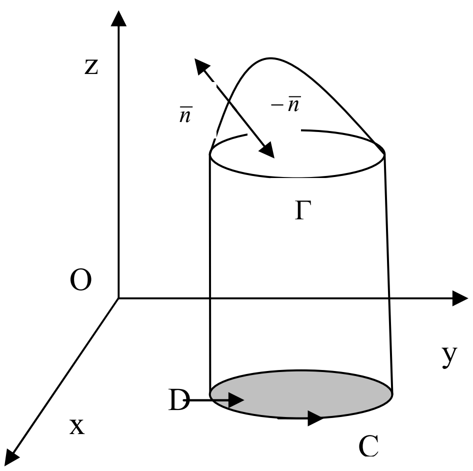
Evaluând A, B, C, E, G, F, ca în 7.2.1. deducem că: $A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2 = 16\sin^2 u$.

Notând cu I integrala cerută, obţinem:

$$I = \iint_{\Sigma} (2\sin u \cos v + 2\sin u \sin v + 2\cos u) 4\sin u du dv = 8\pi.$$

8.2.4. Integrala de suprafaţă în raport cu coordonatele (de speţa a doua)

Să considerăm o suprafaţă Σ dată de: $f(x,y)$, cu $(x,y) \epsilon D \subset R^2$, D mulţime compactă. Presupunem că Σ este bordată de curba Γ. Fie $C = pr_{x0y}\Gamma$ şi D domeniul pe care-l mărgineşte C.



În fiecare punct al suprafaţei Σ se pot considera doi vectori normali la suprafaţă, având sensuri opuse. Unul dintre ei va face un unghi ascuţit cu axa Oz, iar celălalt va face un unghi obtuz. Se deosebesc astfel două feţe ale lui Σ: faţa pozitivă (superioară) reprezentată de suprafaţă Σ în punctele căreia se ataşează vectorul normal care face unghiul ascuţit cu axa Oz şi faţa negativă (inferioară) pentru care unghiul este obtuz.

Pe conturul Γ al suprafaţei Σ care se proiectează pe xOy în conturul C al lui D, se pot alege două sensuri. Sensul asociat feţei superioare va fi acela care prin proiecţia pe xOy a lui Γ ne dă sensul direct pe C. Feţei interioare i se asociază sensul opus. În mod analog se defineşte un sens pe conturul oricărei porţiuni din suprafaţa Σ. Se zice că suprafaţa Σ este orientată.

Astfel, considerând că Σ este o suprafaţă orientată, putem spune că oricărei curbe Γ de pe suprafaţa orientată considerată îi corespunde un sens direct de parcurs. Sensul direct este acela conform căruia dacă un observator se mişcă pe curba considerată în sens indicat (direct), el vede normala la suprafaţă totdeauna la stânga.

Fie F: $\Sigma\subset R^3\to R$, Σ netedă şi $D=pr_{x0y}\,\Sigma$.

Fie $D=\{S_1,S_2,...,S_n\}$ o diviziune a lui Σ ce determină pe D o diviziune $\delta=\{D_1,D_2,\ldots,D_n\}$.

Notăm $\omega_i=\pm aria(D_i)$, semnul plus, respective minus, corespunzând cazului în care S_i se găseşte pe suprafaţa exterioară, respectiv interioară. Fie de asemenea un sistem de puncte intermediare M_i (x_i, y_i, z_i) є S_i , $i=\overline{1,n}$. Construim suma integrală, notată $\sigma_D(F,M_i)$ dată de:

$$\sigma_D(F,M_i)=\sum_{i=1}^{n}F(x_i,y_i,z_i)\omega_i\ .$$

Dar $\omega_i=\gamma_i\cdot aria(S_i)$, unde $\gamma_i=\dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, reprezintă cosinusul unghiului pe care îl face normala la faţa orientată, în punctul corespunzător, cu axa Oz.

Considerând $(D_n)_{n\in N}$ un şir de diviziuni ale lui Σ pentru care calculăm sume integrale ca cele de mai sus, obţinem un şir de numere reale.

Definiţia 8.9. Dacă pentru orice şir de diviziuni $(D_n)_{n\in N}$, cu şirul normelor tinzând la zero, şi pentru orice sistem de puncte intermediare, şirul sumelor $\sigma_{D_n}(F,M_i^n)$ are o limită finită, notată cu I, atunci aceasta reprezintă *integrala de suprafaţă* Σ a lui F în raport cu coordonatele x şi y.

Notaţia folosită este: $I=\iint_{\Sigma}F(x,y,z)dxdy=\iint_{\Sigma}F(x,y,z)\gamma d\sigma$.

Observații:

1) Dacă suprafaţa este dată parametric: $\Sigma:\begin{cases}x=f(u,v)\\ y=g(u,v)\\ z=h(u,v)\end{cases}$, $(u,v)\in D$,

atunci $\overline{n}=\dfrac{A\bar{i}+B\bar{j}+C\bar{k}}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\alpha\bar{i}+\beta\bar{j}+\gamma\bar{k}$,

cu $\alpha=\dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \beta=\dfrac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\ \gamma=\dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, şi deci:

$$I=\pm\iint_{D}F(f(u,v),g(u,v).h(u,v))Cdudv$$

Semnul „+” se alege când integrarea se face pe faţa exterioară

Semnul „-” se alege când integrarea se face pe faţa interioară

2) Dacă suprafaţa este dată astfel:

$$\Sigma:\ z=z(x,y),(x,y)\in(D),$$

atunci avem relaţia:

$$\iint_{\Sigma} F(x,y,z)dxdy = \pm\iint_{D} F(x,y,z(x,y))dxdy$$

Analog se definesc $\iint_{\Sigma} F(x,y,z)dxdz = \iint_{\Sigma} F(x,y,z)\beta d\sigma$ şi $\iint_{\Sigma} F(x,y,z)dydz = \iint_{\Sigma} F(x,y,z)\alpha d\sigma$

Formula generală a integralei de suprafaţă în raport cu coordonatele este:

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy = \iint_{\Sigma}\left(P(x,y,z)\alpha + Q(x,y,z)\beta + R(x,y,z)\gamma\right)d\sigma$$

Are loc următoarea formulă integrală (**formula lui Stokes**):

$$\int_{\Gamma} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz + \iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\ .$$

Observaţia 8.19. Dacă $\overline{V}:\Omega\to R, \overline{V}(x,y,z) = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$, iar $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ este vectorul de poziţie al unui punct pe Γ, atunci $\overline{dr} = dx\overline{i} + dy\overline{j} + dz\overline{k}$, şi de aici deducem că: $Pdx + Qdy + Rdz = \overline{V}\cdot d\overline{r}$. Astfel:

$$\int_{\Gamma} \overline{V}\cdot d\overline{r} = \iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz + \iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

Observaţia 8.20. Ţinând cont de relaţiile:

$$\begin{cases} dydz = \alpha d\sigma \\ dxdy = \gamma d\sigma \\ dxdz = \beta d\sigma \end{cases}$$

obţinem **forma vectorială a formulei lui Stokes:**

$$\int_{\Gamma} \overline{V}\cdot d\overline{r} = \iint_{\Sigma} rot\overline{V}\cdot\overline{r}d\sigma\ .$$

Observaţia 8.21. (Formula Gauss-Ostrogradski- leagă integrala triplă de integrala de suprafaţă**)**

Fie Ω un domeniu din R^3 simplu în raport cu axele de coordonate şi $\Sigma = FrS_i$. Dacă $\overline{V}:\Omega\to R$ este astfel încât $\frac{\partial P}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial z}$ sunt continue în Ω, iar Σ este formată dintr-o reuniune finită de porţiuni netede atunci are loc relaţia:

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \pm\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz\ ,$$

semnul „+” alegându-se când integrala se calculează pe faţa exterioară a lui Σ.

BIBLIOGRAFIE

1. Brînzănescu V., Stănăşilă O., *Matematici Speciale*, Editura All Educational, Bucureşti, 1998.
2. Caius I., etc., *Matematici clasice şi Moderne*, Ed. Tehnică, Bucureşti 1979.
3. Creţ F., Rujescu C., *Capitole speciale de analiză matematică şi geometrie analitică*, Ed. Mirton, Timişoara 1999.
4. Cristescu R., *Matematici Generale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1967.
5. Danko P. E., Popov A. G., Kozhevnikova T.Ya., *Higher mathematics in problems and exercices*, Mir Publishers, Moscow, 1983.
6. Donciu N., Flondor D., Simionescu GH., *Algebră şi Analiză Matematică, Culegere de probleme*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1967.
7. Filipescu D., Grecu E., Medinţu R., *Matematici Generale pentru Subingineri*, Culegere de probleme, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1975.
8. Kecs W., *Complemente de matematică cu aplicaţii în tehnică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1981.
9. Megan M., etc. *Bazele Analizei Matematice prin Execiţii şi Probleme*, Ed. Helicon Timişoara 1996.
10. Mihnea G., *Matematici Aplicate*, Editura Universităţii din Bucureşti, Bucureşti, 2000.
11. Nicolescu M., Dinculeanu N., Marcus S., *Analiză Matematică (vol I)*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1966.
12. Pătrăşcoiu C., Grecu L., Bordeaşu I., *Matematici aplicate în tehnică*, Ed. Politehnica, Timişoara 2003.
13. Popescu O., etc., *Matematici aplicate în economie*, Editura Didactică şi Pedagogică, R.A., Bucureşti, 1997.
14. Silov G.E., *Analiză matematică*, Editura ştiinţifică şi enciclopedică, Bucureşti, 1983.
15. Siretchi Gh., *Calcul diferential si integral*, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti 1985.
16. Stamate I., etc., *Matematici superioare*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1967.